"十三五"普通高等教育规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

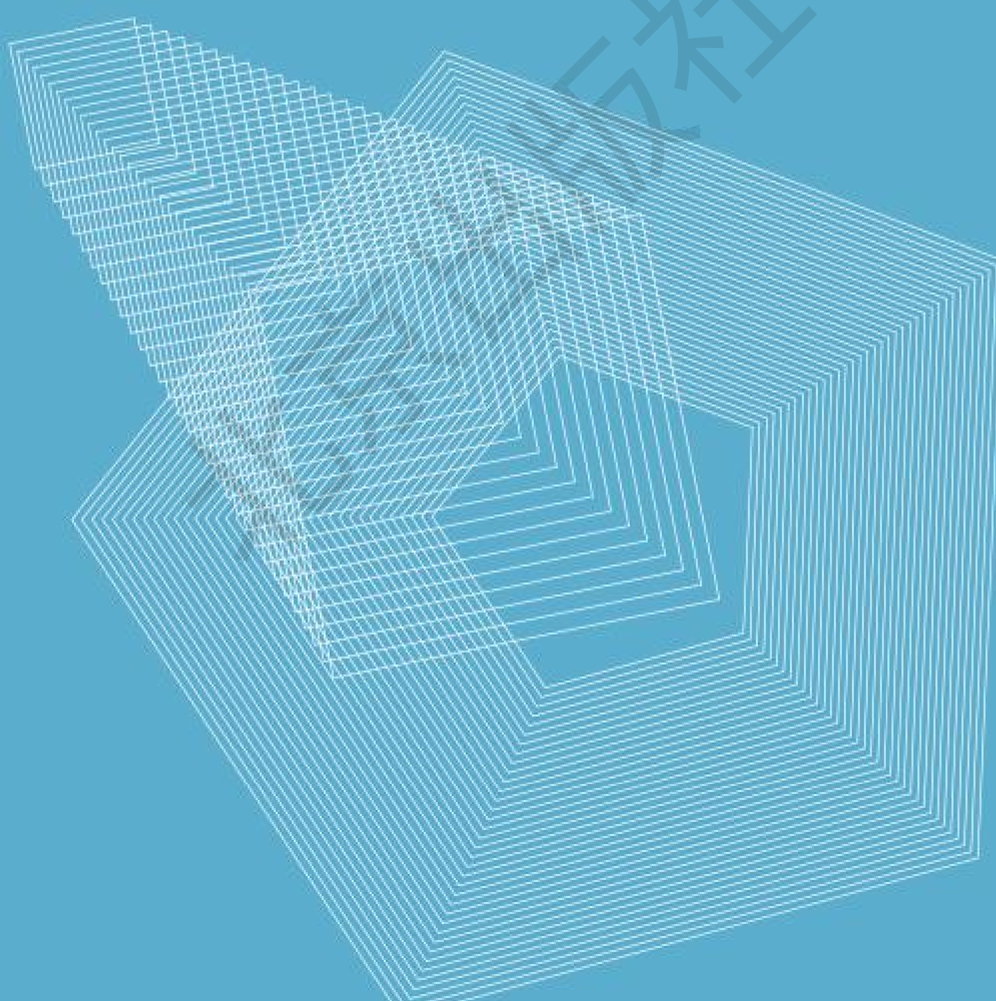
—— 上册 ——

主 编 金桂堂

高等数学

上册

主 编 金桂堂



北京出版集团公司
北 京 出 版 社

北京出版集团公司
北京出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：本科：全二册 / 金桂堂主编. -- 北京：北京出版社，2016.6（2022 重印）

ISBN 978-7-200-12192-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①金… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 112754 号

高等数学 上册

GAODENG SHUXUE SHANGCE

主　编：金桂堂
出　版：北京出版集团公司
　　　　北 京 出 版 社
地　址：北京北三环中路 6 号
邮　编：100120
网　址：www.bph.com.cn
总发行：北京出版集团公司
经　销：新华书店
印　刷：定州市新华印刷有限公司
版　次：2016 年 6 月第 1 版　2022 年 7 月修订　2022 年 8 月第 2 次印刷
开　本：787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　张：16.5
字　数：334 千字
书　号：ISBN 978-7-200-12192-6
定　价：全二册 73.00 元 本册 35.00 元

质量监督电话：010-82685218 010-58572162 010-58572393

目　　录

第一章　函数、极限与连续

1.0　预备知识

高等数学主要在实数范围内研究函数，这一节先讲述学习高等数学必须具备的有关实数的基础知识.

1.0.1　实数与数轴

实数由有理数与无理数组成. 有理数包括正、负整数，零以及正、负分数. 有理数都可以用分数形式$\frac{p}{q}$(其中，p，q 为整数，$q\neq 0$)表示，也可用有限小数或无限循环小数表示. 无限不循环小数是无理数. 全体实数构成的集合称为实数集.

若在一条直线上(通常情况下取水平直线)确定一点为坐标原点，标以字母 O，指定一个方向为正方向(通常情况下取向右的方向为正方向)，并规定一个单位长度，则称之为数轴(图 1－1). 任一实数都对应数轴上唯一的一个点；反之，数轴上每一点都唯一地表示一个实数. 为了方便起见，我们经常把实数和它在数轴上对应的点不加区分，即把“实数 a”与“数轴上的点 a”这两种说法看作具有相同的含义.

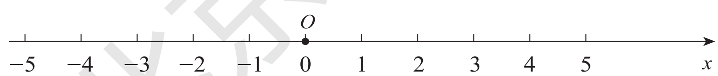


图 1－1

实数集记为 **R**，有理数集记为 **Q**，整数集记为 **Z**，正整数集记为 $\mathbf{N}^*$. 本书如无特殊声明，都是在实数集 **R** 上讨论问题. 实数可表示为

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\text{(无限不循环小数)}\end{cases}$$

1.0.2　实数的绝对值

实数 x 的绝对值记为$|x|$，其定义为

$$|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$$

例如，$|2|=2$，$|0|=0$，$|-2|=2$.

实数 x 的绝对值的几何意义：实数 x 的绝对值 $|x|$ 表示点 x 到坐标原点的距离.

实数的绝对值有如下性质：

(1)对于任意实数 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，有 $|x|=0$；

(2)对于任意实数 $x\in\mathbf{R}$，有 $|-x|=|x|$；

(3)对于任意实数 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|=\sqrt{x^2}$；

(4)对于任意实数 $x\in\mathbf{R}$，有 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(5)设 $a>0$，则 $|x|<a$ 的充分必要条件是 $-a<x<a$；

(6)设 $a>0$，则 $|x|>a$ 的充分必要条件是 $x<-a$ 或 $x>a$.

性质(5)的几何意义：在数轴上，$|x|<a$ 表示所有与原点的距离小于 $a(a>0)$ 的点 x 构成的集合，而 $-a<x<a$ 表示所有位于点 $-a$ 与点 a 之间的点 x 构成的集合，这两个集合表示的是同一个集合. 性质(6)可做类似的解释.

由性质(5)可以知道不等式 $|x-A|<a$ 与不等式 $A-a<x<A+a$ 是等价的，其中，A 为常数，a 为正实数.

关于实数四则运算的绝对值，有如下结论. 对任意实数 $x,y\in\mathbf{R}$，恒有

(1) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$；

(2) $|x-y|\geqslant \big||x|-|y|\big|\geqslant |x|-|y|$；

(3) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$；

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

1.0.3 区间与邻域

1. 区间可理解为实数集 $\mathbf{R}$ 的子集.

设有实数 a 和 b，取 $a<b$.

(1)数集 $\{x|a<x<b\}$，称为开区间，记作 (a,b)；

(2)数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，称为闭区间，记作 $[a,b]$；

(3)数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$，称为左闭右开区间，记作 $[a,b)$；

(4)数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$，称为左开右闭区间，记作 $(a,b]$；

(5)数集 $\{x|a\leqslant x\}$，记作区间 $[a,+\infty)$；

(6)数集 $\{x|a<x\}$，记作区间 $(a,+\infty)$；

(7)数集 $\{x|x\leqslant b\}$，记作区间 $(-\infty,b]$；

(8)数集 $\{x|x<b\}$，记作区间 $(-\infty,b)$；

(9)全体实数的集合 $\mathbf{R}$，也可记作无限区间 $(-\infty,+\infty)$.

其中，a,b 分别为区间的左端点与右端点，闭区间 $[a,b]$，半开区间 $[a,b)$、$(a,b]$，开区间 (a,b) 为有限区间，以上各有限区间的长度均为 $b-a$. 而(5)、(6)、(7)、(8)、(9)均为无限区间.

区间在数轴上的表示如图 1－2 所示.

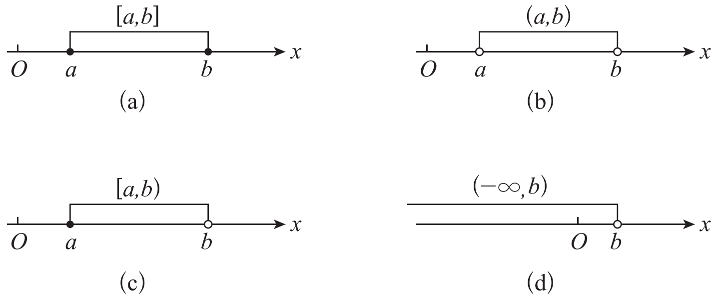


图 1－2

2. 邻域

设 δ 为一正数,开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0,\delta)$,其中,x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径,邻域的长度为 2δ(图 1－3).

点 x_0 的 δ 邻域的不等式表示为

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta \text{ 或 } |x-x_0|<\delta.$$

把邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中的中心点 x_0 去掉,由余下的点构成的集合,称为点 x_0 的空心(或去心)δ 邻域(图 1－4),记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$. 显然有

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

点 x_0 的空心 δ 邻域的不等式表示为

$$0<|x-x_0|<\delta.$$

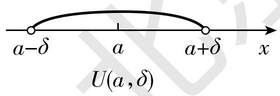


图 1－3

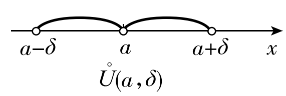


图 1－4

习题 1.0

1. 解下列不等式,用区间表示下列不等式的解的集合,并将解画在数轴上.

(1) $|x|\geqslant 2$;　　(2) $|x-2|<3$;

(3) $x^2-2x-8>0$;　　(4) $x^2+2x-3<0$;

(5) $|3x+1|<2$;　　(6) $|ax-x_0|<\delta$(其中,x_0 为常数,a,δ 为正数);

(7) $1<|x-2|<3$;　　(8) $0<(x-2)^2<4$.

2. 用不等式表示下列区间.

(1) $U(x_0,\delta)$;　　(2) $\mathring{U}(x_0,\delta)$;

(3) $U(3,\delta)$;　　(4) $\mathring{U}(1,\delta)$.

1.1　函数

1.1.1　常量与变量

在研究自然科学或工程技术的某一过程中，经常会遇到各种不同的量，例如时间、速度、温度、质量、面积、体积以及成本、收益、利润等. 这些量一般可分为两类，其中一类量在研究过程中保持不变，即取同一个数值，称之为**常量**；另一类量在研究过程中是变化着的，即可取不同的数值，称之为**变量**. 由于物质的运动是绝对的，静止是相对的，所以常量也是相对的. 在实际问题中，有一些量虽然也取不同数值，但若变化十分细微，为了研究问题的方便起见，有时也将这些量视为常量.

例 1　在自由落体运动中，物体垂直下落的距离与时间的关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中，s 为距离，t 为时间，g 为重力加速度. 在自由落体运动中，时间 t、距离 s 是变量，重力加速度 g 是常量. 但严格讲，重力加速度也应是变量，因为地球是椭球体，每一点的重力加速度与这一点的位置到地心的距离有关，然而物体垂直下落的距离不是很大，重力加速度的变化也就微乎其微，因而重力加速度也就被近似地视为常量了.

本书中，常量用字母 $a,b,c,\cdots\cdots$ 表示，变量用字母 $x,y,t,\cdots\cdots$ 表示.

1.1.2　函数的有关概念

在自由落体运动中，物体下落的距离 s 随下落的时间 t 的变化而变化，假定物体落地时刻 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 任取一值时，由上述关系式就可以确定相应的 s 值. 在实际中，如同自由落体运动，在某一过程中，两个变量同时变化，但是它们的变化不是孤立的，而是按照一定的规则互相联系着，其中一个量的变化会引起另一个量的变化，当前者的值确定时，后者则按照某一规则有一确定的值与之对应，这样两个变量之间就构成函数关系.

1. 函数的定义

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，对于任意的 $x\in D$，变量 y 按照一定的规则 f，有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**，式子 $y=f(x)$ 称为**函数解析式或函数表达式**.

当自变量 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 所有的函数值的集合称为函数的**值域**，记作 $f(D)$，即 $f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

由函数的定义可知，函数的**定义域**与**对应规则**是确定函数的两个要素. 值域是随定义域与对应规则而确定的. 两个函数当且仅当定义域相同、对应规则相同时，这两个函数才是相同的.

在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义确定. 对于用公式表达的函数，

函数的定义域就是使得函数解析式有意义的自变量的取值集合.

例 2　下列各组中的两个函数是否为同一函数?

(1)$y=x-1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$;

(2)$y=|\cos x|$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

解　(1)函数 $y=x-1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,而 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.因此,虽然这两个函数在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$上的函数值是相同的,但由于它们的定义域不相同,所以不是相同函数.

(2)函数 $y=|\cos x|$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$ 的定义域均为$(-\infty,+\infty)$,注意到恒有$\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$成立,即这两个函数的定义域相同且对应规则也相同,所以是相同函数.

例 3　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(2x-1)}$的定义域.

解　要使函数有意义,必须满足

$$\begin{cases}2x-1>0,\\ \ln(2x-1)\neq 0,\end{cases}\text{解得 } x>\frac{1}{2}\text{ 且 } x\neq 1,$$

所以函数的定义域为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

例 4　设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$,并确定它的定义域.

解　$f[f(x)]=f\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$,$D=\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

2.函数的表示法

函数通常有三种表示法:表格法、图示法和公式法.

(1)表格法

若变量 x 与 y 之间有函数关系,将一系列自变量 x 的数值与对应的函数值 y 列成表格表示函数关系,例如,大家所熟悉的平方表、立方表、常用对数尾数表、三角函数表等,用列表表示函数的方法称为**表格法**.

表格法简单易行,也具有一定的直观性,且可以表达不易求解析式的函数,所以在自然科学与工程技术中经常使用,但其反映的往往是函数某一局部的情况.

(2)图示法

若变量 x 与 y 之间有函数关系,用图形的形式表示出来,这种表示函数的方法称为**图示法**.

例 5　华北某地气象站用自动温度记录仪记录 1 天 24 小时的温度变化情况(图 1-5).图中的横坐标是时间 t(时),纵坐标是温度 T(℃),曲线反映了一昼夜中温度随时间变化的情况.

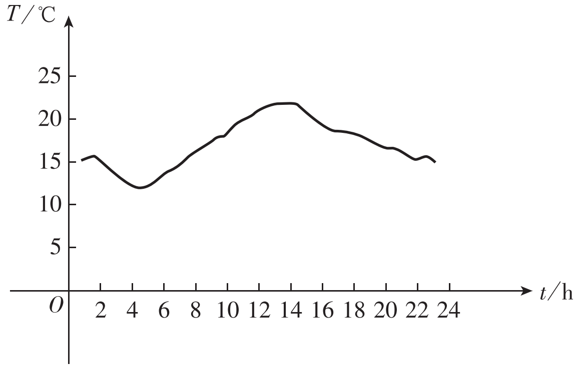


图 1-5

图示法直观性强，函数的变化一目了然，且便于研究函数的几何性质，但数量关系的精确度较差，不便于做理论研究.

(3)公式法

用数学式表示函数的方法称为**公式法**，又称**解析法**. 如例 1.

解析法能全面体现函数的全部特征，但并不是所有的函数都能用解析法表示，如类似气温随时间变化的函数是没有解析式的.

表格法、图示法和解析法在表示函数关系时，各有优点及不足之处，所以常常将三种方法同时使用，以便更好地探究函数的性质.

1.1.3　函数的简单性质

1. 函数的有界性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若存在正数 M，使得在区间 I 上 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 I 上**有界**；若不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 函数 $f(x)=\sin x$ 的图形位于直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间(图 1-6).

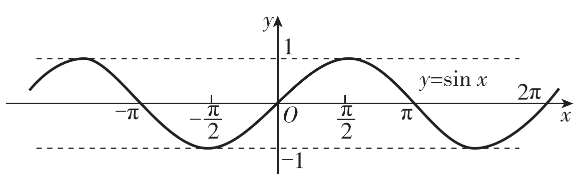


图 1-6

应注意，讨论函数的有界性离不开自变量的取值区间 I. 例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内，因为 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$，所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界，但函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间(0,

1)内是无界的(x 趋近于 0 时,不存在确定的正数 M,使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立). 如果不限定区间,则约定是在该函数的定义域上有此性质.

2. 函数的单调性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,若对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**(图 1-7),区间 I 称为**单调增区间**;若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上**单调减少**(图 1-8),区间 I 称为**单调减区间**.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

如图 1-7 和图 1-8 所示,单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的;单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的.

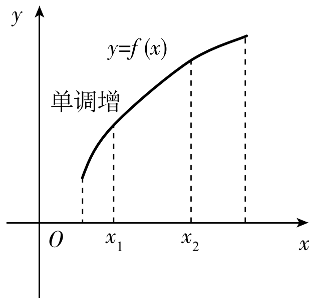


图 1-7

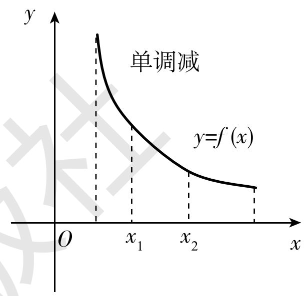


图 1-8

例如,$f(x)=\ln x$ 在区间$(0,+\infty)$内是单调增加函数.

又如,$f(x)=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的,在区间$(-\infty,0)$内是单调减少的,在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

应注意,讨论函数的单调性也离不开自变量的取值区间 I. 函数的单调性是针对具体区间而言,是函数的局部特性. 如果不限定区间,也约定是在该函数的定义域上有此性质.

3. 函数的奇偶性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称,若对任意 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x)$$

成立,则 $f(x)$ 称为**偶函数**;

若对任意 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则 $f(x)$ 称为**奇函数**.

由定义可知,偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1-9),奇函数的图形关于原点对称(图 1-10).

例如,$y=x^2$、$y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是偶函数,$y=x^3$、$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是奇函数.

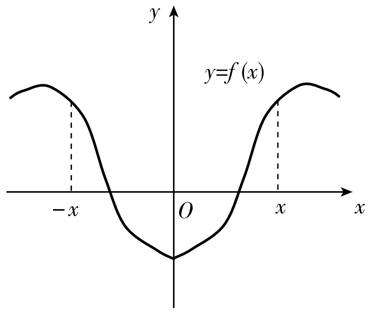


图 1－9

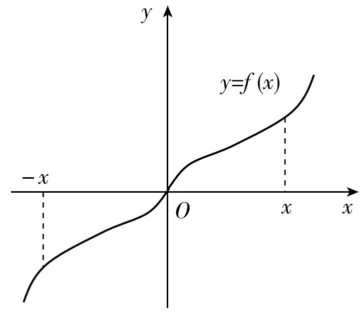


图 1－10

4. 函数的周期性

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T\neq 0$，使得对任意 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，并且

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则 $f(x)$ 称为**周期函数**，T 为**周期**，通常讲的周期是指**最小正周期**.

例如，函数 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；而函数 $y=\tan x$ 及 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

显然，周期为 T 的周期函数 $y=f(x)$ 的图形沿 x 轴相隔一个周期 T 重复一次.

1.1.4 反函数与复合函数

1. 反函数

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $Y=f(D)$. 如果对于值域中每一个 y，都可由方程 $f(x)=y$ 唯一确定出 x，则得到一个定义在集合 Y 上的新函数，称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),\ y\in Y,$$

对反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

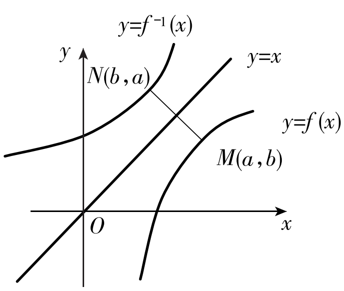


图 1－11

通常，用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常将 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Y=f(D)$. 显然，反函数的定义域等于直接函数的值域，反函数的值域等于直接函数的定义域，且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1－11).

由反函数定义可得求反函数的步骤如下：

(1)从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$；

(2)交换字母 x 与 y 的位置，并注意到反函数的定义域为直接函数的值域.

例 6 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-1$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

(2)$y=\mathrm{e}^x-1$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

解　(1)从 $y=2x-1$ 解出 x，得

$$x=\frac{1}{2}(y+1),$$

交换 x 与 y 的位置，得所求的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x+1),x\in(-\infty,+\infty).$$

(2)从 $y=\mathrm{e}^x-1$ 解出 x，得

$$x=\ln(y+1),$$

交换 x 与 y 的位置，得所求的反函数为

$$y=\ln(x+1),x\in(-1,+\infty).$$

2. 复合函数

定义　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中，x 是自变量，u 称为**中间变量**.

例 7　设 $y=u^2$，$u=2x+1$，则 $y=(2x+1)^2$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=2x+1$ 复合而成的复合函数.

例 8　设 $y=\ln u$，$u=-1-x^2$，因 $u=-1-x^2$ 的值域与 $y=\ln u$ 的定义域无公共部分，故 $y=\ln u$ 与 $u=-1-x^2$ 不能构成复合函数.

注意　复合函数也可由 3 个或 3 个以上的函数复合而成.

例 9　$y=\sin[2-\ln(3x+1)]$ 是由 $y=\sin u$，$u=2-\ln v$，$v=3x+1$ 复合而成的复合函数.

1.1.5　分段函数

用公式法表示函数，一般情况下，用一个式子即可，但是也有一些函数，需要在定义域内的不同区间上用不同式子表示，即用两个或两个以上的式子来表示，这类函数称为**分段函数**.

例 10　已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2,x>0,\\2x,-2<x\leqslant 0,\\-x-1,x\leqslant -2,\end{cases}$$

求 $f(1)$、$f(0)$、$f(-1)$、$f(-2)$ 和 $f(-3)$.

解　函数的图像如图 1-12 所示.

当 $x>0$ 时，$f(1)=1^2=1$；

当 $-2<x\leqslant 0$ 时，$f(0)=2\times 0=0$，$f(-1)=2\times(-1)=-2$；

当 $x\leqslant -2$ 时，$f(-2)=-(-2)-1=1$，$f(-3)=-(-3)-1=2$.

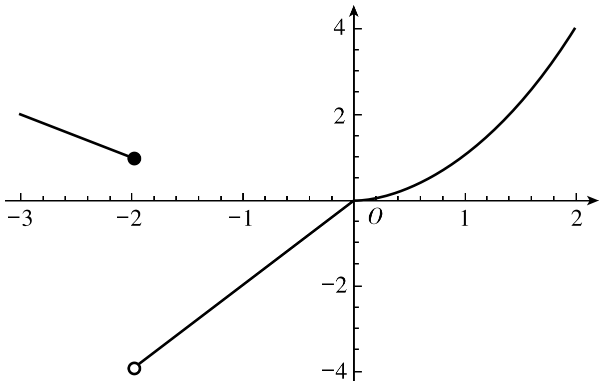


图 1－12

例 11 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$$

其图形如图 1-13 所示.

例 12 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0.\end{cases}$$

其图形如图 1-14 所示.

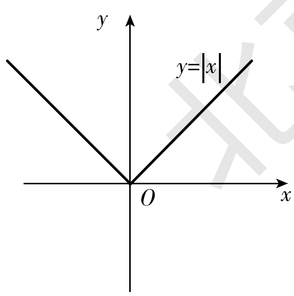


图 1－13

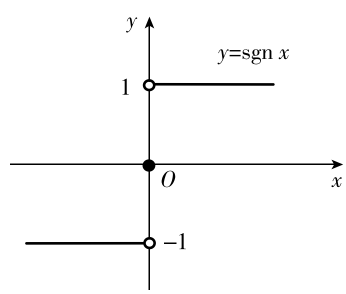


图 1－14

例 13 取整函数

$$y=[x], x\in(-\infty,+\infty).$$

其中,设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的**整数部分**,记作$[x]$.

例如,$\left[\dfrac{1}{3}\right]=0$,$[\sqrt{2}]=1$,$[\pi]=3$,$\left[-\dfrac{1}{2}\right]=-1$.

取整函数的图形如图 1－15 所示.

注意 (1)分段函数是用几个式子表示一个函数,而不是几个函数;

(2)分段函数需要分段求值、分段作图.

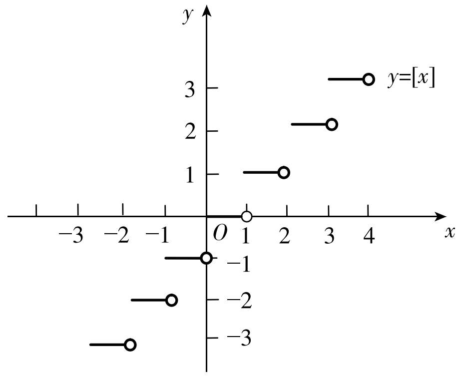


图 1 - 15

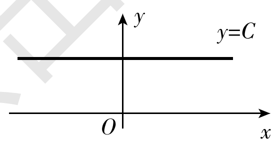
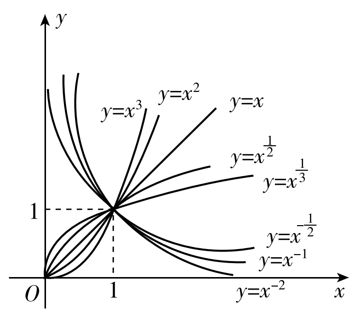
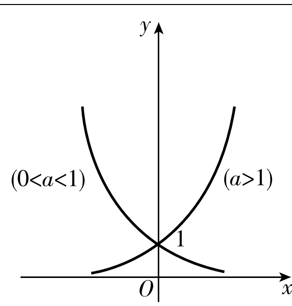
1.1.6　初等函数

1. 基本初等函数

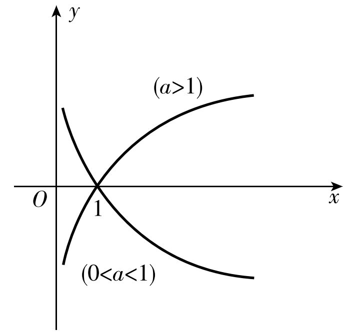
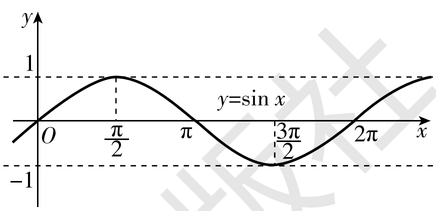
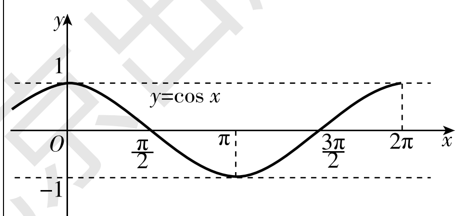
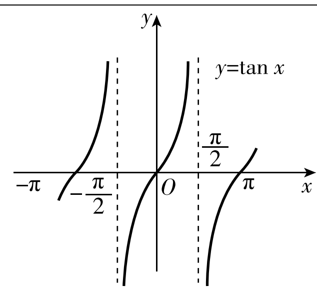
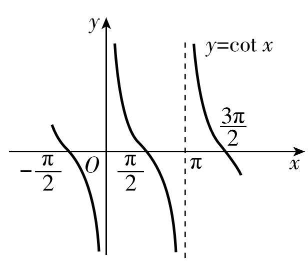
我们学过的常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，统称为**基本初等函数**.

基本初等函数的定义域、值域、图像和主要特性见表 1 - 1.

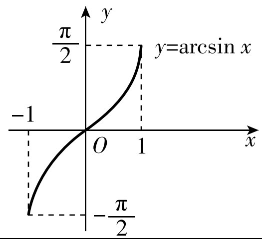
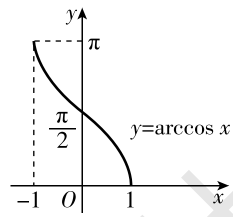
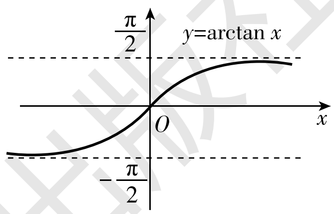
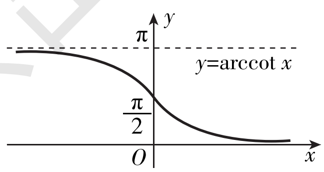
表 1 - 1

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特性
常量函数	$y=C$（C 为常数）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{C\}$		偶函数，周期函数，任意不为 0 的正常数均为周期，有界函数
幂函数	$y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）	依 α 不同而异，但在$(0,+\infty)$内都有定义		在第一象限内，当 $\alpha>0$ 时，x^{α} 为单调增；当 $\alpha<0$ 时，x^{α} 为单调减
指数函数	$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		过点$(0,1)$. 当 $0<a<1$ 时，a^{x} 是单调减；当 $a>1$ 时，a^{x} 是单调增

续表

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特性
对数函数	$y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		过点(1,0). 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是单调减；当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是单调增
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界函数，在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 单调增；在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 单调减 ($k\in\mathbf{Z}$)
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界函数，在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 单调增；在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 单调减 ($k\in\mathbf{Z}$)
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k\in\mathbf{Z}$) $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 单调增 ($k\in\mathbf{Z}$)
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 单调减 ($k\in\mathbf{Z}$)

续表

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特性
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增，有界函数
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减，有界函数
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增，有界函数
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减，有界函数

2. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或经过有限次复合步骤所构成，且可用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\lg\cos^2 x$，$y=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+1}$，$y=|x|=\sqrt{x^2}$ 都是初等函数.

注意　分段函数一般不是初等函数.

3. 建立函数关系举例

例 14　有一无盖的圆柱形大桶，容积为 V，试将其表面积表示为其底面半径 r 的函数.

解　无盖的圆柱形大桶底面面积为

$$S_1=\pi r^2.$$

于是桶高为

$$h=\frac{V}{S_1}=\frac{V}{\pi r^2}.$$

桶的侧面积为

$$S_2=2\pi rh=\frac{2V}{r}.$$

因此桶的表面积为

$$S=S_1+S_2=\pi r^2+\frac{2V}{r}(r>0).$$

例 15 某矿厂 A 要将生产出的矿石运往铁路旁的冶炼厂 C 冶炼. 已知该矿厂距冶炼厂所在铁路垂直距离为 a 千米,它的垂足 B 到 C 的距离为 b 千米. 又知铁路运价为 m 元/吨·千米,公路运价是 n 元/吨·千米($m<n$),为节省运费,拟在铁路上另修一小站 M 作为转运站,那么总运费的多少决定于 M 的位置. 试求出总运费与距离 $|BM|$ 的函数关系(图 1-16).

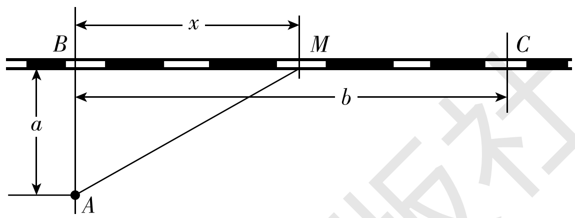


图 1-16

解 设总运费为 y,距离 $|BM|$ 为 x,则

总运费 y=铁路运费+公路运费.

由图 1-16 可以看出总运费与距离 $|BM|$ 的函数关系为

$$y=n|AM|+m|MC|=n\sqrt{x^2+a^2}+m(b-x),$$

函数的定义域为 $[0,b]$.

例 16 某产品共有 1 500 吨,每吨定价为 150 元,若一次销售量不超过 100 吨时,按原价销售;若一次销售量超过 100 吨,但不超过 500 吨,则超过 100 吨的部分按 9 折出售;如果一次销售量超过 500 吨,则超过 500 吨的部分又按 8 折出售,试将该产品一次销售收入表示成一次销售量的函数.

解 用 x 表示一次销售量,$f(x)$ 表示一次销售收入,则

$$f(x)=\begin{cases}150x, 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 150[100+0.9(x-100)], 100<x\leqslant 500,\\ 150[100+0.9\times 400+0.8(x-500)], 500<x\leqslant 1\,500,\end{cases}$$

函数的定义域为 $[0,1\,500]$.

习题 1.1

A 组

1. 下列各组函数中,$f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(2) $f(x)=x-2$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$；

(3) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $g(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$；

(4) $f(x)=\ln x^3$ 与 $g(x)=3\ln x$；

(5) $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(6) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ 与 $g(x)=|x-1|$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{2x-3}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{2+x-x^2}}{x}$；　　(4) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$；

(5) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$；　　(6) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$.

3. 求函数值.

(1) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(x+h)$；

(2) 设 $f(x+3)=x^2+6x+5$，求 $f(x)$，$f(x+\Delta x)$，$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & 0\leqslant x<1,\\ 3-x, & 1\leqslant x<2,\\ x^2-1, & x\geqslant 2.\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$；

(3) 画出 $f(x)$ 的图形.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x+\sin x$；　　(2) $y=x^3+\cos x$；

(3) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　　(4) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

(5) $y=\ln(1+x^2)$；　　(6) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

6. 说明下列函数的单调性.

(1) $y=2x-1$；　　(2) $y=1-x^2$；

(3) $y=e^{-x}$；　　(4) $y=\ln(x-1)$.

7. 下列函数中哪些是周期函数？如果是周期函数，请说明其周期.

(1) $y=\sin 2x$；　　(2) $y=\sin x+\cos x$；

(3) $y=\tan(3x+1)$；　　(4) $y=\sin^2 x$；

(5) $y=x\cos x$；　　(6) $y=\sin x+\tan\dfrac{2x}{5}$.

8. 求下列函数的反函数.

(1) $y=x^3+2$；　　(2) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

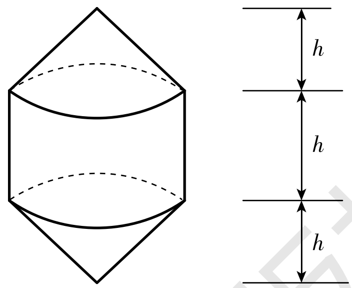
9. 下列复合函数是由哪些简单函数复合构成的？

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$；　　(2) $y=\cos(x^2+1)$；

(3) $y=\sin(1+\ln^2 x)$；　　(4) $y=\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{x}}$.

10. 设一矩形的周长为 $2p$，现绕其一边旋转一周形成一圆柱体，求圆柱体体积 V 与底半径 x 的函数关系.

11. 要制作一个浮标筒，该浮标筒由一个圆柱面与两个相同的圆锥面焊接而成，如图所示，其中，两个圆锥和一个圆柱的高都相等，在使用材料确定的条件下，如何用浮标筒中间部位圆柱的半径 r 表示出它的浮力？



（第 11 题图）

B 组

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$；　　(2) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(3) $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$；　　(4) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$.

2. 解下列各题.

(1) 设 $f(x)=3x+5$，求 $f[f(x)-2]$；

(2) 设 $f(x)=\ln x, g(x)=\mathrm{e}^{2x+1}$，求 $f[g(x)]$；

(3) 设 $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{1-x}{3+x}$，求 $f(x)$；

(4) 设 $f(x)=\mathrm{e}^x, f[g(x)]=x+1$，求 $g(x)$.

3. 解下列各题.

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\leqslant 0,\\ \sqrt{\sin x}, x>0,\end{cases}$ 求 $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), f(0), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1,\end{cases}$ 当 $x\in(-\infty,+\infty)$，求 $f[f(x)]$.

(3) 设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x$，其中，$x\neq 0, x\neq 1$，求 $f(x)$.

(4) 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f[f(x)], f\{f[f(x)]\}$ 及 $f\{f[\cdots f(x)]\}$.

4. 证明：$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数.

5. 求下列函数的反函数.

(1)$y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$；　　　(2)$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$.

6. 下列复合函数是由哪些简单函数复合构成的？

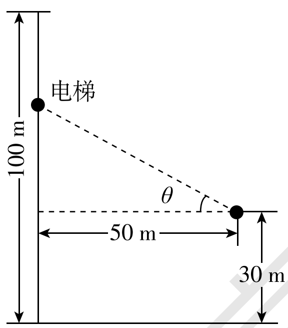
(1)$y=2^{\arcsin(1+\sqrt{x+1})}$；　　　(2)$y=\cos^2\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$；

(3)$y=\ln(1+\sqrt{\tan x^2})$；　　　(4)$y=\arccos\sqrt{x^2-1}$.

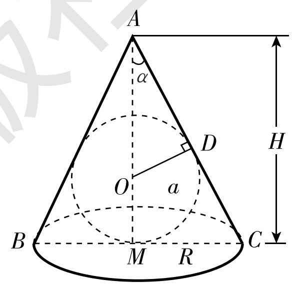
7. 某商厦高 100 m，你现位于商厦对面，离商厦 50 m，高 30 m 的楼房的窗户处. 商厦的观光电梯正以 10 m/s 的速度下降，开始(设此时电梯在楼顶)时记 $t=0$(单位：s). 设 θ 为你的水平视线与看到电梯的视线之间的夹角，如图所示.

(1)求电梯从楼顶下降过程中距离地面的高度 $h(t)$的公式；

(2)利用(1)的答案，求 θ 依时间 t 变化的函数表达式.



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 一正圆锥外切于半径为 a 的球，如图所示，试将圆锥的体积表示为圆锥半顶角 α 的函数.

9. 某停车场收费标准为：凡停车不超过 2 小时的，收费 5 元；以后每多停车 1 小时(不到 1 小时仍以 1 小时计)增加收费 1 元，但停车时间最长不能超过 5 小时. 试建立停车费用与停车时间之间的函数模型.

1.2　极限

1.2.1　数列的极限

1. 数列的概念

定义　按一定规则排列的无穷多个实数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

称为**数列**，简记作$\{x_n\}$，其中的每一个数称为数列的项，x_1 称为数列的第一项，x_2 称为数列的第二项……x_n 称为数列的第 n 项，又称为通项或一般项.

数列可以理解为是定义在正整数集合 $\mathbf{N}^*$ 上的函数，可记作

$$x_n = f(n), n \in \mathbf{N}^*.$$

因此数列也称为整标函数.

例 1 数列$\{x_n\} = \{n^2\}$,即

$$1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots.$$

例 2 数列$\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$,即

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots.$$

例 3 数列$\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n + 1}{2}\right\}$,即

$$0, 1, 0, 1, \cdots, \frac{(-1)^n + 1}{2}, \cdots.$$

例 4 数列$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$,即

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots.$$

例 5 数列$\{x_n\} = \left\{1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$,即

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, 1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \cdots.$$

在几何上,数列$\{x_n\}$可看作数轴上的一个动点依次取数轴上的 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$(图 1-17).

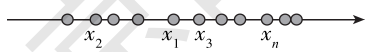


图 1-17

2.数列的极限

观察上述几个数列,当 n 无限增大时(即 $n \to \infty$时),是否有些数列无限趋近于某个确定的常数?如例 2 中,当 n 无限增大时,数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$无限趋近于常数 1;例 4 中,当 n 无限增大时,数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$无限趋近于常数 0;例 5 中,当 n 无限增大时,数列$\left\{1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$无限趋近于常数 1.

如何说明“当项数 n 无限增大时,数列$\{x_n\}$无限趋近于某个确定的常数”呢?光凭直观感觉是远远不够的,为此,我们给出严格的、精确的分析:

下面以数列$\left\{1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$为例,说明当项数 n 无限增大时,数列的项 $x_n = 1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$无限趋近于常数 1.

所谓 x_n 无限趋近于常数 1,就是说$|x_n - 1|$可以无限小,即对于任意给定的正数 ε,$|x_n - 1|$都可以小于 ε.而$|x_n - 1|$可以无限小的前提条件是 n 充分大.比如,给定 $\varepsilon = 0.01$,欲使

$$|x_n-1|=\left|\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon=0.01,$$

只需 $n>100$ 即可. 若给定 $\varepsilon=0.001$，欲使

$$|x_n-1|=\left|\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon=0.001,$$

只需 $n>1\ 000$ 即可.

一般来说，对于任意给定的正数 ε，欲使

$$|x_n-1|=\left|\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 这样，从量化方面非常形象地刻画了当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 无限趋近于常数 1.

当项数 n 无限增大时，数列 $\{x_n\}$ 无限趋近于某个确定的常数 A，又称当 n 无限增大时（即 $n\to\infty$ 时），数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限. 当项数 n 无限增大时，数列 $\left\{1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$ 以 1 为极限.

下面给出数列极限的精确定义.

定义　设有数列 $\{x_n\}$，A 为常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，都有

$$|x_n-A|<\varepsilon$$

成立，称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty).$$

数列 $\{x_n\}$ 有极限，也称数列**收敛**，否则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

在上述定义中，正数 ε 可以“任意给定”是很重要的，因为只有这样，不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 才能表达出“x_n 与 A 无限接近”. 还应注意到：定义中的正整数 N 是与任意给定的正数 ε 有关，它会随着 ε 的给定而确定，但不是唯一的.

如例 2 中，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$；例 4 中，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；例 5 中，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]=1$.

并不是任何数列都有极限. 如例 1 中，数列 $\{x_n\}=\{n^2\}$，当 $n\to\infty$ 时，x_n 不可能无限趋近于某个确定的常数，所以数列发散；例 3 中，数列 $\{x_n\}=\left\{\frac{(-1)^n+1}{2}\right\}$，当 $n\to\infty$ 时，x_n 不是趋向于一个确定的常数，所以数列发散.

例 6　利用定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (0<|q|<1)$.

证　(1) 对于任意给定的正数 ε，欲使

$$\left|\frac{2n+1}{3n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon,$$

由于

$$\left|\frac{2n+1}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3n},$$

只需

$$\frac{1}{3n}<\varepsilon，即\ n>\frac{1}{3\varepsilon},$$

因此，可取 $N=\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]+1$. 则当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{2n+1}{3n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$$

成立，所以，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\frac{2n+1}{3n}\right\}$ 以 $\frac{2}{3}$ 为极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}.$$

(2)对于任意给定的正数 ε(设 $\varepsilon<1$)，欲使

$$|q^n-0|<\varepsilon,$$

由于

$$|q^n-0|=|q|^n,$$

只需

$$|q|^n<\varepsilon,$$

取自然对数，解得

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

因此，可取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]+1$. 则当 $n>N$ 时，恒有

$$|q^n-0|<\varepsilon$$

成立，所以，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{q^n\}$ 以 0 为极限，即

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0(0<|q|<1).$$

读者可自行证明 $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$($c$ 为常数)，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

1.2.2 收敛数列的性质

首先说明数列极限定义的几何意义.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，根据定义中的不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 可知，$A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon$. 由此可以看出，数列 $\{x_n\}$ 中从第 $n+1$ 项起之后的一切项

$$x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3},\cdots$$

所表示的点，都落在邻域 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 内，在邻域外最多只有有限个点

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n.$$

因此，如果数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限，那么数列各项 x_n 所表示的点几乎全部密集在以点 A 为中心的任意小的邻域内. 由此可知，如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，那么数列各项 x_n 所表示的点必全部落在一个有限区间内，这个区间既包含点 A 的 ε 邻域，也包含有限个点 x_1，$x_2,x_3,\cdots,x_n$ 在内. 换言之，数列 $\{x_n\}$ 有界. 由此，可得下列结论：

定理 1(收敛数列的有界性)　收敛数列$\{x_n\}$必定有界.

由收敛数列的有界性可以推得:无界数列一定是发散的,也就是说,它的极限不存在.但应注意,有界的数列不一定收敛.例如,数列

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}(\text{当 } n \text{ 为奇数时}),\\ 1(\text{当 } n \text{ 为偶数时})\end{cases}(n=1,2,3,\cdots)$$

显然有界,对数列的所有的项 x_n,恒有$|x_n|\leqslant 1$.但是它的极限不存在,因为当项数$n=2k-1\to\infty$时(k 取正整数),数列的奇数项 $x_n\to 0$,而当项数 $n=2k\to\infty$时(k 取正整数),数列的偶数项 $x_n\to 1$.可知此数列是发散的,且有以下结论:

定理 2(极限的唯一性)　若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限唯一.

证　(用反证法)　假设数列$\{x_n\}$收敛,但极限不唯一.不妨设 $x_n\to A$,$x_n\to B$,且$A>B$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,取 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}$,必存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,不等式

$$|x_n-A|<\frac{A-B}{2},$$

即

$$A-\frac{A-B}{2}<x_n<A+\frac{A-B}{2}.$$

从而有

$$x_n>\frac{A+B}{2}. \tag{1}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$,取 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}$,必存在正整数 N_2,当 $n>N_2$ 时,不等式

$$|x_n-B|<\frac{A-B}{2},$$

即

$$B-\frac{A-B}{2}<x_n<B+\frac{A-B}{2}.$$

从而有

$$x_n<\frac{A+B}{2}. \tag{2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$(即取 N_1,N_2 中最大者),当 $n>N$ 时,(1)式和(2)式都成立.(1)式和(2)式显然是矛盾的,假设不成立.因此收敛数列的极限必唯一.

定理 3(收敛数列的保号性)　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在正整数 N,当$n>N$ 时,都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

证　因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,设 $A>0$,由数列极限的定义,对 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}$,存在正整数 N,当 $n>N$时,有

$$|x_n-A|<\frac{A}{2},$$

即

$$A-\frac{A}{2}<x_n<A+\frac{A}{2},$$

从而

$$x_n>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$

推论 若数列$\{x_n\}$从某项起有 $x_n\geqslant 0$(或 $x_n\leqslant 0$),且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

1.2.3 数列极限的运算

下面讨论数列极限的运算法则.

定理 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$,则

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A\pm B$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A\cdot B$.

推论 $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n=c\lim\limits_{n\to\infty} x_n=cA$($c$ 为常数);

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^k=(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^k=A^k$($k$ 为正整数).

(3)若 $B\neq 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}=\dfrac{A}{B}$.

证 只证(1)中和的情况.

因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$,所以对于任意给定的正数 ε,存在正整数 N_1,使得当$n>N_1$ 时,有

$$|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2};$$

同时,存在正整数 N_2,使得当 $n>N_2$ 时,有

$$|y_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时,上述两个不等式同时成立,因此有

$$\begin{aligned}|(x_n+y_n)-(A+B)|&=|(x_n-A)+(y_n-B)|\\&\leqslant|x_n-A|+|y_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

成立,即

$$|(x_n+y_n)-(A+B)|<\varepsilon.$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=A+B=\lim_{n\to\infty} x_n+\lim_{n\to\infty} y_n.$$

相似地可以证明其他几个结论.

定理中的(1)、(2)可推广到有限个函数的情形.例如,如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$,$\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ 都存在,则有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n\pm z_n)=\lim_{n\to\infty} x_n\pm\lim_{n\to\infty} y_n\pm\lim_{n\to\infty} z_n,$$

且推论$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^k)=(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^k$ 中,当 k 为正有理数时也成立.

例 7　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

解　用拆项法，注意到

$$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2},\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\text{于是有}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1.\end{aligned}$$

例 8　求下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n^2}$；　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{1+2n^2}$；　(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解　(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}=0+0=0.$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{1+2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+2}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}2}=\dfrac{3-0+0}{0+2}=\dfrac{3}{2}.$

(3)应先用等差数列前 n 项求和公式，化简后再求极限：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

一般地，当 $a_0\neq0,b_0\neq0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_l}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},k=l,\\0,k<l.\end{cases}$$

1.2.4　数列极限存在的准则

下面给出数列极限存在的准则，这是判断一些数列极限存在的有效方法.

准则 1(夹逼准则)　设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足条件：

(1)$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，

则数列$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

证　因为$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，对于任意给定的正数 ε，总存在一个正整数 N_1，使得当 $n>N_1$ 时，都有

$$|y_n-A|<\varepsilon,$$

即

$$A-\varepsilon<y_n<A+\varepsilon. \tag{1}$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，对于任意给定的正数 ε，总存在一个正整数 N_2，使得当 $n>N_2$ 时，都有

$$|z_n-A|<\varepsilon,$$

即

$$A-\varepsilon<z_n<A+\varepsilon. \tag{2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，使得(1)、(2)式同时成立，综合(1)、(2)式，有

$$A-\varepsilon<y_n\leqslant x_n\leqslant z_n<A+\varepsilon,$$

即

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

所以数列$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

例 9 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

根据准则 1，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

对于数列$\{x_n\}$，若有

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

则称数列$\{x_n\}$是**单调增加**的；若有

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$

则称数列$\{x_n\}$是**单调减少**的. 单调增加或单调减少的数列统称为**单调数列**. 例如，数列$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$单调增加，数列$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$单调减少.

定义 对于数列$\{x_n\}$，若存在正数 M，使得对于一切 n 都有

$$|x_n|\leqslant M,$$

则称数列$\{x_n\}$是**有界**的，M 是该数列的一个上界. 如果上述的正数 M 不存在，即无论正数 M 多么大，都有这样的正整数 m 存在，使得

$$|x_m|>M,$$

则称数列$\{x_n\}$**无界**.

准则 2(单调有界准则) 单调有界必有极限.

严格地说，单调增数列上有界或单调减数列下有界必有极限. 定理的证明较复杂，故从略. 但从几何直观来看(图 1－18)，这个定理的正确性是不言而喻的. 由于数列是单调的，因此它的各项所对应的点随着项数 n 的增大在数轴上朝着一个方向移动. 这种移动只有两种可能，一种可能是无限远移，因为数列是有界的，所以这种可能性不存在；另外一种可能，即无限接近一个定点 A 而又不能越过 A，换言之，A 就是数列的极限.

(a) 单调增上有界　　(b) 单调减下有界

图 1－18

例 10　设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，证明数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛.

证　首先，证明数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增加的. 按二项式展开公式，有

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

类似地，有

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

比较 x_n 与 x_{n+1} 中相同位置的项，可见第一项、第二项相同，从第三项起到第 $n+1$ 项，x_{n+1} 的每一项都大于 x_n 的对应项，并且在 x_{n+1} 中还多了一个正项，所以有

$$x_n<x_{n+1},$$

即数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增加的.

其次，证明数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 有界. 因为 $1-\dfrac{1}{n},1-\dfrac{2}{n},\cdots,1-\dfrac{n-1}{n}$ 各因子都小于 1，故

$$x_n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

根据单调有界准则，数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$收敛，将其极限记作 e，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

可以证明 e 是无理数，

$$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots.$$

习题 1.2

A 组

1. 观察下列数列的变化趋势，若有极限，请指出极限值.

(1)$x_n=\frac{n+2}{n+1}$；　(2)$x_n=(-1)^n\frac{1}{n^2}$；

(3)$x_n=\sin\frac{n\pi}{2}$；　(4)$x_n=1+\frac{1}{10^n}$.

2. 根据数列极限的定义证明下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+(-1)^n\frac{1}{n}\right]=1$；　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=1$；　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n^2}{n}=0$.

3. 求下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)$；　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n}$；

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$；　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$；

(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+5n-2}$；　(6)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{1-n^2}$；

(7)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^3+1}}{\sqrt{n}-n}$；

(8)$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}\right]$.

B 组

1. 观察下列数列的变化趋势，若有极限，请指出极限值.

(1)$x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$；　(2)$x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$.

2. 根据数列极限的定义证明下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}=0$；　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+3n}=\frac{1}{2}$.

3. 求下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$；　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n+1}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{10}(2n+1)^{20}}{(2n-1)^{30}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-5n})$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n+1}-n^2)(n+2)$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times6}+\dfrac{1}{6\times11}+\dfrac{1}{11\times16}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}\right]$.

1.3　函数的极限

数列 $x_n=f(n)$，$n\in N^*$ 是整标函数，自变量 n 只能取正整数而无限增大($n\to\infty$). 对于一般函数 $y=f(x)$，由于自变量 x 可取任意实数，故可分几种变化过程进行讨论.

1.3.1　函数极限的定义

1. 当自变量趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 的极限

连续变量趋于无穷大有以下三种情况：

$x\to+\infty$，即表示 x 沿着 x 轴的正半轴趋于正无穷大；

$x\to-\infty$，即表示 x 沿着 x 轴的负半轴趋于负无穷大；

$x\to\infty$，即 $|x|\to\infty$，表示 x 沿着 x 轴的任何方向趋于无穷大.

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>a(a>0)$ 时有定义. A 为常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 $M>a$，使得当 $|x|>M$ 时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty).$$

上述极限的几何意义是：对于任意给定的正数 ε(无论它多么小)，总可以找到一个正数 M，当 x 满足条件 $x<-M$ 或 $x>M$ 时，曲线 $y=f(x)$ 介于两条水平直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 之间，如图 1-19 所示.

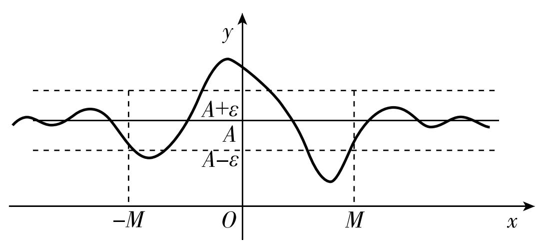


图 1-19

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则称直线 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

注意　$x\to\infty$ 表示 x 既取正值而无限增大(记为 $x\to+\infty$)，同时也取负值而绝对值无限增大(记为 $x\to-\infty$).

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有定义. A 为常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 $M>a$，使得当 $x>M$ 时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to+\infty).$$

类似地，可给出 $x\to-\infty$ 时函数极限的定义.

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 内有定义. A 为常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 $M>a$，使得当 $x<-M$ 时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to-\infty).$$

由上述定义可知如下结论：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

例 1　用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$.

证　当 $x\neq0$ 时，函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 有定义，对于任意给定的正数 ε，欲使

$$\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon,$$

成立，只需 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可. 故取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$，当 $|x|>M$ 时，便有

$$\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1.$$

如图 1-20 所示，易知直线 $y=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 的水平渐近线.

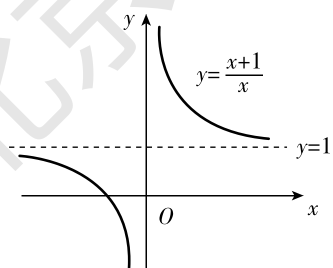


图 1-20

请读者仿例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}C=C$；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

2. 当自变量趋于定值 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限

自变量趋于定值 x_0，记作 $x\to x_0$. 当 $x\to x_0$ 时，考虑函数 $f(x)$ 的极限，首先要求函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义.

定义 1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. A 为常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0).$$

由上述定义可知，极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$是否存在与函数 $f(x)$在点 x_0 有无定义以及在有定义时其函数值 $f(x_0)$是否等于极限值都毫无关系.

例 2　用极限定义证明下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to x_0} C=C$；　　(2)$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$；

(3)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=3$.

证　(1)对于任意给定的正数 ε，取任意一个正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有

$$|f(x)-C|=|C-C|<\varepsilon$$

成立，从而

$$\lim_{x\to x_0} C=C.$$

(2)对于任意给定的正数 ε，欲使

$$|x-x_0|<\varepsilon,$$

只需取正数 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有

$$|x-x_0|<\varepsilon$$

成立，从而

$$\lim_{x\to x_0} x=x_0.$$

(3)当 $x\neq 1$ 时，$\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1}=2x+1$.

对于任意给定的正数 ε，欲使

$$\left|\frac{2x^2-x-1}{x-1}-3\right|=|(2x+1)-3|=2|x-1|<\varepsilon,$$

只需取正数 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，总有

$$\left|\frac{2x^2-x-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$$

成立，从而

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=3.$$

应注意，函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$在 $x=1$ 处无定义，但不影响 $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$当 $x\to 1$时有极限值为 3.

上述 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限概念中，x 是既从 x_0 的左侧又从 x_0 的右侧无限趋于 x_0 的. 但有时只需考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋近于 x_0(记作 $x\to x_0^-$)的情形，或 x 仅从 x_0 的右侧趋近于 x_0(记作 $x\to x_0^+$)的情形，从而引入左极限和右极限的概念.

定义 2　设函数 $f(x)$在点 x_0 的(a,x_0)内有定义. A 为常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $0<x_0-x<\delta$ 时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则 A 称为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的**左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A.$$

定义 3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 (x_0,b) 内有定义. A 为常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则 A 称为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的**右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A.$$

左极限与右极限统称为**单侧极限**.

根据上述定义，可知当 $x\to x_0$ 时，函数的极限与左、右极限有如下关系：

定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

定理表明，即使 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，但若不相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

例 3 函数 $f(x)=\begin{cases}-1, x<0,\\ x, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, x>1,\end{cases}$

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限是否存在？

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限是否存在？

(3) 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的极限是否存在？

解 (1) 根据函数左、右极限的定义，可得

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0,$$

所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限都存在.

(2) 由(1)知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限都存在，但不相等，所以，由定理可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在.

(3) 根据函数左、右极限的定义可得

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 1=1,$$

即

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=1.$$

所以，$f(x)$ 在 $x=1$ 处的极限存在，且有 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

1.3.2 函数极限的性质

函数极限与数列极限有相似的性质. 下面仅对 $x\to x_0$ 的情况进行说明，这些结论也适用于 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 的情况.

定理 1(极限的局部有界性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在常数 $M>0$ 及 $\delta>0$，当 $0<$

$|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

这种情况，称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时有界.

定理 2（极限的唯一性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则极限是唯一的.

定理 3（极限的局部保号性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在 x_0 的某去心邻域内有 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

习题 1.3

A 组

1. 下列结论是否正确？试说明理由.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x_0)$ 有意义；

(2) 如果 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$，那么 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在；

(3) 函数在一点附近有界是函数在该点有极限的充要条件；

(4) 设当 $x\neq x_0$ 时，$f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A>0$；

(5) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)g(x)$ 一定不存在；

(6) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 一定存在.

2. 用函数极限定义证明下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{x}=1$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

3. 求函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限，并指出当 $x\to 0$ 时，函数的极限是否存在.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\leqslant 1,\\ -1, x>1,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 在 $x\to 1$ 时的左、右极限，并说明 $f(x)$ 在 $x\to 1$ 时的极限是否存在.

B 组

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1, x<0,\\ 0, x=0,\\ x, x>0,\end{cases}$ 画出它的图像，求当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的左、右极限，并说明在

$x\to 0$时 $f(x)$的极限是否存在.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$,画出它的图像,求当 $x\to 1$ 时 $f(x)$的左、右极限,并说明在 $x\to 1$ 时函数的极限是否存在.

1.4 无穷小量与无穷大量

1.4.1 无穷小量

为方便起见,后面讨论的一般性结论中,若记号"lim"下面没有标明自变量的变化过程,则表示所述结果对函数极限而言,当 $x\to x_0$, $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ 时都适用. 对数列极限而言,当 $n\to\infty$时也适用.

定义 在自变量的某一变化过程中,若有极限$\lim f(x)=0$,则称 $f(x)$是该自变量变化过程中的**无穷小量**,简称无穷小. 无穷小常用希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$表示.

例如,因为$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,所以当 $x\to 1$ 时函数 $f(x)=x-1$ 是无穷小;因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,所以当 $x\to\infty$时函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$是无穷小;因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n^2+1}=0$,所以当 $n\to\infty$时数列$\left\{\dfrac{n-1}{n^2+1}\right\}$是无穷小.

注意 (1)无穷小是相对于自变量的某一变化过程而言的. 说某个函数(或数列)是无穷小时,必须指明自变量的变化过程. 例如,当 $x\to\infty$时,$\dfrac{1}{x}$是无穷小;而当 $x\to 1$ 时,$\dfrac{1}{x}$就不是无穷小了.

(2)无穷小是自变量的某一变化过程中,以 0 为极限的变量,不能理解为是一个绝对值很小的常数. 0 是唯一可以看作无穷小的常数.

在自变量的同一变化过程中,无穷小有以下性质:

(1)有限个无穷小的代数和是无穷小.

(2)有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 常量与无穷小的乘积是无穷小.

(3)有限个无穷小的乘积是无穷小.

注意 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小,如当 $n\to\infty$时,$\dfrac{1}{n^2},\dfrac{2}{n^2},\cdots,\dfrac{n}{n^2}$均为无穷小,但

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 1 证明$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

证　因为$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即$\sin\frac{1}{x}$是有界函数. 而$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，即当$x\to 0$时$x$是无穷小. 根据性质 2 可知，当$x\to 0$时$x\sin\frac{1}{x}$是无穷小. 即

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

无穷小与函数极限之间存在如下关系：

定理　在自变量的同一变化过程中，函数$f(x)$有极限A的充分必要条件是$f(x)$能表示为常数A与一个无穷小之和. 即

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)，\text{其中 }\alpha(x)\text{是无穷小}.$$

证　必要性　设在自变量的某一变化过程中，$\lim f(x)=A$，$\alpha(x)=f(x)-A$，则有

$$\lim\alpha(x)=\lim[f(x)-A]=A-A=0.$$

即在自变量的该变化过程中，$\alpha(x)$为无穷小. 显然有

$$f(x)=A+\alpha(x).$$

充分性　设在自变量的某一变化过程中，$f(x)=A+\alpha(x)$且$\lim\alpha(x)=0$，则有

$$\lim f(x)=\lim[A+\alpha(x)]=A+0=A.$$

这个定理常称为极限基本定理，它有着广泛的应用.

1.4.2　无穷大量

定义　设函数$f(x)$在自变量的某一变化过程中，如果对于任意给定的正数M，总存在一个时刻，在这个时刻以后，都有

$$|f(x)|>M$$

成立，则称函数$f(x)$在自变量的该变化过程中为**无穷大量**，简称无穷大. 记作

$$\lim f(x)=\infty\text{或 }f(x)\to\infty(\text{当 }x\to x_0\text{ 或当 }x\to\infty).$$

若将定义中的$|f(x)|>M$改为$f(x)>M$(或$f(x)<-M$)，则称$f(x)$在自变量的该变化过程中为**正无穷大量(或负无穷大量)**，并且相应地记为

$$\lim f(x)=+\infty(\text{或}\lim f(x)=-\infty).$$

注意　(1)$f(x)$是无穷大，表明在自变量的某一变化过程中$f(x)$的极限是不存在的. 这里“$\lim f(x)=\infty$”只是借用了极限记号，以便于表述“函数$f(x)$的绝对值无限增大”的性态.

(2)不要把无穷大与无界函数混为一谈. 无穷大必定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大.

(3)无穷大与自变量的某一变化过程有关. 若当$x\to x_0$时，$f(x)$是无穷大，就是说$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有定义，对于任意给定的正数M，总存在一个正数δ，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)|>M$成立.

(3)无穷大是绝对值无限增大的变量，不能将其与很大的常数相混淆.

若当$x\to x_0$时$f(x)$是无穷大，则直线$x=x_0$称为曲线$y=f(x)$的**铅直渐近线**.

例 2　证明$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty$.

证 对于任意给定的正数 M,要使 $\left|\dfrac{1}{x-2}\right|>M$,只需取 $0<|x-2|<\dfrac{1}{M}$. 因此取 $\delta=\dfrac{1}{M}$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{1}{x-2}\right|>\frac{1}{\delta}=M$$

成立,所以有

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty.$$

直线 $x=2$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x-2}$ 的铅直渐近线.

由无穷小与无穷大的定义不难理解无穷小与无穷大之间的关系：

定理 在自变量同一变化过程中,若 $f(x)$ 是无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小;若 $f(x)$ 是无穷小且 $f(x)\neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$,即 $x\to 1$ 时 $1-x$ 为无穷小,

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}=\infty$.

例 4 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在吗？若存在,求出其值;若不存在,说明理由.

(1) $f(x)=\arctan x$; (2) $f(x)=\sin x$.

解 (1)由 $y=\arctan x$ 的图形性质知

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

(2)由于 $y=\sin x$ 是周期函数,当 $x\to\infty$ 时,$y=\sin x$ 的值在 -1 与 1 之间变动无限次,即在 -1 与 1 之间无限次振荡,不趋近于任何确定常数,所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 都不存在.

1.4.3 无穷小的比较

前面讨论了两个无穷小的和、差、积仍然是无穷小,但两个无穷小的商不一定还是无穷小.

例如,当 $x\to 0$ 时,可以证明 x^2, $2x$, $\sqrt[3]{x}$ 都是无穷小;当 $n\to\infty$ 时,$\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1$, $\dfrac{1}{2n}$ 都是无穷小. 可是

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{2n}}=1.$$

上面四个式子说明无穷小的商不一定是无穷小，这反映了当 $x\to0$ 时，x^2，$2x$，$\sqrt[3]{x}$ 和当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1$，$\frac{1}{2n}$ 都是无穷小，但它们趋于零的速度有所不同，形象地说，趋于零的速度有快有慢. 为了区分两个无穷小之间的不同之处，给出如下定义来进行两个无穷小之间的比较.

定义　设 $\alpha=\alpha(x)$、$\beta=\beta(x)$ 是自变量在同一变化过程（$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$）中的两个无穷小.

(1) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

(2) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

(3) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小；

(4) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

由定义可知，当 $x\to0$ 时，x^2 是比 x 高阶的无穷小（也称 x 是比 x^2 低阶的无穷小）；当 $x\to0$ 时，$2x$ 与 x 是同阶无穷小；当 $x\to0$ 时，$\sqrt[3]{x}$ 是比 x 低阶的无穷小.

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{2n}$ 与 $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1$ 同为无穷小，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\frac{1}{2n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=1,$$

所以当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{2n}$ 与 $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1$ 为等价无穷小，即

$$\frac{1}{2n}\sim\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\ (n\to\infty).$$

习题 1.4

1. 观察函数图像，指出下列变量在 x 的何种变化趋势下是无穷小.

(1) $y=2^x-1$；　　(2) $y=\ln(x-1)$.

2. 观察函数图像，指出下列变量在 x 的何种变化趋势下是无穷大.

(1) $y=\ln(1-x)$；　　(2) $y=\tan x$.

1.5　极限的运算

1.5.1　极限的运算法则

与数列极限的四则运算法则相似，下面给出函数极限的四则运算法则. 为方便起见，后面讨论的一般性结论中，若记号“lim”下面没有标明自变量的变化过程，则表示所述结

果对函数极限而言,当 $x\to x_0$,$x\to x_0^-$,$x\to x_0^+$,$x\to\infty$,$x\to-\infty$,$x\to+\infty$都适用.

定理 如果$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

(2)$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

推论 ①$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)=cA$($c$ 为常数);

②$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$($n$ 为正整数).

(3)若 $B\neq 0$,$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

注意 (i)上述法则只有各项极限存在(对商,还要分母极限不为零)才能适用.

(ii)定理中的(1)、(2)可推广到有限个函数的情形. 例如,如果$\lim f(x)$,$\lim g(x)$,$\lim h(x)$都存在,则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)\pm h(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)\pm\lim h(x).$$

证 (1)因$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,由极限基本定理可知

$$f(x)=A+\alpha,g(x)=B+\beta(\text{其中},\alpha,\beta\text{ 均为无穷小}),$$

于是

$$f(x)\pm g(x)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta).$$

因为 α,β 均为无穷小,根据无穷小的性质,可知 $\alpha\pm\beta$ 也为无穷小,所以

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x).$$

(2)因$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,由极限基本定理可知

$$f(x)=A+\alpha,g(x)=B+\beta(\text{其中},\alpha,\beta\text{ 均为无穷小}),$$

于是

$$f(x)\cdot g(x)=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+(A\beta+B\alpha+\alpha\beta).$$

因为 A,B 均为常数,α,β 均为无穷小,根据无穷小的性质,可知 $A\beta+B\alpha+\alpha\beta$ 也为无穷小,所以

$$\begin{aligned}\lim[f(x)\cdot g(x)]&=\lim[(A+\alpha)(B+\beta)]\\&=\lim[AB+(A\beta+B\alpha+\alpha\beta)]\\&=AB+\lim(A\beta+B\alpha+\alpha\beta)\\&=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x).\end{aligned}$$

(2)的推论(i)、(ii),(3)证明从略.

例 1 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+4x-1}{4x-1}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to1}(4x-1)=4\lim\limits_{x\to1}x-\lim\limits_{x\to1}1=4-1=3\neq0$,

所以 $$\lim_{x\to1}\frac{3x^2+4x-1}{4x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(3x^2+4x-1)}{\lim\limits_{x\to1}(4x-1)}=\frac{3(\lim\limits_{x\to1}x)^2+4\lim\limits_{x\to1}x-\lim\limits_{x\to1}1}{4\lim\limits_{x\to1}x-\lim\limits_{x\to1}1}=2.$$

一般地,当有理分式(分子、分母都是多项式的分式)的分母极限不为零时,有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)},Q(x_0)\neq0.$$

例 2 求$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

分析 当 $x\to3$ 时,分子与分母的极限都为 0,不能直接用商的极限法则. 因为分子与

分母有公因子$(x-3)$，而$x\to3$时，$x\neq3$，$x-3\neq0$，故可约去非零因子$(x-3)$.

解　$\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$.

例 3　求$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

分析　当$x\to1$时，两个分式的分母的极限均为 0，这两项的极限均不存在，不能直接用极限的四则运算法则，可先通分化成一个分式，约去非零因子$(x-1)$，再求极限.

解　$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(1+x)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+2}{1+x}=\frac{3}{2}$.

例 4　求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+3x+1}$.

分析　当$x\to\infty$时，分子、分母极限都为无穷大，不能直接用极限法则，可先将分子、分母同时除以x^2，然后再求极限.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$.

例 5　求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-2}{2x^3-x+1}$.

分析　当$x\to\infty$时，分子、分母极限都为无穷大，不能直接用极限法则，可先将分子、分母同时除以x^3，然后再求极限.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-2}{2x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=0$.

例 6　求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x}{x^2+x-2}$.

解　因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{2x^3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}}=0,$$

根据无穷小与无穷大的关系，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x}{x^2+x-2}=\infty.$$

一般地，当$a_0\neq0$，$b_0\neq0$时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, m=n,\\ 0, m<n,\\ \infty, m>n,\end{cases}\text{其中，}m,n\text{ 为正整数.}$$

1.5.2　复合函数的极限

定理　设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$且在$x_0$的某去心邻域内$\varphi(x)\neq u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$当$x\to x_0$时极限存在，并且

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = A.$$

证　由于$\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 η，使得当 $0 < |u - u_0| < \eta$ 时，都有

$$|f(u) - A| < \varepsilon$$

成立.

又因为$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$，于是对上述的正数 η，存在着正数 δ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$0 < |\varphi(x) - u_0| = |u - u_0| < \eta.$$

综合上述步骤，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $0 < |u - u_0| < \eta$，从而有

$$|f[\varphi(x)] - A| = |f(u) - A| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = A.$$

上式的另一种等价写法是

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

这表明在上述定理的条件下，如果做变量代换 $u = \varphi(x)$，则求极限$\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)]$就变为求极限$\lim\limits_{u \to u_0} f(u)$. 这给用变量代换法求极限提供了理论依据.

定理中，把 $x \to x_0$ 换为 $x \to \infty$，相应的结论仍然成立.

1.5.3　函数极限的存在准则

现在，我们将数列极限存在的准则推广到函数极限的情况.

准则 1（夹逼准则）　设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，且满足条件：

(1) $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，

则极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，且等于 A.

准则 2（单调有界准则）　若 $f(x)$ 是区间 (a, b) 内的单调有界函数，则 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ 存在.

准则 2 中的区间 (a, b) 也可为 $(-\infty, b)$ 或 $(a, +\infty)$，相应的结论仍然成立.

例 7　用夹逼定理证明$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

证　因为$-1 \leqslant \sin \dfrac{1}{x} \leqslant 1$，有

$$-|x| \leqslant x \sin \frac{1}{x} \leqslant |x| \text{（图 1-21）}.$$

因为$\lim\limits_{x \to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x \to 0}|x| = 0$，由夹逼定理，有

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

注意　因为$\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$不存在，所以解法$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x} = 0$ 是错误的.

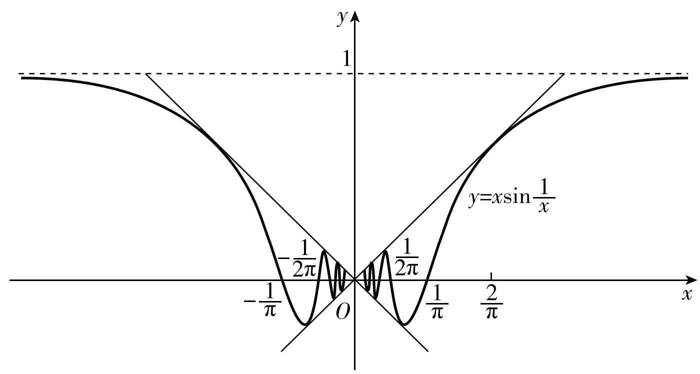


图 1－21

1.5.4　两个重要极限

1. 重要极限 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

函数$\frac{\sin x}{x}$的定义域为 $x\neq 0$，当 $x\to 0$ 时，其分母的极限是 0，因此不能用函数商的极限运算法则进行运算，故用函数极限的存在准则 1 证明.

作单位圆(图 1－22)，设圆心角$\angle BOC=x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，过点 B 作圆的切线与 OC 的延长线交于点 A，又作 $CD\perp OB$，则有 $\sin x=CD$，$\tan x=AB$.

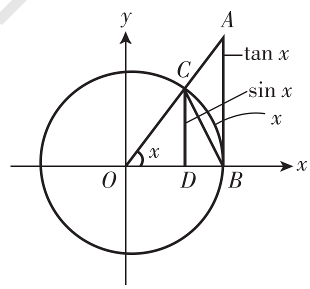


图 1－22

因为△BOC 的面积<圆扇形 BOC 的面积<△AOB 的面积，所以

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

即

$$0<\sin x<x<\tan x.$$

由夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，又由于 $0<1-\cos x=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{x^2}{2}$，即 $0<1-\cos x<\frac{x^2}{2}$，再由夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

当$-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，有 $0<-x<\frac{\pi}{2}$，则有

$$\sin(-x)<-x<\tan(-x),$$

即

$$-\sin x<-x<-\tan x.$$

当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$时，有

$$|\sin x|<|x|<|\tan x|.$$

上述不等式各端同除以$|\sin x|$，得

$$1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\left|\frac{\tan x}{\sin x}\right|,$$

即

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

从而有

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

所以再根据夹逼准则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例 8 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

例 9 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{1}{3}.$

例 10 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}.$

在具体应用中，重要极限 1 可有如下更一般的结论：

若 $x\to x_0$ 或∞时，函数 $f(x)\to 0$，则$\lim\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$.

2. 重要极限 2

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

在 1.2.4 数列极限存在的准则中，已经证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

其中，e=2.718 281 828 459 045….

可以证明 $x\to\infty$(包含 $x\to-\infty$或 $x\to+\infty$)时，函数$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$的极限都存在，且都等于无理数 e，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

表 1-2 是 $x\to\infty$时，函数$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$的值的变化趋势.

表 1-2

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	2.593 74	2.704 81	2.716 92	2.718 15	2.718 27	…

x	−10	−100	−1 000	−10 000	−100 000	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.867 97	2.732 00	2.719 64	2.718 42	2.718 30	…

观察上表可知，当 $x\to\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的值无限趋近于无理数 e.

在上式中，令 $\frac{1}{x}=t$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to0$，从而有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e},$$

即

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

例 11　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2.$

另解　令 $t=\frac{2}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^2=[\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}]^2=\mathrm{e}^2.$$

例 12　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$

另解　令 $t=-\frac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{-1}=[\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}.$$

例 13　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$.

解　因为 $\frac{x+3}{x-2}=1+\dfrac{1}{\frac{x-2}{5}}$，令 $u=\frac{x-2}{5}$，则 $x=5u+2$，当 $x\to\infty$ 时，$u\to\infty$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{5}}\right)^x=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^5\cdot\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^2=\mathrm{e}^5\cdot1^2=\mathrm{e}^5.$$

另解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}\right)^x=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x}=\dfrac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^{-2}}=\mathrm{e}^5.$

在具体应用中，重要极限 2 有更一般的结论：

(1)若 $x\to x_0$ 或∞时，函数 $f(x)\to\infty$，则$\lim\left[1+\dfrac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=\mathrm{e}$；

(2)若 $x\to x_0$ 或∞时，函数 $f(x)\neq 0\to 0$，则$\lim[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$.

1.5.5 用等价无穷小计算极限

关于等价无穷小，有如下定理.

定理 如果在自变量的同一变化过程中，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在，则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

证 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\left(\dfrac{\alpha}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\beta}\right)=\lim\dfrac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}\cdot\lim\dfrac{\beta'}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}.$

定理表明，求两个无穷小之比的极限时，分子和分母可用它们的等价无穷小之比来代替，从而简化极限的计算.

下面是常用的几个等价无穷小(以后可以得到说明)，要牢牢记住.

当 $x\to 0$ 时，有

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\mathrm{e}^x-1\sim x,\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x.$$

例 14 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 5x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\sin 2x\sim 2x$，$\tan 5x\sim 5x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

例 15 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}.$$

注意 对乘积或商中的无穷小可用等价无穷小来代替，在加、减运算中不可随意用等价无穷小代换，否则将会出错.

习题 1.5

A 组

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3-3x^2+2)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+4}{2x+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-2}$；　(4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(6) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$；

(9 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；　(10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a 和 b 的值.

3. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{2(x+1)^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^3-2x+5}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2}{3x+1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)^{20}(3x+1)^{30}}{(3x-1)^{50}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2-1}-x)$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+1}-x^2)$.

4. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\cot 2x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x(x+2)}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x-2\sin x}$；　(10) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$.

5. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\tan x)^{\cot x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x}$.

6. 利用等价无穷小代换求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^3 x}-1}{x(1-\cos x)}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{x\tan^3 x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(1+x^2)\tan^2 x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{e^{2\sin x}-1}$.

B 组

1. 若极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+a}{x-2}=3$，试确定常数 a 的值.

2. 若极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，试确定常数 a,b 的值.

3. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$，试确定 a,b 的值.

4. 计算.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\arcsin\dfrac{1}{x}}{\sin^3\dfrac{1}{x}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$. $\left[\text{提示：}1-\dfrac{1}{x^2}=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

5. 证明：当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x\sim\ln(1+x)$.

6. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}$.

7. 设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

1.6　函数的连续性

自然界中有许多现象，如汽车的位移或速度，人的身高与体重，物体冷却过程中的温度，植物的生长等，都是随着时间连续地变化着的. 自然界中各种物态的连续变化反映到函数关系上，就是函数的连续性.

1.6.1　函数增量的概念

为了建立连续性定义，首先引入增量概念.

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 某邻域内有定义，当自变量从初值 x_0 变到终值 x，对应的函数值由 $f(x_0)$ 变化到 $f(x)$，则 $x-x_0$ 称为**自变量的增量**，$f(x)-f(x_0)$ 称为**函数的增量**. 自变量的增量与函数的增量分别记作 Δx 与 Δy，即

$$\Delta x=x-x_0,$$
$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

注意　增量可以为正值，也可以为负值. 当初值大于终值时，增量就是负值；当初值

小于终值时，增量就是正值.

例 1　设正方形的边长为 x，当边长增加了 Δx 时，问：

(1)面积 y 相应的增量 Δy 是多少？

(2)当 x 由 10 cm 变化到 10.1 cm 时，面积改变了多少？

(3)当 x 由 10 cm 变化到 9.9 cm 时，面积改变了多少？

解　(1)正方形的边长为 x，正方形的面积为

$$y=x^2.$$

如果正方形的边长由 x 变化到 $x+\Delta x$，则正方形面积的增量为

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

(2)当 x 由 10 cm 变化到 10.1 cm 时，即 $x=10$ cm，$\Delta x=0.1$ cm 时，有

$$\Delta y=2\times 10\times 0.1+0.1^2=2.01(\mathrm{cm}^2).$$

因为 $\Delta y>0$，所以正方形的面积增加了 2.01 cm^2.

(3)当 x 由 10 cm 变化到 9.9 cm 时，即 $x=10$ cm，$\Delta x=-0.1$ cm 时，有

$$\Delta y=2\times 10\times(-0.1)+(-0.1)^2=-1.99(\mathrm{cm}^2).$$

因为 $\Delta y<0$，所以正方形的面积减少了 1.99 cm^2.

1.6.2　函数的连续性

函数 $y=f(x)$在 x_0 处连续的特征是：当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$[图 1-23(a)]. 函数$y=\varphi(x)$在x_0 处间断的特征是：当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 不趋于零[图 1-23(b)]. 由此给出函数在一点处连续的定义.

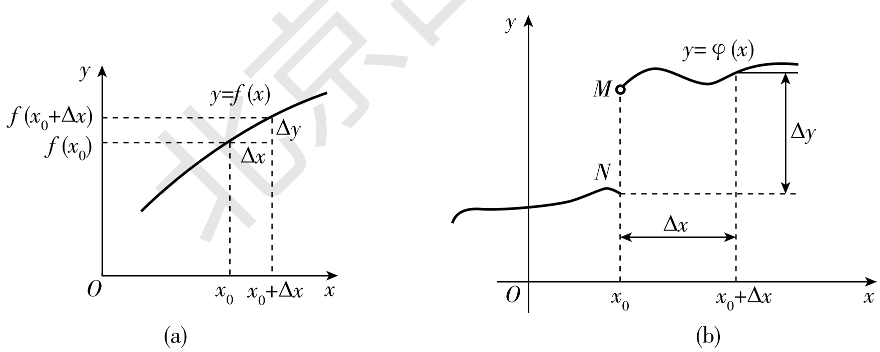


图 1-23

定义 1　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，对应的函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续.

由于 Δy 也可写成 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，$\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$，$\Delta y\to 0$ 就是 $f(x)\to f(x_0)$，于是有如下定义.

定义 2　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续，并称 x_0 是函数 $f(x)$的连续点.

由定义 2 可知，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续，必须同时满足下列三个条件：

(1)函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

(3)上述极限值等于函数值 $f(x_0)$.

只有当这三点都满足时，才可判定函数 $f(x)$ 在 x_0 连续；否则 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续.

例 2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0, \\ 1, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $f(0)=1$，且

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

即

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0),$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其左(或右)邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续. 如果

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

由此可得：

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续，即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\geqslant 1, \\ 3x, x<1,\end{cases}$ 试判断 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处是否连续.

解 因为 $f(1)=2\times 1+1=3$，且有

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 3x=3, \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x+1)=3,$$

即

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=3,$$

所以根据定理可知，函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续.

例 4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, 0<x\leqslant 1, \\ 2-x, 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解 因为 $f(1)=2$，而

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2=f(1), \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2-x)=1\neq f(1),$$

即 $f(x)$在点 $x=1$ 处左连续但不是右连续，所以函数 $f(x)$在点 $x=1$ 处不连续.

如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内的每一点都连续，则称 $f(x)$在开区间(a,b)内连续. 若 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，且在左端点 $x=a$ 处右连续，在右端点 $x=b$ 处左连续，则称 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的几何意义是函数 $y=f(x)$的图形在点$(x_0,f(x_0))$处不间断；函数 $f(x)$在区间(a,b)内连续的几何意义是函数 $y=f(x)$的图形在(a,b)内连续而不间断.

例 5　证明 $y=\sin x$ 是连续函数.

证　函数 $y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 任意取一点 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，给 x_0 以增量 Δx，函数 $y=\sin x$ 相应的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\sin\frac{\Delta x}{2}$是无穷小量，$2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)$是有界函数. 根据无穷小量的性质，可知 Δy 也是无穷小量，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

这就是说，函数 $y=\sin x$ 在点 x_0 处连续，因为 x_0 是定义域$(-\infty,+\infty)$内的任意一点，所以函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续.

也可以表示为$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$，这也表示当 $x\to x_0$ 时，$\sin x$ 存在极限.

同理可知，$y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内也是连续函数，且$\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$，这也表示当 $x\to x_0$ 时，$\cos x$ 存在极限.

1.6.3　函数的间断点及其分类

定义　如果函数 $f(x)$在点 x_0 处不连续，则称为函数 $f(x)$在点 x_0 处间断，点 x_0 称为函数 $f(x)$的**间断点**.

由定义 2 可知，如果函数 $f(x)$在点 x_0 处有下列三种情况之一：

(1)$f(x)$在点 x_0 处没有定义；

(2)$f(x)$虽在点 x_0 处有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3)$f(x)$虽在点 x_0 处有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则点 x_0 就为$f(x)$的间断点.

按照函数 $f(x)$在间断点 x_0 处的左、右极限是否存在，把间断点分为两种类型：

(1)当 $f(x)$在间断点 x_0 的左、右极限都存在时，则称点 x_0 为 $f(x)$的**第一类间断点**. 其中，间断点 x_0 处 $f(x)$的左、右极限相等，即存在极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$的可去间断点；间断点 x_0 处 $f(x)$的左、右极限不相等，则称点 x_0 为跳跃间断点，跳跃间断点为不可去间断点.

(2)不是第一类间断点的其他形式的间断点，统称为**第二类间断点**. 即当 $f(x)$在间断点 x_0 的左、右极限至少有一个不存在时，则称点 x_0 为 $f(x)$的第二类间断点. 第二类间断点为不可去间断点.

例 6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, x\neq 1, \\ 1, x=1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解 因为 $f(1)=1$,而

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2\neq 1,\text{即}\lim_{x\to 1}f(x)\neq f(1).$$

所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

如果在上例中,修改函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的定义,令 $f(1)=2$,则有

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2=f(1),$$

此时 $x=1$ 就变成函数 $f(x)$ 的连续点了.

例 7 讨论函数 $f(x)=\sin x\cdot\cos\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处无定义,所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点. 因为

$$\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\cos\frac{1}{x}=0,$$

所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点.

在点 $x=0$ 处可补充定义函数值,令其函数值等于极限值,$f(0)=0$,即

$$f(x)=\begin{cases} \sin x\cdot\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, x=0. \end{cases}$$

显然,此时函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 8 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x, x\leqslant 0, \\ x+1, x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在,所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续. 因为函数在间断点处有一个跳跃(图 1-24),所以点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点,它是第一类间断点,是不可去间断点.

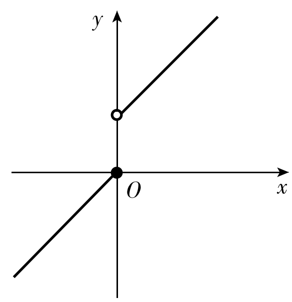


图 1-24

例 9 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在,所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续. 因为函数 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时的极限为无穷大,所以称点 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点(图 1-25),它是第二类间断点,是不可去间断点.

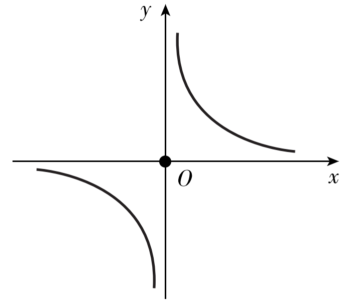


图 1-25

例 10　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin kx}{x}, x<0,\\ 3x^2+1, x\geqslant 0\end{cases}$ $(k\neq 0)$在点 $x=0$ 处连续，求常数 k.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0^-}k\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin kx}{kx}=k,$$

又由于 $f(0)=1$，且 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续，即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，故

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0),$$

所以 $k=1$.

1.6.4　连续函数的运算

1. 连续函数的运算法则

由于函数的连续性是通过极限来定义的，因而由极限的运算法则，可以得到连续函数的运算法则.

定理(四则运算法则)　设函数 $f(x)$，$g(x)$在 x_0 处连续，则

(1)$f(x)\pm g(x)$在 x_0 处连续；

(2)$f(x)\cdot g(x)$在 x_0 处连续；

(3)当 $g(x_0)\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在 x_0 处连续.

定理的(1)、(2)读者可自证. 以下仅就(3)给予证明.

证　(3)设函数 $f(x)$，$g(x)$在 x_0 处连续，且 $g(x_0)\neq 0$. 记 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，根据函数在点 x_0 处连续的定义及商的极限的运算法则，有

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=F(x_0),$$

故根据函数在一点处连续的定义，定理(3)得证.

例如，已知函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是连续的，因为 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$、$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，所以根据函数连续性的运算法则可知，函数 $y=\tan x$、$y=\cot x$ 在它们的定义域内是连续的.

2. 反函数与复合函数的连续性

定理 1(反函数的连续性)　设函数 $y=f(x)$在某区间上连续，且严格单调增加(或严格单调减少)，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$也在对应区间上连续，且严格单调增加(或严格单调减少).

证明从略. 此定理在几何上容易理解，因为函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$的图像关于直线 $y=x$ 对称，所以具有相同的连续性和单调性.

例如，函数 $y=\sin x$ 在闭区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调增加且连续，其反函数 $y=\arcsin x$

在闭区间$[-1,1]$上也是单调增加且连续.

同理可知,反三角函数 $y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 在它们的定义域内都是连续函数.

定理 2(复合函数的连续性) 设函数 $y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处连续,若函数 $u=\varphi(x)$在$x=x_0$ 处连续,有$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 $x=x_0$ 处连续,即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(u_0).$$

此定理的结论还可以写为

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

这表明在此定理的条件下,求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的极限时,极限符号可以与函数符号交换次序.

1.6.5 初等函数的连续性

前面已经证明了三角函数与反三角函数在它们的定义域内是连续的,同样可以证明常量函数、幂函数、指数函数、对数函数在它们的定义域内是连续的.

从而可知,**基本初等函数在它们的定义域内都是连续的**.根据连续函数的运算法则以及连续函数的复合函数的连续性质,不难得到如下重要结论:

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

注意 所谓定义区间,就是包含在定义域内的区间.

根据这个结论,初等函数 $f(x)$在其定义区间内某点 x_0 处的极限,等于函数值$f(x_0)$,即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 11 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1+5\ln(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 因为 2 是初等函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1+5\ln(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$在定义区间$(1,+\infty)$内的点,所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1+5\ln(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2^2+1+5\ln(2-1)}{\sqrt{1+2^2}}=\sqrt{5}.$$

例 12 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln \mathrm{e}=1.$

例 13 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

解 令 $\mathrm{e}^x-1=t$,则 $x=\ln(1+t)$,当 $x\to 0$ 时,$t\to 0$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1.$$

1.6.6 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数有一些十分重要的性质,它们的正确性不难从几何上加以说明.

1. 最值定理

最大值与最小值的概念.

定义　设 $f(x)$在区间 I 内有定义，如果有 $x_0\in I$，使得对于任意一个 $x\in I$，都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\text{（或 }f(x)\geqslant f(x_0)\text{）},$$

则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$在区间 I 内的**最大值(或最小值)**，称点 x_0 为函数 $f(x)$的**最大值点(或最小值点)**. 最大值与最小值统称为**最值**.

定理(最值定理)　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上必有最大值和最小值.

定理 1 表明，若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点 $\xi_1\in[a,b]$及一点 $\xi_2\in[a,b]$，使得对于任意 $x\in[a,b]$，都有

$$f(\xi_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_2),$$

即 $f(\xi_1)$和 $f(\xi_2)$分别是连续函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最小值和最大值(图 1-26).

应当注意定理中“闭区间”和“连续”是函数 $f(x)$有最小值和最大值的两个充分条件. 例如，函数 $y=x$ 在开区间$(0,1)$内连续，但是它无法取得最大值，也无法取得最小值. 函数 $y=\tan x$ 在$[0,\pi]$内的 $x=\dfrac{\pi}{2}$处间断，所以也无法取得最大值和最小值.

推论(有界性定理)　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上**有界**.

这就是说在闭区间上有最值的函数必然是有界函数.

2. 介值定理

定理(介值定理)　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，m 和 M 分别为 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值，则对于介于 m 和 M 之间的任一实数 C，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=C.$$

介值定理的几何意义是闭区间$[a,b]$上连续曲线 $y=f(x)$与直线 $y=C(m<C<M)$至少有一个交点. 如果 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上严格单调，则仅交一点. 例如，在图 1-27 中，连续曲线 $y=f(x)$与直线 $y=C(m<C<M)$交于两点，其横坐标分别为 ξ_1,ξ_2，有

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=C.$$

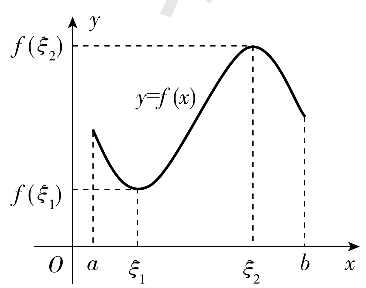


图 1-26

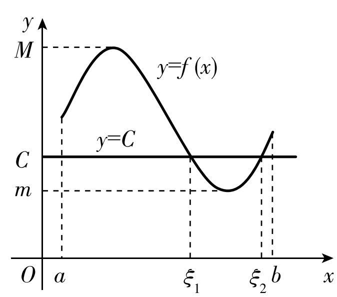


图 1-27

推论(零点定理)　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)=0.\text{（图 1-28）}$$

零点定理也叫根的存在性定理，在实际问题中经常用来确定方程的根的范围.

例 14　证明方程 $x^5-5x-1=0$ 在区间$(1,2)$内至少有一个根.

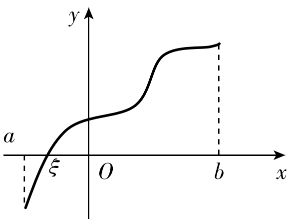


图 1-28

证 设 $f(x)=x^5-5x-1$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续. 因为 $f(1)=-5<0$，$f(2)=21>0$，
所以根据零点定理，在 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $x^5-5x-1=0$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一个根是 $x=\xi$.

例 15 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$，$f(b)>b$. 求证：在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 设 $F(x)=f(x)-x$，由函数的连续性可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F(a)=f(a)-a<0,$$
$$F(b)=f(b)-b>0,$$

根据零点定理，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$，即在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

习题 1.6

A 组

1. 证明函数 $y=\ln x$ 在其定义域内连续.

2. 指出下列函数的间断点，并说明是哪类间断点，是可去间断点的，设法使其变成连续函数.

(1) $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}$； (2) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$；

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x\leqslant 1, \\ x+3, x>1; \end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases} 3+x^2, x<0, \\ \dfrac{\sin 3x}{x}, x>0; \end{cases}$

(5) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$； (6) $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$.

3. 讨论下列函数在点 $x=0$ 处的连续性.

(1) $f(x)=\begin{cases} x-1, x<0, \\ \sqrt{1-x^2}, x\geqslant 0; \end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, x=0; \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, x\neq 0, \\ 1, x=0. \end{cases}$

4. 指出下列函数的连续区间.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$； (2) $f(x)=\ln(9-x^2)$；

(3) $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x+2}+\dfrac{1}{1+x}$； (4) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3, x\leqslant 1, \\ x, 1<x\leqslant 2, \\ 2x-2, x>2. \end{cases}$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ 3x^2-2x+k, & x\geqslant 0,\end{cases}$ k 为何值时函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

6. 证明方程 $x^5-3x-1=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

7. 证明方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个不超过 3 的实根.

B 组

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,如何可使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续?

2. 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,求常数 a,b 应满足的条件.

3. 求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+1}{x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{e^x+1}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{2\cos(\pi-x)}$;

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\ln(2-x)}{\arctan x}$.

4. 证明方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$ 至少有一个正根,且不超过 $a+b$.

5. 证明方程 $x^3+3x-1=0$ 至少有一个小于 1 的正根.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $a<c<d<b$. 求证:在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$. 其中,p,q 为任意常数.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续,且 $f(0)=f(2a)$. 求证:在 $[0,2a]$ 上至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

复习题一

1. 单项选择题.

(1) 设 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,$g(x)=x-1$,则 $f[g(x)]$ 的定义域为(　　).

A. $[-1,1]$　　B. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　C. $[0,2]$　　D. $(-\infty,+\infty)$

(2) 设 $f\left(\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{x}{x-2}$,则 $f(2x)=$(　　).

A. $\dfrac{1}{2x-1}$　　B. $\dfrac{1}{1-2x}$　　C. $\dfrac{x}{x-1}$　　D. $\dfrac{2x}{2x-1}$

(3) 函数 $y=e^x-1$ 在其定义域内是(　　).

A. 单调增函数　　B. 单调减函数　　C. 非单调函数　　D. 有界函数

(4) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$,则一定存在 x_0 的一个去心邻域,在此邻域内有(　　).

A. $f(x)<0$　　B. $f(x)>0$　　C. $f(x)\leqslant 0$　　D. $f(x)\geqslant 0$

(5)下列极限存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}$　　C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}$　　D. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x}{\sin x}$

(6)$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=$(　　).

A. $e^{\frac{3}{2}}$　　B. $e^{-\frac{3}{2}}$　　C. e^{6}　　D. e^{-6}

(7)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}=$(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 2　　C. 0　　D. ∞

(8)当 $x\to 0$ 时,下列变量中为无穷小量的是(　　).

A. $\ln(1+x)$　　B. $\cos(1-x)$　　C. $\dfrac{\sin x}{x}$　　D. e^{1-x}

(9)$x=0$ 是函数 $y=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的(　　).

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

(10)下列函数中,在 $x=0$ 处不连续的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x^3}, x\neq 0,\\ 0, x=0;\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, x\neq 0,\\ 1, x=0;\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0,\\ 1, x=0;\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases} 2x-1, x\leqslant 0,\\ x^2-x-1, x>0.\end{cases}$

2. 填空题.

(1)若 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,那么 $f(x^2)$ 的定义域为________;

(2)函数 $y=\tan x-\cot x$ 的周期是________;

(3)已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{2x}=2$,则 $k=$________;

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}=\sqrt{e}$,则 $k=$________;

(5)设 $f(x)=\begin{cases} \sin x, -2<x<0,\\ 1+x^2, 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=$________;

(6)$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x^2-1}=$________;

(7)$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\arctan\dfrac{1}{x}\right)=$________;

(8)设 $x\to 0$ 时,$1-\cos 2x$ 与 $ax\sin x$ 是等价无穷小,则常数 $a=$________;

(9)设 $f(x)=\begin{cases} (1-x)\sin\dfrac{1}{1-x}, x<1,\\ 1-\dfrac{1}{x}, x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$________;

(10)设 $f(x)=\begin{cases} e^x+a, x\leqslant 0, \\ \sin x, x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 $a=$________.

3.求下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}$;

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$;

(3)$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$;

(4)$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x+2}$;

(5)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}-1}{x^2}$;

(6)$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$;

(7)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\tan^2 x}{x\sin x}$;

(8)$\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}$.

4.设 $f(x-2)=x^2+2x-1$,求$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

5.设 $f(x)=\begin{cases} \sin x, x<0, \\ x, 0\leqslant x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x-1}, x>1. \end{cases}$ 讨论 $f(x)$的连续性(间断点及连续区间).

6.证明方程 $x^5-5x-1=0$ 在(1,2)内至少有一个实根.

7.已知 a,b 为常数,$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=1$,求 a,b 的值.