“十三五”职业教育精品教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　金桂堂　肖马成

线性代数

主　编　金桂堂　肖马成

北京出版集团公司
北京出版社

北京出版集团公司
北　京　出　版　社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 金桂堂，肖马成主编. — 北京：北京出版社，2016.11（2024 重印）

ISBN 978-7-200-12592-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①金… ②肖… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 255567 号

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编：金桂堂　肖马成
出　版：北京出版集团公司
　　北　京　出　版　社
地　址：北京北三环中路 6 号
邮　编：100120
网　址：www.bph.com.cn
总发行：北京出版集团公司
经　销：新华书店
印　刷：定州市新华印刷有限公司
版　次：2016 年 11 月第 1 版　2023 年 12 月修订　2024 年 1 月第 4 次印刷
开　本：787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　张：12.5
字　数：253 千字
书　号：ISBN 978-7-200-12592-4
定　价：38.00 元

质量监督电话：010-82685218　010-58572341　010-58572393

目　　录

第一章　行列式

在经济生活、工程技术和科学管理活动中，经常遇到有关若干变量之间线性关系的问题，而这些问题往往都可以归结为求解线性方程组. 求解线性方程组是线性代数的主要内容，行列式是解线性方程组的重要工具. 本章将介绍 n 阶行列式的定义、性质及其运算，并介绍求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1　二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

行列式的概念源于用消元法求解线性方程组.

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_j(j=1,2)$ 是未知量，$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 是未知量的系数，$b_i(i=1,2)$ 是常数项.

用加减消元法，在方程组(1)的第一个方程和第二个方程的两端分别乘 a_{22} 与 a_{12}，然后两式相减，消去未知量 x_2，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

用同样的方法消去 x_1，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则方程组(1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

以下分析(2)式的结构，从中找出某种规律. (2)式中的分子、分母都是两个数的乘积的差，其中分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它是由方程组(1)的系数确定的. 若我们将方程组(1)的系数取出，且保持原来的相对位置不变，排成两行两列(横排称为行，纵排称为列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

那么 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 恰好是表中主对角线(从左上角至右下角的对角线)上的两个数的乘积与次对角线(从右上角至左下角的对角线)上的两个数乘积之差.

为了方便起见，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3}$$

称为**二阶行列式**. 其由四个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 排成两行两列，数 a_{ij} $(i=1,2; j=1,2)$ 称为行列式的元素，简称为元. 它的第一个下标 i 称为**行标**，表示元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行；它的第二个下标 j 称为**列标**，表示元素 a_{ij} 位于行列式的第 j 列. 此二阶行列式表示算式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式的定义本身也给出了它的计算方法：主对角线上的两元素之积取正号，次对角线上的两元素之积取负号. 这种计算法称为二阶行列式的**对角线法则**.

由于二阶行列式(3)是由二元线性方程组(1)中 x_1, x_2 的各项系数组成的，故称为系数行列式. 记方程组(1)的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

同样地，记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

其中 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中的第一列元素得到的二阶行列式，D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中的第二列元素得到的二阶行列式. 这样，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1)的唯一解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

例 1 用行列式解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=7, \\ 2x_1-5x_2=-8. \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15-4=-19\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} = -35-(-16)=-19,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -24-14=-38.$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-19}{-19}=1, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-38}{-19}=2.$$

二、三阶行列式

与二阶行列式类似，为了简单地表达三元线性方程组的解，引入三阶行列式．

设有 9 个数 a_{ij} $(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 排成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{5}$$

引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为数表(5)所确定的三阶行列式，且有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{6}$$

由(6)式右端可见，三阶行列式含 6(3!)项，每一项均为自不同行、不同列的三个元素的乘积，再冠以正负号，其计算规律仍遵循对角线法则(图 1－1)：即每条实线(共三条)所连接的三个元素的乘积前面加上正号，每条虚线(共三条)所连接的三个元素的乘积前面加上负号(对角线法则同样适用于三阶行列式)．

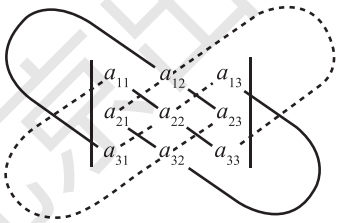

图 1－1

例 2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

解　$D=2\times1\times(-4)+3\times(-2)\times(-1)+1\times0\times2-2\times(-2)\times2-3\times0\times(-4)-1\times1\times(-1)=7.$

例 3　k 满足什么条件时，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix}$$

等于零？

解 $\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = k\times(-1)\times k+1\times1\times2+0\times0\times1-k\times1\times1-1\times$

$$0\times k-0\times(-1)\times2$$
$$=-k^2-k+2,$$

由 $k^2+k-2=0$,解得 $k=-2$ 或 $k=1$.

故当 $k=-2$ 或 $k=1$ 时,有

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix}=0.$$

利用三阶行列式,也可以求解三元线性方程组.

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{7}$$

则有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

这里,与解二元线性方程组相似,D 是由三元线性方程组(7)中三个未知数的系数按原来的相对位置不变所构成的三阶行列式,称为(7)的系数行列式,而 $D_j(j=1,2,3)$ 是用常数项 b_1,b_2,b_3 代替 D 中 x_j 的系数 a_{1j},a_{2j},a_{3j} 所得的行列式.

若系数行列式 $D\neq0$,则线性方程组(7)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 4 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ -2x_1+x_2-x_3=7, \\ x_1+3x_2+2x_3=4. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=1\times1\times2+2\times(-1)\times1+1\times(-2)\times3-1\times(-1)\times$

$$3-2\times(-2)\times2-1\times1\times1$$
$$=2-2-6+3+8-1=4\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}3&2&1\\7&1&-1\\4&3&2\end{vmatrix}=-4,D_2=\begin{vmatrix}1&3&1\\-2&7&-1\\1&4&2\end{vmatrix}=12,D_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&1&7\\1&3&4\end{vmatrix}=-8,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-4}{4}=-1,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{12}{4}=3,x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-8}{4}=-2.$$

由上述可知，对于未知数个数等于方程个数的二元、三元线性方程组，且当其系数行列式不等于零时，利用行列式这一工具求解十分简便. 然而对于 $n(n>3)$ 个方程组成的 n 元线性方程组，是否也有类似的结果，这就需要引入 n 阶行列式的定义.

习题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}x+1&1\\x^2&x-1\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}\frac{1+t^2}{1-t^2}&\frac{2t}{1-t^2}\\\frac{2t}{1-t^2}&\frac{1+t^2}{1-t^2}\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}1+\sqrt{2}&2-\sqrt{3}\\2+\sqrt{3}&1-\sqrt{2}\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha\\\sin\beta&\cos\beta\end{vmatrix}$.

2. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}4&2&3\\2&3&0\\3&0&0\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}a&b&0\\c&0&b\\0&c&a\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}a&a&a\\-a&a&x\\-a&-a&x\end{vmatrix}$.

3. 用二阶行列式解二元线性方程组：

(1) $\begin{cases}6x_1-4x_2=10,\\5x_1-7x_2=29;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}6x_1+5x_2=4,\\5x_1-7x_2=-19.\end{cases}$

4. 用三阶行列式解三元线性方程组：

(1) $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=-3,\\5x_1-2x_2+7x_3=22,\\2x_1-5x_2+4x_3=4;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}5x_1+2x_2+3x_3=-2,\\2x_1-2x_2+5x_3=0,\\3x_1+4x_2+2x_3=-10;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=16,\\x_1+4x_2+2x_3=13,\\3x_1+x_2+x_3=7;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}5x_1+3x_2+3x_3=48,\\2x_1+6x_2-3x_3=18,\\8x_1-3x_2+2x_3=21.\end{cases}$

§1.2 n 阶行列式

为了引入 n 阶行列式的定义，先介绍排列与逆序的有关知识.

一、排列与逆序

由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的不重复的有序数组，称为一个 n 阶排列.

如 12 和 21 都是二阶排列，123 和 213 都是三阶排列，1234 和 2134 都是四阶排列等.

显然，由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 阶排列的总数为 $n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$ 个. 所有的 n 阶排列中，只有排列 $12\cdots n$ 是由小到大按自然顺序排列的，称为自然序排列.

定义 1 若在某个 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，有较大的数排在较小的数的前面，则这两个数构成一个逆序. 一个 n 阶排列中逆序的总数称为它的逆序数，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数是奇数的排列称为奇排列；逆序数是偶数的排列称为偶排列.

如二阶排列共有 $2!=2$ 个，即

$$12,\ 21.$$

其中 12 的逆序数 $\tau(12)=0$，故 12 是偶排列；21 的逆序数 $\tau(21)=1$，故 21 是奇排列.

三阶排列共有 $3!=6$ 个，即

$$123,231,312,132,213,321.$$

其中 $\tau(123)=0$，$\tau(231)=2$，$\tau(312)=2$，故 123，231，312 都是偶排列；$\tau(132)=1$，$\tau(213)=1$，$\tau(321)=3$，故 132，213，321 都是奇排列.

例 1 求五阶排列 25413 的逆序数，并说明是奇排列还是偶排列.

解 2 在首位，2 与其后的每一个元素做大小比较，有 21，逆序数为 1；

5 在第二位，5 与其后的每一个元素做大小比较，有 54、51、53，逆序数为 3；

4 在第三位，4 与其后的每一个元素做大小比较，有 41、43，逆序数为 2；

1 在第四位，1 与其后的元素做大小比较，逆序数为 0；

3 在最末位，逆序数为 0.

故这个排列的逆序数为 $1+3+2+0+0=6$，即 $\tau(25413)=6$，可知五阶排列 25413 是偶排列.

二、n 阶行列式

先来研究二阶行列式、三阶行列式的结构：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

容易看出：

(1)二阶行列式表示的代数和的每一项都是取自不同行不同列的两个数的乘积，每

一项除符号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}$（这里行标按自然序排列，列标是一个二阶排列）.

类似地，三阶行列式的每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$（这里行标按自然序排列，列标是一个三阶排列）.

(2)当列标 p_1,p_2 取遍所有的二阶排列(12,21)时，就得到二阶行列式的所有的项，共 $2!=2$ 项.

类似地，当列标 p_1,p_2,p_3 取遍所有的三阶排列(123,231,312,132,213,321)时，就得到三阶行列式的所有的项，共 $3!=6$ 项.

(3)每一项的符号是：当这一项的行标按自然序排列时，如果对应的列标构成的排列是偶排列则该项取正号，是奇排列则该项取负号.

二阶行列式表示的代数和中，带正号的一项列标排列是 12；带负号的一项列标排列是 21.

三阶行列式表示的代数和中，带正号的三项列标排列是 123,231,312；带负号的三项列标排列是 132,213,321.

所以，各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau}$，其中 τ 是列标排列的逆序数.

通过上述分析可知，二阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2)} (-1)^{\tau(p_1p_2)} a_{1p_1}a_{2p_2},$$

其中 $\tau(p_1p_2)$ 是二阶排列 p_1p_2 的逆序数，$\sum\limits_{(p_1p_2)}$ 表示对所有二阶排列 p_1p_2 对应的所有项的求和.

三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2p_3)} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $\tau(p_1p_2p_3)$ 是三阶排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum\limits_{(p_1p_2p_3)}$ 表示对所有三阶排列 $p_1p_2p_3$ 对应的所有项的求和.

类似地，可以把行列式的定义推广到一般情况.

定义 2　设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行(横排为行) n 列(纵排为列)，组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

称为 n 阶行列式. 它表示一个算式，这个算式是所有可能取自不同行不同列的 n 个数的乘积的代数和. 每一项的符号是由该项行标排列和列标排列逆序数之和的奇偶性所决定：

当其行标按自然序排列(自然序排列的逆序数是 0)，那么该项的符号就由其相应列标排列的逆序数决定. 如果相应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负

号. 其一般项表示为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

当 $p_1p_2\cdots p_n$ 取遍所有的 n 阶排列时，得到代数和的所有项，共 $n!$ 项，其中正、负项各占 $\frac{n!}{2}(n\geqslant 2)$. 所有这 $n!$ 项的代数和为

$$\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

或当其列标先按自然序排列(自然序排列的逆序数是 0)，那么该项的符号就由其相应行标排列的逆序数决定. 如果相应的行标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 其一般项表示为

$$(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn},$$

当 $q_1q_2\cdots q_n$ 取遍所有的 n 阶排列时，得到代数和的所有项，共 $n!$ 项，其中正、负项各占 $\frac{n!}{2}(n\geqslant 2)$. 所有这 $n!$ 项的代数和为

$$\sum_{(q_1q_2\cdots q_n)}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{(q_1q_2\cdots q_n)}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

n 阶行列式(1)简记作 $\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为其 (i,j) 元.

当 $n=1$ 时，规定一阶行列式 $|a|=a$.(注意不要与绝对值符号相混淆)

例 2 证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{3}$$

其中式(2)左端行列式主对角线上的元素是 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，式(3)左端行列式次对角线上的元素是 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，其他位置元素都是 0.

证 式(2)左端行列式为对角行列式，其结果是显然的. 下面证明式(3).

令 $\lambda_i=a_{i(n-i+1)}$，则

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-1)2}a_{n1},$$

其中 τ 是 n 阶排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，故

$$\tau=0+1+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

即

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 3　证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{4}$$

证　主对角线以上的元素都是 0 的行列式称为下三角形行列式. 由于(列标)$j>$(行标)i 时，$a_{ij}=0$. 故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i}，其下标应满足 $p_i\leqslant i$，即有 $p_1\leqslant 1, p_2\leqslant 2, \cdots, p_n\leqslant n$.

在所有 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中能满足上述条件的排列只有一个自然序排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 而此项的符号 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}=(-1)^0=1$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

习题 1.2

1. 求下列排列的逆序数，并指出它们的奇偶性.

(1) 32541；　　(2) 421653；

(3) 562138479；　　(4) $n(n-1)\cdots 321$.

2. 选择 i,j，使得

(1) $1i74256j9$ 成偶排列；(2) $1625i489j$ 成奇排列.

3. 设六阶行列式 $D_6=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{26} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & \cdots & a_{66} \end{vmatrix}$.

(1)D_6 的展开式中共有多少项?

(2)在 D_6 的展开式中,乘积 $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$,$a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$ 各取什么符号?

(3)在 D_6 的展开式中,含有因子 $a_{21}a_{34}a_{46}$ 的项共有几项?

(4)在 D_6 的展开式中,写出含有因子 $a_{21}a_{34}a_{46}$ 且带负号的项.

4. 用行列式定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

§1.3 n 阶行列式的性质

为了研究 n 阶行列式的性质,先来讨论对换与排列的奇偶性的关系.

一、对换

定义 在 n 阶排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不动,称为对排列的一次对换.将相邻两个元素对换称为相邻对换.

例如五阶排列 25413 中的 5 与 3 对换,得到新的五阶排列 23415. $\tau(25413)=6$,25413 为偶排列,而 $\tau(23415)=3$,23415 为奇排列.显然经过一次对换就改变了排列的奇偶性.这一结论具有一般性.

定理 一个排列中的任意两个元素对换,则排列的奇偶性改变.

证 先证相邻对换的情况.

设排列为 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_k$,对换 a 与 b,变为 $a_1a_2\cdots a_sb_1b_2\cdots b_k$. 显然,$a_1,a_2,\cdots,a_s,b_1,b_2,\cdots,b_k$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变,而 a,b 两元素的逆序数应改变:当 $a<b$ 时,经对换后 a 的逆序数增加 1,而 b 的逆序数不变;当 $a>b$ 时,经对换后 a 的逆序数不变,而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_k$ 与排列 $a_1a_2\cdots a_sbab_1b_2\cdots b_k$ 的奇偶性改变.

再证一般对换的情况.

设排列为 $a_1a_2\cdots a_sab_1b_2\cdots b_kbc_1\cdots c_m$,把它作 k 次相邻对换,变为 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots$

$b_kc_1\cdots c_m$，再作 $k+1$ 次相邻对换，变为 $a_1a_2\cdots a_sbb_1b_2\cdots b_kac_1\cdots c_m$. 综上所述，共经过 $2k+1$ 次对换，由排列 $a_1a_2\cdots a_sab_1b_2\cdots b_kbc_1\cdots c_m$ 变为排列 $a_1a_2\cdots a_sbb_1b_2\cdots b_kac_1\cdots c_m$. 所以这两个排列的奇偶性相反.

推论　将奇排列变成自然序排列的对换次数为奇数，将偶排列变成自然序排列的对换次数为偶数.

证　由定理可知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，自然序排列是偶排列（其逆序数为 0），所以推论成立.

例 1　(1)4 阶行列式共有多少项？

(2)写出 4 阶行列式中所有带有负号且含因子 a_{23} 的项.

解　(1)4 阶行列式共有 $4!=24$ 项，其中带有正、负号的项各有 12 项.

(2)设满足给定条件的项为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$，其行标按自然序排列，要使其带负号，必须使其列标所构成的排列 $p_1p_2p_3p_4$ 为奇排列，这里 $p_2=3$，而 p_1,p_3,p_4 只能取 1、2、4 中的数. 如取 $p_1=1,p_3=2,p_4=4$，得排列 1324，它的逆序数是 1，为奇排列. 再根据改变排列奇偶性的定理，3 在第二个位置不动，其他位置上的元素连续对换两次，可得 2341，4312 也为奇排列，而且再也没有满足其他给定条件的奇排列. 则对应于以上三个奇排列的的三项为

$$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},a_{12}a_{23}a_{34}a_{41},a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}.$$

二、n 阶行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证　记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D^{T} 的 (i,j) 元为 b_{ij}，则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 所以

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

根据行列式定义，有

$$D=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\sum_{(q_1q_2\cdots q_n)}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

故

$$D=D^{\mathrm{T}}.$$

例如，二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

显然有

$$D=D^{\mathrm{T}}.$$

性质 1 表明，行列式中行与列的地位是对称的，因此凡是有关行的性质，对列也同样成立. 反之亦然.

性质 2 互换行列式的任意两行(列)，行列式仅改变符号.

证 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 对换第 i,j 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{\tau} b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然序排列，τ 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数. 设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 τ_1，则 $(-1)^{\tau}=-(-1)^{\tau_1}$，故

$$D_1=-\sum (-1)^{\tau_1} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n},$$

即

$$D_1=-D.$$

例如，对二阶行列式互换两列，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=-(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

通常用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_i 表示第 i 列. 交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 行列式中两行(列)对应元素相同，那么这个行列式等于零.

证 把这两行对换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3 行列式中某一行(列)中所有元素都乘同一个数 k，等于用数 k 乘此行列式.

例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

通常第 i 行(或列)乘 k,记作 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$).

推论 1　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2　行列式中某一行(列)的所有元素全为零,那么这个行列式等于零.

性质 4　行列式中有两行(列)对应元素成比例,那么这个行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一行(列)的各元素是两数之和,则可将行列式写成两个行列式之和.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式的某一行(列)的各元素乘同一个数后加到另一行(列)对应元素上去,行列式的值不变.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+kr_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

通常数 k 乘行列式中第 i 行(或列)加到第 j 行(或列)上,记作 r_j+kr_i(或 c_j+kc_i).

以上性质请读者证之.

上述性质,在行列式的计算中应用非常广泛,其中性质 2、3、6 是行列式关于行和关于列的三种主要运算,即 $r_i\leftrightarrow r_j$、$r_i\times k$、r_j+kr_i 和 $c_i\leftrightarrow c_j$、$c_i\times k$、c_j+kc_i. 特别是利用 r_j+kr_i(或 c_j+kc_i)可以把行列式中许多元素化为 0,从而简化计算.

例 2　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解　化为上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+(-1)r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4\leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+r_2]{r_3+2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4\leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+(-2)r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -7.$$

利用行列式性质,化行列式为上(下)三角形行列式的计算方法称为**化三角形法**.

例 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 此行列式的特点是各行(列)元素的和都是 10,故把第 2、3、4 列同时加到第 1 列,再将第 1 列提出公因子 10,然后将第 1 行乘-1,分别加到第 2、3、4 行,有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+(c_2+c_3+c_4)} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{\text{依次}r_i-r_1} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3+2r_2} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -160.$$

例 4 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}.$$

解 化为上三角形行列式

$$D \xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1-r_3]{r_2-r_1} ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = a^2b^2.$$

例 5 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d & 0 \end{vmatrix}.$$

解 根据性质 1,有

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & 0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_2 & b_1 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_3 & b_2 & c_1 & 0 & -d \\ a_4 & b_3 & c_2 & d & 0 \end{vmatrix},$$

每一行提(-1),得

$$D=(-1)^5\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d & 0 \end{vmatrix}=-D.$$

则有 $2D=0$,即 $D=0$.

注:该行列式的特点是:第(i,j)元与第(j,i)元互为相反数,即 $a_{ij}=-a_{ji}$,称该行列式为反对称行列式.用类似上述方法可以证明:奇数阶反对称行列式等于零.

例 6　计算 $n(n\geqslant 3)$阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

解　把第 1 行的$(-x)$倍分别加到第 2 行,…,第 n 行,得

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix},$$

当 $x\neq 0$ 时,把第 j 列的$\dfrac{1}{x}$倍加到第 1 列$(j=2,\cdots,n)$,则 D 化为上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}.$$

当 $x=0$ 时,显然 $D=0$.

所以总有

$$D=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}.$$

例 7 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

求证 $D=D_1D_2$.

证 对 D_1 作运算 r_i+kr_j,把 D_1 化为下三角形行列式,设为

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk},$$

对 D_2 作运算 c_i+kc_j,把 D_2 化为下三角形行列式,设为

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}.$$

于是,对 D 的前 k 行作运算 r_i+kr_j,再对后 n 列作运算 c_i+kc_j,把 D 化为下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

故

$$D=p_{11}\cdots p_{kk}\cdot q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2.$$

例 8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

解　当 $n=1$ 时，$D_1=a_1+b_1$；

当 $n=2$ 时，$D_2=(a_1-a_2)(b_2-b_1)$；

当 $n\geqslant 3$ 时，把第 1 行的 (-1) 倍分别加到第 i 行 $(i=2,3,\cdots,n)$，行列式不变，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix}=0.$$

综上可得

$$D_n=\begin{cases} a_1+b_1, n=1, \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), n=2, \\ 0, n\geqslant 3. \end{cases}$$

习题 1.3

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 201 & 102 & -99 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -8 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 解下列关于 x 的方程：

(1) $\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 \\ -1 & 1-x & x \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix}=0$；　　(2) $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}=0$.

3. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

$$(2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}.$$

§1.4 行列式按行(列)展开

一、余子式和代数余子式

对于三阶行列式,不难发现有如下关系:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

为了解决(1)式中三个二阶行列式与三阶行列式的关系,我们引进余子式和代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中,把元素 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下的元素保持原来相对位置不变组成的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式. 一般地,有

定义 在 n 阶行列式中,把 (i,j) 元 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所在的第 i 行第 j 列元素划去后,留下的元素保持原来相对位置不变组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij};记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij} 称为 (i,j) 元 a_{ij} 的**代数余子式**.

由(1)式可知,对于三阶行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

对 n 阶行列式是否也有同样的关系呢?

引理　一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素中除 (i,j) 元 a_{ij} 外，其余元素全为 0，则该行列式等于 a_{ij} 与其代数余子式的乘积，即

$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

证　先证 $(i,j)=(1,1)$ 的情况，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这是上一节例 7 中当 $k=1$ 的特殊情况，根据例 7 的结论，即有

$$D=a_{11}M_{11}.$$

又

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11},$$

所以

$$D=a_{11}A_{11}.$$

再证一般情况，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为了利用前面的结果，把 D 的行列作如下对换：把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行、…、第 1 行对换，这样数 a_{ij} 就调换成 $(1,j)$ 元，对换的次数为 $i-1$. 再把第 j 列依次与第 $j-1$ 列、第 $j-2$ 列、…、第 1 列对换，这样数 a_{ij} 就调换成 $(1,1)$ 元，对换的次数为 $j-1$. 总计，经过 $i+j-2$ 次对换，把数 a_{ij} 调换成 $(1,1)$ 元，所得行列式 $D_1=(-1)^{i+j-2}D=(-1)^{i+j}D$，而 D_1 中 $(1,1)$ 元的余子式就是 D 中 (i,j) 元的余子式 M_{ij}.

由于 D_1 中 $(1,1)$ 元为 a_{ij}，第 1 行其余元素都为 0，利用前面的结果，有

$$D_1=a_{ij}M_{ij},$$

于是

$$D=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

二、行列式按行（或列）展开定理

定理　行列式等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

证　设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

根据行列式性质 5，可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

根据引理，即得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

类似地，若按列证明，有

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

这个定理称为行列式按行(列)展开定理. 显然，利用该定理可以将 n 阶行列式的计算化成对 n 个 $n-1$ 阶行列式的计算. 利用这一法则并结合使用行列式的性质，可以简化行列式的计算. 如

例 1 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 注意到行列式 D 的第 2 列元素除(2,2)元外，其余元素都是 0，可按第 2 列展开：

$$D=3\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

降阶为 3 阶行列式. 对于得到的 3 阶行列式，进行运算 r_1+r_3、r_2+r_3，使其第 1 列元素除(3,1)元外，其余元素都是 0，可按第 1 列展开，降阶为 2 阶行列式，即可求值，即

$$D\xlongequal[r_2+r_3]{r_1+r_3}3\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3\times(-1)\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-3\times14=-42.$$

利用行列式按某一行(列)展开定理，将高阶行列式降为低阶行列式的计算行列式方法称为降阶法. 降阶时应注意按零元素较多的行(列)展开，或者先利用性质 6 将某一行(列)除一个元素不为零外，其余元素都化为零后，按该行(列)展开即可降阶，从而简化行列式计算.

例 2　计算 2 021 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2\,020 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

解　行列式 D 按最后一列展开，得

$$D=(-1)\times(-1)^{(2\,021+2\,021)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 2\,020 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

由于 n 阶次对角线行列式的值等于其次对角线上的元素的乘积，其符号为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$（参看 § 1.2 例 2），于是，有

$$D=(-1)\times(-1)^{\frac{2\,020(2\,020-1)}{2}}2\,020=-2\,020.$$

例 3　证明 n 阶范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

证　用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，有

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant 2}(x_i-x_j).$$

可见，$n=2$ 时，结论成立.

现假设对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式结论成立，欲证对 n 阶范德蒙行列式结论也成立.

为此，对 n 阶范德蒙行列式 D_n 作如下计算：$r_n+(-x_1)r_{n-1}$，$r_{n-1}+(-x_1)r_{n-2}$，…，$r_2+(-x_1)r_1$，即从第 n 行开始，后行加上前一行的 $-x_1$ 倍，有

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-3}(x_2-x_1) & x_3^{n-3}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-3}(x_n-x_1) \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix},$$

按第 1 列展开，并把每一列的公因子(x_i-x_1)提出，则有

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

即

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)D_{n-1},$$

其中 D_{n-1}是一个 $n-1$ 阶范德蒙行列式，按归纳假设，有

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}=\prod_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

故上述 n 阶范德蒙行列式

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_j)=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

根据数学归纳法，对于一切 $n\geqslant 2$ 均成立.

由行列式展开定理，还可以得出以下推论.

推论 行列式中，任一行(列)的各元素与另一行(列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j).$$

证 把 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

中第 j 行元素 a_{jk} 换成 $a_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$，得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

按第 j 行展开，有

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}.$$

又当 $i\neq j$ 时，D_1 中有两行对应元素相同，由性质 2 的推论可知 $D_1=0$. 所以有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j).$$

类似地，有

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j).$$

综合行列式展开定理及其推论，行列式有关代数余子式的性质可写为：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D(i=j),\\0(i\neq j);\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D(i=j),\\0(i\neq j).\end{cases}$$

再用克罗内克符号

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1(i=j),\\0(i\neq j),\end{cases}$$

那么上述两式可简写为

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}D;\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\delta_{ij}D.$$

例 4　计算下列行列式

(1) $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{vmatrix}$；

(2) $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\2x_1^2-1&2x_2^2-1&2x_3^2-1&2x_4^2-1\\4x_1^3-3x_1&4x_2^3-3x_2&4x_3^3-3x_3&4x_4^3-3x_4\end{vmatrix}$.

解　(1)将 D 转置得 D^{T}，为 4 阶范德蒙行列式，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}$$
$$=(4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1)=12,$$

即

$$D=12.$$

(2)将 r_3+r_1，r_4+3r_2 后，就得到 4 阶范德蒙行列式，即

$$D\xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\2x_1^2&2x_2^2&2x_3^2&2x_4^2\\4x_1^3&4x_2^3&4x_3^3&4x_4^3\end{vmatrix}$$

$$=8\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\\x_1^3&x_2^3&x_3^3&x_4^3\end{vmatrix}=8\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant 4}(x_i-x_j).$$

例 5 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\b&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}.$$

解 按第 1 列展开,得

$$D=a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a&b&\cdots&0&0\\0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&b\\0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}+b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}b&0&\cdots&0&0\\a&b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&b&0\\0&0&\cdots&a&b\end{vmatrix},$$

注意到在行列式 D 中余子式 M_{11} 与 M_{n1} 分别是上、下三角形行列式,所以

$$D=a\cdot a^{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot b\cdot b^{n-1}=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

例 6 已知 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27,$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$ 的值,其中 A_{4j} 是元素 $a_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 的余子式.

解 根据行列式展开定理及其推论

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D(i=j),\\0(i\neq j),\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases}A_{41}+A_{42}+A_{43}+2A_{44}+2A_{45}=27,\\2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+A_{44}+A_{45}=0,\end{cases}$$

由这个方程组解得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9,A_{44}+A_{45}=18.$$

例 7 设 $D_1=\begin{vmatrix}x&0&x^2\\1&2&0\\\sin x&0&2\end{vmatrix}$,$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1+\sin x&\cos x&1\\-1&0&1\end{vmatrix}$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{D_1}{D_2}$.

解　$D_1=2\begin{vmatrix} x & x^2 \\ \sin x & 2 \end{vmatrix}=4x-2x^2\sin x$,

$$D_2 \xlongequal{c_1+c_3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2+\sin x & \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2+\sin x & \cos x \end{vmatrix}=2\cos x-\sin x-2,$$

所求极限为$\frac{0}{0}$型未定式,由洛必达法则,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{D_1}{D_2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x-2x^2\sin x}{2\cos x-\sin x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4x\sin x-2x^2\cos x}{-2\sin x-\cos x}=-4.$$

习题 1.4

1. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ b & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ d & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$第一列元素的代数余子式 $A_{11},A_{21},A_{31},A_{41}$,并验证 $\sum\limits_{i=1}^{4}a_{i2}A_{i1}=0$.

2. 用按行(列)展开的方法计算以下行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & 1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a+2 \end{vmatrix}$.

3. 解方程:$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}=0$.

4. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & x & x & x \end{vmatrix}=12$,求 x 的值.

5. 证明下列等式:

(1) $\begin{vmatrix} y & x & x \\ x & y & x \\ x & x & y \end{vmatrix}=(2x+y)(x-y)^2$;　(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}=0$;

(3) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}=0$；　(4) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$；

(5) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kr} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$；

(6) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(n\geqslant 2)$.

6. 若常数 k_1、k_2，使 $\begin{cases} a_{11}=k_1a_{21}+k_2a_{31}, \\ a_{12}=k_1a_{22}+k_2a_{32}, \\ a_{13}=k_1a_{23}+k_2a_{33}, \end{cases}$ 求证 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$.

§1.5　克拉默法则

下面用 n 阶行列式来求解含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组.

设含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1}$$

类似于二元、三元线性方程组，它的解可以用 n 阶行列式表示，即有

克拉默法则，亦称**克莱姆法则**.

如果线性方程组(1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么线性方程组(1)存在唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列元素用方程组右端的常数项列代替所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个法则的证明将在第二章给出.

例 1　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+2x_4=1, \\ x_1+x_2-2x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2+x_4=2, \\ x_1+x_3-x_4=1. \end{cases}$$

解　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-10\neq 0,$$

根据克拉默法则，此方程组有唯一解. 而

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-8,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad D_4=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-3,$$

所以此方程组的解为

$$x_1=\frac{-8}{-10}=\frac{4}{5},x_2=\frac{9}{10},x_3=\frac{-5}{-10}=\frac{1}{2},x_4=\frac{3}{10}.$$

例 2　解线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+\cdots+bx_n=1, \\ bx_1+ax_2+\cdots+bx_n=1, \\ \cdots\cdots \\ bx_1+bx_2+\cdots+ax_n=1, \end{cases}$$

其中 $(a-b)[a+(n-1)b]\neq 0$.

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b].$$

由于$(a-b)[a+(n-1)b]\neq 0$,故 $D\neq 0$,所以方程组有唯一解. 由于

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=(a-b)^{n-1},$$

类似地,有

$$D_2=D_3=\cdots=D_n=(a-b)^{n-1}.$$

故线性方程组的解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}=\frac{1}{a+(n-1)b}(j=1,2,\cdots,n).$$

显然,在使用克拉默法则解线性方程组时,要注意有两个条件必须满足:

(1)方程个数与未知量个数相等;

(2)系数行列式 $D\neq 0$.

当方程组(1)右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时,则

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{2}$$

称为**齐次线性方程组**,否则称为**非齐次线性方程组**.

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 显然是齐次线性方程组(2)的解,称为齐次线性方程组(2)的**零解**. 如果齐次线性方程组(2)除了零解外,还有不全为零的解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,称为齐次线性方程组(2)的**非零解**.

根据克拉默法则,不难得到如下结论.

推论 1 如果齐次线性方程组(2)的系数行列式 $D\neq 0$,则它只有唯一零解.

由此可知,$D=0$ 是齐次线性方程组(2)有非零解的必要条件,后面还可以证明这个条件也是充分的. 于是有

推论 2 齐次线性方程组(2)有非零解的充要条件为系数行列式 D 为零.

例 3 问 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2-x_3=0,\\ 2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$

有非零解？

解　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[c_2+c_3]{c_1+(-2)c_3}\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 1\\ 3 & \lambda-1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4.$$

令 $\lambda^2-3\lambda-4=0$，解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=4$. 即当 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=4$ 时，系数行列式 $D=0$，故方程组有非零解.

例 4　解齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+2x_4=0,\\ x_1-x_2+x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2+2x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0.\end{cases}$$

解　因为方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+2r_3}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=4\neq 0,$$

根据推论 1，齐次线性方程组只有零解.

习题 1.5

1. 利用克拉默法则解下列方程组：

(1) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=3,\\ x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1-2x_2-3x_3=4;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6,\\ 3x_1+2x_2-x_3=4,\\ 5x_1-x_2+3x_3=12;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3-2x_4=2,\\ 2x_1-x_3+4x_4=4,\\ 3x_1+2x_2+x_3=-1,\\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4=-4;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\ 3x_1+x_2-x_3-2x_4=-4,\\ 2x_1-3x_2-x_3-x_4=-6,\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4.\end{cases}$

2. 问 k 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=0,\\ x_1-3x_2+4x_3=0,\\ -x_1+2x_2+kx_3=0\end{cases}$ (1)只有零解；(2)有非零解？

3. 设 a,b,c,d 是互不相等的常数，证明：方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0, \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3+d^2x_4=0, \\ a^3x_1+b^3x_2+c^3x_3+d^3x_4=0 \end{cases}$$

只有零解.

复习题一

1. 单项选择题：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}=(\quad)$.

A. $3!$　　B. $9!$　　C. 0　　D. 252

(2)若 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix}=0$，则 $x=(\quad)$.

A. 2　　B. 3　　C. -2　　D. -3

(3)下列行列式 D 中不等于零的有(　　).

A. 行列式 D 中有两行对应元素成比例

B. 行列式 D 中有一行的元素全为零

C. 行列式 D 满足 $3D-2D^{\mathrm{T}}=2D+1$

D. 行列式 D 中有两行对应元素之和均为零

(4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=(\quad)$.

A. $abc(b-a)(c-a)(c-b)$　　B. $abc(b-a)(c-a)(b-c)$

C. $abc(a-b)(c-a)(c-b)$　　D. $abc(b-a)(a-c)(c-b)$

(5)行列式 $D=\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的充分必要条件是(　　).

A. $k=0$　　B. $k=3$　　C. $k=2$　　D. $k=1$

(6) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=(\quad)$.

A. x^4+y^4　　B. x^4-y^4　　C. $(x^2+y^2)^2$　　D. $(x^2-y^2)^2$

(7)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 8 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} =$(　　).

A. 50　　B. $-10!$　　C. $10!$　　D. $9!$

(8)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$(　　).

A. $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_{n1}$　　B. $-a_1a_2\cdots a_{n-1}a_{n1}$

C. $(-1)^n a_1a_2\cdots a_{n-1}a_{n1}$　　D. $(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_{n1}$

(9)当 $\lambda=$(　　),齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 有非零解.

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 0

(10) 下列方程组中,只有零解的齐次线性方程组是(　　).

A. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ -2x_1+x_2+x_3=0, \\ -x_1+3x_2+4x_3=0 \end{cases}$　　B. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ -x_1+2x_2+x_3=0, \\ -x_1+9x_2+2x_3=0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ -x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-2x_2-x_3=0, \\ -x_1+x_2-7x_3=0 \end{cases}$

2. 填空题:

(1)三阶行列式 $D_1=6$,将 D_1 第 3 行的各元素乘 2 后加到第 1 行对应元素上去,得新行列式 $D_2=$_____;

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -8 & -3 & -21 \\ -1 & 0 & -9 \end{vmatrix} =$_____;

(3)四阶行列式第 3 行的元素分别是 $-6,1,3,4$,对应的余子式的值分别为 $2,-2,8,5$,则行列式 $D=$_____;

(4)行列式 $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} =$_____;

(5)行列式$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}=$_____；

(6)若行列式 $D=\begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=0$,则 $k=$_____；

(7)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}=$_____；

(8)若$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$,则$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$_____；

(9)设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$,则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$_____；

(10)已知方程组$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=0, \\ x_1+ax_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+2x_3=0 \end{cases}$有非零解,则 $a=$_____.

3. 计算下列行列式：

(1)$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix}$ $(a_1a_2a_3\neq 0)$；

(2)$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$；

(3)$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$；　　(4)$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. 计算 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$.

5. 判别下列方程组是否有解．若有解，求出其解.

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=6, \\ 3x_1-3x_2+3x_3+2x_4=5, \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=3, \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=4. \end{cases}$

6. 已知方程组 $\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2, \\ bcx+cay+baz=3abc. \end{cases}$

试问：a,b,c 满足什么条件时，方程组有唯一解？并求出唯一解.

7. 当 λ 取何值时，下列齐次线性方程组有非零解？

(1) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+2x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} (1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0. \end{cases}$