中等职业教育公共基础课改革创新教材

数学

SHUXUE

（基础模块）

学生用书｜ 第二册

主 编 金桂堂

北京出版集团公司
北 京 出 版 社

数学（基础模块）学生用书 第二册 主编 金桂堂 北京出版集团公司 北京出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学：基础模块．第2册 / 金桂堂主编．— 北京：北京出版社，2015.4（2020重印）

ISBN 978-7-200-11334-1

Ⅰ．①数… Ⅱ．①金… Ⅲ．①数学课—中等专业学校—教材 Ⅳ．① G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第099359号

数学（基础模块） 第二册

SHUXUE JICHU MOKUAI DIERCE

主　编：金桂堂
出　版：北京出版集团公司
　　　　北 京 出 版 社
地　址：北京北三环中路6号
邮　编：100120
网　址：www.bph.com.cn
总发行：北京出版集团公司
经　销：新华书店
印　刷：定州市新华印刷有限公司
版　次：2015年4月第1版　2018年11月修订　2020年9月第6次印刷
开　本：787毫米 ×1092毫米　1/16
印　张：14
字　数：245千字
书　号：ISBN 978-7-200-11334-1
定　价：29.00元

质量监督电话：010-82685218　010-58572750　010-58572393

目　录

第六章
数列

只有真正读懂斐波那契数列，才会看到造化天地的主宰——大自然女神是如此的美丽.

——伽罗瓦(Galois·Evariste，1811—1832年)(法国数学家)

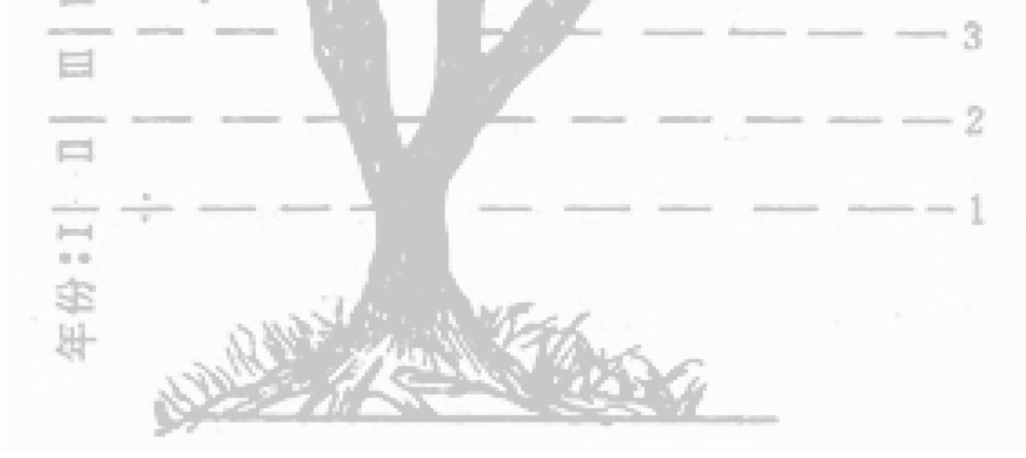
给我最大快乐的，不是已懂得知识，而是不断地学习；不是已有的东西，而是不断地获取；不是已达到的高度，而是继续不断地攀登.

——高斯(C. F. Gauss，1777—1855年)(德国数学家)

在自然界中，如一棵树的分杈数：1，1，2，3，5，8，13，21，…；一枝花朵的花瓣数：3，4，5，6，8，11，13，…；一个细菌分裂过程的繁殖数：1，2，4，8，16，32，…. 同学们能否发现这些自然现象是否遵循某种数学规律?

在日常生活中，我们还会遇到像存款利息、贷款购房分期还贷等实际计算问题，这些问题同样需要用有关数列的知识来解决. 数列的知识也是将来接受高等职业技术教育时学习高等数学的基础.

本章我们将学习数列的有关概念，并将研究两类常用的重要数列——等差数列和等比数列，解决与这些数列相关的一些问题，了解它们在实际生活中的应用.



6.1　数列的概念

6.1.1　数列的概念

某电视台的一次综艺节目中，主持人提出一道数学题：

下面一列数中

0,1,4,9,⋯.　①

你知道第 8 个数是什么吗？

在现实生活中，大家可以看到更多例子：

某班学号为 1～5 号的学生以学号的顺序把他们在体检中测得的视力（小数记录）排成一列数：

1.2，0.8,1.0,0.6,1.5.　②

把正偶数从小到大排成一列数：

2,4,6,8,10,⋯.　③

从 1984 年（第 23 届洛杉矶奥运会）到 2012 年（第 30 届伦敦奥运会），中国在连续八届奥运会上所得的金牌数：

15,5,16,16,28,32,51,38.　④

像上面的例子中，按一定次序排成的一列数叫作数列．数列中的每一个数叫作这个数列的项．

项数有限的数列，叫作有穷数列；项数无限的数列，叫作无穷数列．如上面的数列②，④是有穷数列，数列①，③是无穷数列．

数学史料

斐波那契（Fibonacci，Leonardo 约 1170—1250 年），意大利数学家．籍贯比萨．1202 年，他撰写了《算盘全书》一书．他是第一个研究印度和阿拉伯数学理论的欧洲人．他在著作《算盘全书》中，介绍了印度—阿拉伯数系及东方各国的算术与代数知识，及其在利润率、易货交易、货币兑换、重量与尺寸换算、合股和利息等商业问题中的应用．一并提出“兔子繁殖问题”引出著名的斐波那契数列．斐波那契还将印度—阿拉伯数学、十进位制记数法介绍给欧洲人认识，对欧洲的数学发展有深远的影响．

练一练

1. 请你举出几个实际生活中的数列例子.

2. 根据数列的定义判断,下面数的排列是数列吗?

(1) $-1,-1,-1,-1,\cdots$;

(2)$3,0,3,0,3,0,\cdots$;

(3)$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\cdots$.

3. 观察下面数列的特点,用适当的数填空.

(1)$1,3,(\quad),7,9,(\quad),13,\cdots$;

(2)$2,4,(\quad),16,32,(\quad),128,\cdots$;

(3) $-1,\frac{1}{2},(\quad),\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\frac{1}{6},(\quad),\cdots$.

6.1.2 数列的通项公式

由于数列的项都是按一定次序排列的,因此每一项都占有一个不同的序号.对于数列 $0,1,4,9,\cdots$,它的每一项与它的序号有下面的对应关系:

项	0	1	4	9	16	25	$\cdots$
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
序号	1	2	3	4	5	6	$\cdots$

此数列中的每一项都和它的序号有关,排在第一位的数叫作这个数列的第 1 项(或首项),排在第二位的数叫作这个数列的第 2 项,以此类推,排在第 n 位的数叫作这个数列的第 n 项.所以,数列的一般形式可写成:

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots.$$

简记为$\{a_n\}$.通常把第 n 项 a_n 叫作数列的通项.

如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的关系可以用一个公式来表示,这个公式就叫作这个数列的**通项公式**.我们可以根据数列的通项公式写出数列.

引例中,数列 $0,1,4,9,\cdots$,0 是它的第 1 项,即 $a_1=0$;1 是它的第 2 项,即 $a_2=1$;4 是它的第 3 项,即 $a_3=4$;9 是它的第 4 项,即 $a_4=9$;$\cdots$.

想一想:它的第n项,即通项是什么呢?

显而易见,它的第 8 项 $a_8=7^2=49$.

例题1 写出数列的一个通项公式,使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) $-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$;

(2)1,3,5,7,…;

(3)$\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5},\cdots$;

(4)2,4,8,16,….

【解】(1)这个数列的前 4 项$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ 的分子都是 1,分母就是序号,且奇数项的符号为负,偶数项的符号为正,所以它的一个通项公式是

$$a_n=(-1)^n\frac{1}{n}.$$

(2)这个数列的前 4 项 1,3,5,7 都是序号的 2 倍减去 1,所以它的一个通项公式是

$$a_n=2n-1.$$

(3)这个数列的前 4 项$\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$的分母都是序号加上 1,分子都是分母的平方减去 1,所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}.$$

(4)这个数列的前 4 项 2,4,8,16 都可以写成 2 的正整数幂的形式,且指数为序号,所以它的一个通项公式是

$$a_n=2^n.$$

例题2 根据下面数列的通项公式,说出它的前 5 项:

(1)$a_n=\frac{n}{n+1}$;　　(2)$a_n=(-1)^{n+1}\cdot n$.

【解】(1)在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$,得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$.

(2)在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$,得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$1,-2,3,-4,5$.

例题3 已知数列$\{a_n\}$的每一项都是它的序号的平方减去序号的 5 倍,问此数列的第几项是 66.

【解】由已知,得数列的通项公式为 $a_n=n^2-5n$,

令 $a_n=n^2-5n=66$,即 $n^2-5n-66=0$,

解得 $n=-5$(舍去),$n=11$.

即此数列的第 11 项是 66.

练一练

1.(口答)根据下面数列的通项公式,说出它的前 5 项.

(1)$a_n=n^2$; (2)$a_n=10n$;

(3)$a_n=3\times(-1)^n$; (4)$a_n=\dfrac{2n+1}{n^2+1}$.

2.观察下面数列的特点,用适当的数填空,并写出每个数列的一个通项公式.

(1)2,4,6,8,( ),…;

(2)1,2,4,( ),16,32,…;

(3)4,( ),2,1,0,−1,( ),−3,…;

(4)$\dfrac{1}{2}$,$-\dfrac{1}{4}$,( ),$-\dfrac{1}{16}$,$\dfrac{1}{32}$,….

6.1.3 数列的前 n 项和

已知数列$\{a_n\}$:$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$,前 n 项相加所得到的和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 叫作数列$\{a_n\}$的前 n 项和,记作 S_n,即

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

可以看出当 $n=1$ 时,有 $a_1=S_1$;当 $n\geqslant 2$ 时,有 $a_n=S_n-S_{n-1}$.

显然,数列$\{a_n\}$的通项 a_n 与此数列的前 n 项和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 之间有如下关系:

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$$

例题4 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2-n$,求:

(1)该数列的前 3 项和 S_3;

(2)该数列的第 1 项和第 n 项.

【解】(1)$S_3=3^2-3=6$.

(2)$a_1=S_1=1^2-1=0$;$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-n)-[(n-1)^2-(n-1)]=2n-2$.

练习 6.1

A 组

1. 观察下面数列的特点，用适当的数填空.

(1) $\frac{1}{1\times2}$，$\frac{1}{2\times3}$，（　　），$\frac{1}{4\times5}$，$\frac{1}{5\times6}$，…；

(2) $\frac{3}{2}$，$\frac{6}{3}$，$\frac{9}{4}$，（　　），$\frac{15}{6}$，…；

(3)（　　），4，9，16，25，（　　），49，…；

(4) 1，$\sqrt{2}$，（　　），2，$\sqrt{5}$，（　　），$\sqrt{7}$，….

2. 根据数列的定义，判断下面各题中的两个数列是否是相同的数列.

(1) 0，−1，−2，−3，−4，…和−1，−2，−3，−4，−5，…；

(2) 10，20，30，40 和 10，20，30，40，…；

(3) 1，2，3，4，5 和 5，4，3，2，1.

3. 根据下面数列的通项公式，写出它的前 5 项.

(1) $a_n=2n+1$；　　(2) $a_n=n^2-1$；

(3) $a_n=\frac{3}{n}$；　　(4) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

4. 写出下面数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数.

(1) 3，6，9，12；　　(2) 0，−2，−4，−6；

(3) $\frac{2}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}$；　　(4) $\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，2，$-\sqrt{5}$.

5. 请你分别写出下列每个数列的通项公式.

(1) 5，7，9，11，13，…；　　(2) −1，−2，−3，−4，−5，…；

(3) 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，…；　　(4) $-\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$-\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$-\frac{5}{6}$，…；

(5) $\frac{2^2-1}{2}$，$\frac{3^2-1}{4}$，$\frac{4^2-1}{6}$，$\frac{5^2-1}{8}$，$\frac{6^2-1}{10}$，….

B 组

1. 选择题：

下列每一个数列，其中都缺少一项，要求你仔细观察这个数列各项之间的关系，找出其中的排列规律，然后从四个供选择的答案中选出你认为最合适、合理的一个，来填补空

缺项,使之符合原数列的排列规律.

(1)2,4,12,48,(　　).

A. 96　　B. 120　　C. 240　　D. 480

(2)1,1,2,6,(　　).

A. 21　　B. 22　　C. 23　　D. 24

2. 观察下列顺序排列的等式.

$9\times 0+1=1$,

$9\times 1+2=11$,

$9\times 2+3=21$,

$9\times 3+4=31$,

$9\times 4+5=41$,

……

猜想:第 n 个等式应该是________________.

3. 已知数列:$1\times 2, 2\times 3, 3\times 4, \cdots, n(n+1), \cdots$.

(1) 求这个数列的第 10 项,第 31 项,第 48 项.

(2) 420 是不是这个数列中的项?如果是,是第几项?

4. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n(2n+1)$. 求:

(1)该数列的前 8 项之和;

(2)该数列的通项公式.

6.2　等差数列

6.2.1　等差数列的定义

在过去的300多年里，人们分别在下列时间(年份)观测到了哈雷彗星：

1682，1758，1834，1910，1986.　①

某人到银行贷款20万元买房，如果按30年，即$30\times12=360$期(月)，每期等额还款，若贷款年利率为6.15%，通过计算，这个人30年里每个月的还款额分别是：

1 219，1 219，1 219，1 219，1 219，…　②

全国统一鞋号中成年男鞋共有14种尺码(表示鞋底长，单位是cm)，它们分别是：

$30,29\frac{1}{2},29,28\frac{1}{2},28,27\frac{1}{2},27,\cdots,24,23\frac{1}{2}$.　③

上面的数列①，②，③有什么共同特点？

可以看出：

对于数列①，从第2项起，每一项与前一项的差都等于________；

对于数列②，从第2项起，每一项与前一项的差都等于________；

对于数列③，从第2项起，每一项与前一项的差都等于________.

也就是说，这些数列都有一个共同特点：从第2项起，每一项与前一项的差都等于同一常数.

一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于同一常数，那么这个数列就叫作**等差数列**，这个常数叫作等差数列的**公差**，公差用d表示.

$$\boxed{a_n-a_{n-1}=d(\text{常数})(n\geqslant2),n\in\mathbf{N}^*}$$

想一想

数列①，②，③都是等差数列，公差依次是________，________，________.

练一练

1. 求下列各等差数列的公差：

(1)5，11，17，…，则 $d=$________；

(2)1，$\frac{1}{2}$，0，…，则 $d=$________；

(3)9，9，9，…，则 $d=$________.

2. 试举出三个公差分别是正数、零、负数的等差数列.

6.2.2 等差数列的通项公式

一般地，如果等差数列$\{a_n\}$的首项是 a_1，公差是 d，我们根据等差数列的定义，可以得到

$a_2-a_1=d, a_3-a_2=d, a_4-a_3=d, \cdots,$

所以

$a_2=a_1+d,$

$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$

$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$

…

由此可知，等差数列$\{a_n\}$的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$$

例题1 判断下列各数列中哪些是等差数列，是等差数列的请求出它们的公差和通项公式.

(1)5，9，13，17，…；

(2)1，4，16，64，256，…；

(3)8，5，2，-1，-4，…；

(4)$-\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{2}$，1，$1\frac{1}{2}$，….

数列(1)、(3)、(4)都是等差数列，通项公式存在吗？如果存在，请写出每一个数列的通项公式.

【解】根据等差数列的定义可以判定(1)，(3)，(4)是等差数列.

(1)因为 $a_1=5,d=4$,根据通项公式得 $a_n=5+(n-1)\cdot 4$,即 $a_n=4n+1$;

(3)因为 $a_1=8,d=-3$,根据通项公式得 $a_n=8+(n-1)\cdot(-3)$,即 $a_n=-3n+11$;

(4)因为 $a_1=-\frac{1}{2},d=\frac{1}{2}$,根据通项公式得 $a_n=-\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}$,即 $a_n=\frac{1}{2}n-1$.

例题2　求等差数列 8, 5, 2, …的第 20 项.

【解】因为 $a_1=8,d=5-8=-3,n=20$,所以 $a_{20}=8+(20-1)\times(-3)=-49$.

例题3　-32 是不是等差数列 -5, -8, -11, …的项?如果是,是第几项?

【解】由 $a_1=-5,d=-8-(-5)=-3$,得 $a_n=-5+(n-1)\times(-3)=-3n-2$.

由题意知,本题是要回答是否存在正整数 n,使得 $-32=-3n-2$ 成立.解这个关于 n 的方程,得 $n=10$,即 -32 是这个数列的第 10 项.

练一练

1. 判断下列各数列中哪些是等差数列,是等差数列的请求出它们的公差和通项公式.

(1)6,7,8,9,10,…;

(2)3,0,-3,-6,…;

(3)1,2,4,8,16,….

2. 求等差数列 10,6,2,…的第 11 项.
3. -401 是不是等差数列 -5,-9,-13,…的项?如果是,是第几项?

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A,使 a,A,b 成等差数列,那么 A 应该满足什么条件?

因为 a,A,b 成等差数列,

所以 $A-a=b-A$,

因此有 $A=\frac{a+b}{2}$.

反过来,如果 $A=\frac{a+b}{2}$,那么 $2A=a+b,A-a=b-A$,即 a,A,b 成等差数列.

如果 a,A,b 成等差数列,那么 A 叫作 a 与 b 的**等差中项**.

例题4　求下列各组数的等差中项 A.

(1)3 和 9;　　(2)-1 和 11;　　(3)$\sqrt{2}+1$ 和 $\sqrt{2}-1$.

【解】(1)$A=\frac{3+9}{2}=6$;(2)$A=\frac{-1+11}{2}=5$;(3)$A=\frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2}=\sqrt{2}$.

练一练

1. 求下列各组数的等差中项.

(1)5 与 9；　　(2) -7 与 -9；　　(3)$\frac{4}{5}$与$-\frac{5}{7}$.

2. 8 与 x 的等差中项是 5，且 x 和 $4-y$ 的等差中项是 -1，求 x,y.

6.2.3 等差数列前 *n* 项和公式

伟大的数学家、天文学家高斯 10 岁时，他的数学教师布特纳(Buttner)写出一道算术题要学生们计算：

$1+2+3+\cdots+98+99+100=?$

过了 2 分钟，正当大家在逐项相加，算得不亦乐乎时，高斯站起来回答说：

"$1+2+3+\cdots+98+99+100=5\ 050.$"

老师问："你是如何算出答案的？"

高斯回答说："因为$1+100=101$，

$2+99=101$，

$\cdots$

$50+51=101$，

所以 $101\times 50=5\ 050.$"

高斯用的这种求等差数列前 n 项和的方法是很重要的一种思想方法——"倒序相加"法.

一般地，设等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_n,\cdots$ 的前 n 项的和是 S_n，即 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$.

根据等差数列$\{a_n\}$的通项公式，上式可以写成

$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]$， ①

再把项的次序反过来，S_n 又可以写成

$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]$， ②

把①，②两式的两边分别相加，得

数学史料

高斯(Johann Carl Friedrich Gauss，1777 年 4 月 30 日—1855 年 2 月 23 日)，生于不伦瑞克，卒于哥廷根，德国著名数学家、物理学家、天文学家. 自幼聪慧好学，很早就显示出超人的数学才华. 19 岁时找到了用圆规直尺作出正十七边形的方法. 24 岁时当选彼得堡科学院的外籍院士，30 岁被聘为哥根廷大学数学和天文学教授. 高斯被认为是最伟大的数学家，并有数学王子的美誉，和阿基米德、牛顿、欧拉同享盛名.

$$2S_n=\overbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}^{n\text{个}},$$

所以 $2S_n=n(a_1+a_n)$.

由此,可知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和的公式是

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}}$$

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$,所以 S_n 又可以用a_1,d,n 表示成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d}$$

上面两个公式给出了等差数列$\{a_n\}$的n，a_1，d，a_n，S_n之间的关系，并且知道其中三个量就可以通过等差数列前n项和公式及通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$求出另外两个量.

例题1 在等差数列$\{a_n\}$中,

(1)已知 $a_1=2,a_{20}=20$,求 S_{20};

(2)已知 $a_1=100,d=-4$,求 S_{20}.

【解】(1)因为 $a_1=2,a_{20}=20,n=20$,

所以 $S_{20}=\frac{n(a_1+a_{20})}{2}=\frac{20\times(2+20)}{2}=220$.

(2)因为 $a_1=100,d=-4,n=20$,

所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=20\times100+\frac{1}{2}\times20\times(20-1)\times(-4)=1\ 240$.

例题2 已知在等差数列$\{a_n\}$中,$d=3,a_n=20,S_n=65$,求 a_1 和 n.

【解】把 $d=3,a_n=20,S_n=65$ 分别代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 和 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$,得

$$\begin{cases}a_1+3(n-1)=20, & ①\\ na_1+\frac{3}{2}n(n-1)=65. & ②\end{cases}$$

由①得 $a_1=23-3n$,　③

把③代入②得 $3n^2-43n+130=0$,

所以 $n=10$ 或 $n=\frac{13}{3}$(舍去).所以 $a_1=23-3\times10=-7$.

练一练

1. 在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_1=6$,$a_{10}=10$,求 S_{10}.
2. 在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_1=\frac{1}{2}$,$d=-2$,求 S_{12}.
3. 在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_1=20$,$a_n=54$,$S_n=999$,求 d 和 n.

6.2.4 等差数列的简单应用

在日常生活中,我们会遇到很多需要用有关数列的知识来解决的实际问题.下面我们就举几个可用等差数列知识解决的实际问题.

例题1 第1届奥林匹克运动会于1896年在希腊雅典举行.奥林匹克运动会每4年举行一届.2008年8月在中国北京隆重举行并取得圆满成功的奥运会是第几届?2050年举行奥运会吗?(如因故不能举行,届数照算)

【解】由题意知等差数列的首项 $a_1=1\,896$,公差 $d=4$,$a_n=2\,008$.

将它们代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$,得 $2\,008=1\,896+(n-1)\times 4$,得 $n=29$.

令 $a_n=2\,050$,$2\,050=1\,896+(n-1)\times4$,

$n=39.5$.

答:2008年在我国北京隆重举行并取得圆满成功的奥运会是第29届,2050年不会举行奥运会.

例题2 某职业学校欲建一个设置40排座位的礼堂,第一排有30个座位,往后每排都比前一排多2个座位,这个礼堂能容纳该校2 700名师生吗?

【解】由题意知等差数列的首项 $a_1=30$,$n=40$,公差 $d=2$.

将它们代入公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$,得到

$$S_{40}=40\times30+\frac{40\times(40-1)}{2}\times2=2\,760>2\,700.$$

答:这个礼堂能容纳该校2 700名师生.

练一练

1. 梯子最高一级宽为 33 cm，最低一级宽为 110 cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列，计算中间各级的宽度.

2. 一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放一支，最上面一层放 120 支，如图 6-1 所示。这个 V 形架上共放着多少支铅笔？

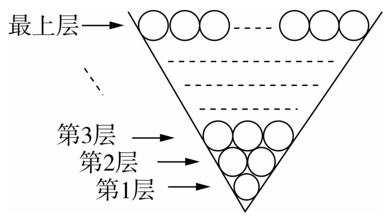


图 6-1

3. 某人在银行开通了 1 年期零存整取的账户，每个月存入账户 1 000 元人民币. 如果月利息是 2‰且按单利计算（单利是指如果储蓄时间超过单位时间，利息不计入本金，即对上一单位时间给予的利息不再支付利息），问：一年后可取回本利合计多少元人民币？

练习 6.2

A 组

1. 求等差数列 17，12，7，…的第 20 项.
2. 在等差数列$\{a_n\}$中，
   (1) 已知 $a_1=3$，$d=2$，$a_n=21$，求 n；
   (2) 已知 $a_1=12$，$a_6=27$，求 d.
3. 在等差数列$\{a_n\}$中，
   (1) 已知 $a_4=10$，$a_7=19$，求 a_1，d；
   (2) 已知 $a_3=9$，$a_9=3$，求 a_{12}.
4. 在等差数列$\{a_n\}$中，
   (1) 已知 $a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$，求 S_n；
   (2) 已知 $a_1=100$，$d=-2$，$n=50$，求 S_n.
5. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=3$，$a_n=21$，$d=2$，求 S_n，n.
6. 等差数列-10，-6，-2，2，…前多少项的和是 54？

7. 银行贷给某福利工厂无息贷款 36 万元，还款方式是一年后的第一个月还 1 万元，以后每个月比前一个月多还 2 000 元，问：该工厂需多少个月能还清全部贷款？

8. 一辆汽车做加速运动，在第 1 分钟内行驶了 300 m，从第 2 分钟开始，每分钟都要比前一分钟多行驶 50 m，照这样计算，当汽车的速度达到每分钟 1 800 m 时，这辆汽车一共行驶了多少分钟？

9. 某人计划在 7 天内读完一本有 385 页的书，第一天读了 40 页. 已知从第二天起，每一天都比前一天多读同样的页数. 问：每天多读多少页？

B 组

1. 三个数成等差数列，其和为 15，其平方和为 83，求此三个数.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15$，求 a_3 的值.

3. 求 $3+6+9+12+15+\cdots+2\ 010$ 的值.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，公差为 d，前 n 项和为 S_n，若 $a_6-a_3=3$，且 $4S_6=11S_3$，求首项 a_1 和公差 d 的值.

6.3　等比数列

6.3.1　等比数列的定义

传说国际象棋是古印度舍罕王的宰相西萨·班·达依尔发明的.他把这个有趣的娱乐品进贡给国王.舍罕王异常喜爱,决定让宰相自己提出要求而进行赏赐.国际象棋的棋盘一共有64个格子,宰相指着面前的棋盘说:"陛下,就请您赏给我一些麦子吧,请您在棋盘上的第一个格子上放1粒,第二个格子上放2粒,第三个格子上放4粒,第四个格子上放8粒……即每一个次序在后的格子中放的麦粒都必须是前一个格子麦粒数目的倍数,直到最后的第64个格子放满为止,圣明的王啊,这样我就十分满足了."舍罕王并没在意,就答应了.国王能否兑现承诺,请看下节分解.这里,先明确国际象棋棋盘各个格子放的米粒数依次是

$1,2,4,8,16,32,64,\cdots.$　①

某轿车的售价约为36万元,年折旧率约为10%,那么该车从购买当年算起,逐年的价值依次为

$36,36\times0.9,36\times0.9^2,36\times0.9^3,\cdots.$　②

某人年初投资10 000元,如果年收益率是5%,那么按复利,5年内各年末的本利和依次为

$10\,000\times1.05,10\,000\times1.05^2,10\,000\times1.05^3,\cdots,10\,000\times1.05^5.$　③

上面的数列①,②,③有什么共同特点?

可以看出:

对于数列①,从第2项起,每一项与前一项的比都等于________;

对于数列②,从第2项起,每一项与前一项的比都等于________;

对于数列③,从第2项起,每一项与前一项的比都等于________.

数学史料

国际象棋(Chess),又称欧洲象棋,是一种二人对弈的战略棋盘游戏.国际象棋的棋盘由64个黑白相间的格子组成。黑、白棋子各16个,多用木或塑胶制成.国际象棋中充满着无穷的数学智慧,是世界上最受欢迎的智力游戏之一,数以亿计的人以各种方式下国际象棋.

中国国际象棋队是世界国际象棋领域的一支劲旅.1991年10月29日,谢军成为中国第一个国际象棋世界冠军,之后诸宸、许昱华、侯逸凡也取得了世锦赛冠军,中国女子国际象棋队还多次夺得奥林匹克团体赛冠军.2014年8月14日,中国国际象棋男队也首次获得世界团体冠军称号,打破了欧美人对奥赛男子赛场87年的垄断.

也就是说,这些数列都有一个共同特点:从第 2 项起,每一项与前一项的比都等于同一常数.

一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的比都等于同一常数,那么这个数列就叫作**等比数列**,这个常数叫作等比数列的**公比**,公比用 q 表示.

即

$$\boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(a_n\neq 0)}$$

想一想

上面的三个数列都是等比数列,公比依次是________,________,________.

练一练

1. 求下列各等比数列的公比.

(1)1,3,9,27,…,则 $q=$________;

(2)1,−8,64,−512 ,…,则 $q=$________;

(3)$\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{24}$,…,则 $q=$________.

2. 试举出公比分别是正数、负数的两个等比数列. 公比等于零的等比数列存在吗? 为什么?

6.3.2 等比数列的通项公式

一般地,如果等比数列$\{a_n\}$的首项是 a_1,公比是 q,我们根据等比数列的定义,可以得到

$a_2=a_1q$,

$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2$,

$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3$,

…

$a_n=a_{n-1}q=\cdots=a_1\cdot q^{n-1}(a_1\cdot q\neq 0)$.

由此可知，等比数列$\{a_n\}$的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1q^{n-1}}$$

例题1 判断下列各数列中哪些是等比数列，是等比数列的请求出其公比和通项公式：

(1) 5，−5，5，−5，⋯；

(2)1，4，9，16，25，⋯；

(3)8，8，8，8，8，⋯；

(4)$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{27}$，$\frac{1}{81}$，⋯；

(5)0，5，25，125，⋯.

【解】根据等比数列的定义可以判定(1)，(3)，(4)是等比数列.

(1)易知$a_1=5$，$q=-1$，根据通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$得$a_n=5\cdot(-1)^{n-1}$.

(3)易知$a_1=8$，$q=1$，根据通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$得$a_n=8\cdot 1^{n-1}$，即$a_n=8$.

(4)易知$a_1=\frac{1}{3}$，$q=\frac{1}{3}$，根据通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$得$a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，即$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

例题2 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1)已知$a_1=3$，$q=-2$，求a_6；

(2)已知$a_3=20$，$a_6=160$，求a_n.

【解】(1)由等比数列的通项公式得$a_6=3\times(-2)^{6-1}=-96$.

(2)把$a_3=20$，$a_6=160$代入公式$a_n=a_1q^{n-1}$，

得$\begin{cases}a_1q^2=20,\\ a_1q^5=160.\end{cases}$

解得$\begin{cases}q=2,\\ a_1=5.\end{cases}$

因此$a_n=5\cdot 2^{n-1}$.

例题3 1 024是不是等比数列2，4，8，16，32，⋯的项？如果是，是第几项？

【解】由$a_1=2$，$q=2$，得$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$.

由题意知，本题是要回答是否存在正整数n，使得$1\ 024=2^n$成立. 解这个关于n的方程，得$n=10$，即1 024是这个等比数列的第10项.

例题4 某种设备原价为5万元，若按年折旧率10%余额折旧（指设备每年的价值

比上一年减少 10%),求六年后该设备的残值.

【解】该设备每年按余额折旧后的残值比上一年减少 10%,原价为 5 万元,1,2,3,…年后的残值分别为

$5\times(1-10\%)$,

$5\times(1-10\%)^2$,

$5\times(1-10\%)^3$,

…

因此该设备每年按余额折旧后的残值是一个首项 $a_1=5\times(1-10\%)$,公比 $q=1-10\%$的等比数列,由等比数列的通项公式,有

$a_6=5\times(1-10\%)\times(1-10\%)^5=2.657\ 205$.

答:六年后该设备的残值是 26 572.05 元.

练一练

1. 判断下列各数列中哪些是等比数列,是等比数列的请求出它们的公比和通项公式.

(1)4,-8,12,-16,20,…;

(2)-3,9,-27,81,…;

(3)$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{8}$,$\frac{1}{32}$,$\frac{1}{128}$, ….

2. 求等比数列$-\frac{1}{2}$,1,-2,4,…的第 11 项.

3. -81 是不是等比数列$-\frac{1}{81}$,$\frac{1}{27}$,$-\frac{1}{9}$,$\frac{1}{3}$…的项? 如果是,是第几项?

与等差中项的概念类似,如果在 a 与 b 中间插入一个数 G,使 a,G,b 成等比数列,那么 G 叫作 a 与 b 的**等比中项**.

如果 a,G,b 成等比数列,那么有$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$,因此 $G^2=ab$,即

$$\boxed{G=\pm\sqrt{ab}(ab\neq0)}$$

反过来,如果 a,b 同号,$G=\sqrt{ab}$或$G=-\sqrt{ab}$,即 $G^2=ab$,那么 a,G,b 成等比数列.

例如,9 与-9 都是 3,27 的等比中项.

练一练

1. 求下列各组数的等比中项：

(1) 1 与 9；　　(2) -2 与 -8；　　(3) $\frac{4}{5}$ 与 $\frac{5}{16}$.

2. 2 与 x 的等比中项有一个是 8，则 x 的值等于多少？又 x 和 $3y+1$ 的等比中项有一个是 -4，则 y 的值等于多少？

6.3.3　等比数列前 n 项和公式

6.3.1 中我们提到国际象棋棋盘各个格子放的米粒数依次是

1,2,4,8,16,32,64,…

若把整个棋盘 64 个格子放满麦粒，需要多少麦粒呢？

显然，这是一个求等比数列 1,2,4,8,16,…的前 64 项之和的问题.

即已知 $a_1=1$，$q=2$，求 S_{64}.

下面我们就来讨论求等比数列前 n 项和的问题.

设等比数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，

它的前 n 项和是 S_n，即 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，

根据等比数列的通项公式，等比数列前 n 项的和可以写成

$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}$，　①

现将①式两边分别乘公比 q，得

$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n$，　②

①－②得

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

由此可得到，当 $q\neq1$ 时，等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1)}$$

又因为 $a_1q^n=(a_1q^{n-1})q=a_nq$，

所以等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式还可以表示成

$$\boxed{S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1)}$$

注意:当 $q=1$ 时,$S_n=na_1$.

上面两个求和公式给出了等比数列中 a_1,a_n,q,n,S_n 之间的关系,并且已知其中三个量就可通过等比数列的前 n 项和公式和等比数列的通项公式求出另外两个量.

引例中,用等比数列求和公式,有

$$S_{64}=\frac{1\times(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

即若把整个棋盘 64 个格子的麦粒放满,共需要 18 446 744 073 709 551 615 粒麦粒.如果按照普通大米 600 粒为 50 克计算,总质量约为 15 311 亿吨!这可是一个天文数字.据联合国粮农组织估算,2013~2014 农业年(即 2013 年 7 月 1 日~2014 年 7 月 1 日),全球粮食产量约为 25 亿吨.若以此为标准计算,共需约 613 年的总产量,然而以前的农业远远没有现在发达,所以可能人类有史以来的粮食总产量都没有这么多!

请替国王想一想:有没有既可以兑现承诺,又可以做得到的好方法?

例题1 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,

(1)已知 $a_1=-4,q=\frac{1}{2}$,求 S_{10};

(2)已知 $a_1=1,a_n=243,q=3$,求 S_n.

【解】(1)因为 $a_1=-4,q=\frac{1}{2}$,所以 $S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{-4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1\ 023}{128}$;

(2)因为 $a_1=1,a_n=243,q=3$,所以 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{1-243\times 3}{1-3}=364$.

例题2 已知在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$q=3,S_5=242$,求 a_1.

【解】把 $q=3,S_5=242$ 代入公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$,得 $242=\frac{a_1(1-3^5)}{1-3}$,所以 $a_1=2$.

练一练

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=6,q=2$,求 S_6.
2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=3,q=\frac{1}{2},a_n=\frac{3}{64}$,求 S_n,n.
3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=-27,q=-\frac{1}{3}$,$S_n=-20$,求 a_n,n.

6.3.4　等比数列的简单应用

在日常生活中，我们会遇到很多需要用等比数列解决的问题.

例题1　计算机感染病毒多数是通过电子邮件传播的. 如果一种病毒第一轮感染的计算机是80台，并且从第一轮开始起，以后各轮的每一台计算机都可以感染下一轮的20台计算机，到第5轮可以感染到多少台计算机?

【解】由题意知 $a_1=80, q=20, n=5$，

将它们代入公式 $a_n=a_1q^{n-1}$，得

$a_5=80\times 20^4=12\ 800\ 000$(台).

答:到第5轮可以感染到12 800 000台计算机.

例题2　水土流失是我国某地区开发中最突出的生态问题. 为了解决这一问题，该地区2009年应退耕还林51.5万亩，以后每年退耕土地面积递增12%，那么从2009年起到2014年底，该地区退耕还林的面积共有多少万亩(精确到万亩)?

【解】由题意知 $a_1=51.5, q=1+12\%=1.12, n=6$，

将它们代入公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，得

$S_6=\dfrac{51.5\times(1-1.12^6)}{1-1.12}\approx 418$(万亩).

答:从2009年起到2014年底，该地区退耕还林的面积共有418万亩.

例题3　目前全国各地积极尝试建立再生资源回收利用网络体系，探索再生资源应收尽收、循环利用的良好路径与方式方法，保护城乡生态环境. 据有关资料表明，环保部门每回收1吨废旧物资，相当于处理和减少4吨工业废弃垃圾. 若某地区环保部门2011年回收10万吨废旧物资，计划以后每年递增20%的回收量. 求：

(1)2015年能回收废旧物资多少吨?

(2)2015年相当于处理和减少多少吨工业废弃垃圾?

(3)从2011年到2015年共回收废旧物资多少吨?

【解】(1)由题意知 $a_1=10, q=1+20\%=1.2, n=5$，

将它们代入公式 $a_n=a_1q^{n-1}$，得 $a_5=a_1\times q^{5-1}=10\times 1.2^4=20.736$(万吨)，

即2015年能回收废旧物资207 360吨.

(2)$20.736\times 4=82.944$(万吨)，

即 2015 年相当于处理和减少 829 440 吨工业废弃垃圾.

(3)由公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$得

$S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\dfrac{10(1-1.2^5)}{1-1.2}=74.416$(万吨),

即从 2011 年到 2015 年共回收废旧物资 744 160 吨.

练一练

1. 某种细菌在培养过程中,每 10 分钟分裂一次(一个分裂成 2 个),经过 3 小时,这种细菌由一个可繁殖成多少个?
2. 某人在银行参加每月 2 000 元的零存整取的储蓄活动,月利率是按单利 2‰计算,问 12 个月的本利合计是多少?
3. 某种电器自投放市场以来,经过三次降价,单价由原来的 5 000 元降到 1 715元,如果每次降价的百分率都相同,求降价的百分率.

练习 6.3

A 组

1. 在等比数列$\{a_n\}$中,

(1)已知 $a_1=27$,$q=-3$,求 a_7 的值;

(2)已知 $a_2=18$,$a_4=8$,求 a_1 的值;

(3)已知 $a_6=6$,$a_9=9$,求 a_3 的值.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=5$,$q=2$,$a_n=640$,求 n.
3. 已知在数列$\{a_n\}$中,$a_1=5$,$2a_{n+1}=-3a_n$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.
4. 在等比数列$\{a_n\}$中,

(1)已知 $a_1=3$,$q=2$,$n=6$,求 S_n;

(2)已知 $a_1=8$,$q=\dfrac{1}{2}$,$a_n=\dfrac{1}{2}$,求 S_n.

5. 在等比数列$\{a_n\}$中,已知 $a_1=3$,$q=\dfrac{1}{2}$,$a_n=\dfrac{3}{64}$,求 S_n,n.
6. 求等比数列 1, 2, 4, …从第 6 项到第 10 项的和.

7. 一条信息，若一人得知后用一分钟时间将此信息用手机短信形式传给两个人，这两个人又用同样时间分别转发给未知此信息的另外两个人，如此继续下去，半个小时后共有多少人知道该信息？

8. 某市近 10 年的国内生产总值从 2 000 亿元开始以每年 10％的速度增长，这个城市近 10 年的国内生产总值一共是多少？

9. 某地区 2008 年人口总数已达 3 000 万，如果该地区在 10 年后人口总数控制在 4 000 万内，那么该地区的人口年自然增长率要控制在多少？（$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$，$\lg 1.029=0.01242$）

B 组

1. 已知成等比数列的三个数的积为 64，且这三个数的和为 14，求这三个数.

2. 已知$\{a_n\}$是等比数列，且 $a_n>0$，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，求 a_3+a_5 的值.

3. 求 $2\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}+8\frac{1}{8}+\cdots+64\frac{1}{64}$ 的值.

4. 已知$\triangle ABC$ 的周长为 1，连结$\triangle ABC$ 三边的中点构成第二个三角形的周长为______，再连结第二个三角形三边的中点构成第三个三角形的周长为________，依次类推，猜想第 n 个三角形的周长为________. 用学过的数列知识证明你的猜想.

快乐实践

学完数列的知识，就能了解数列在分期付款中的应用了. 搜集一些分期付款的材料，比如，分期付款购房、购车、购电脑等. 对搜集的材料进行分析，与同学交流.

A 同学搜集的材料是：A 同学家向银行贷款 100 000 元买车，5 年还清，月利率为0.45％.

A 同学家每月应该向银行还多少元？

（注：银行贷款有等额本息还款法、等金本息还款法、等额累进还款法等. 该同学家是按等额本息还款法贷款. 等额本息还款法即利息按月复利计算.）

现在我们共同来探究一下.

1. 根据规定，偿还贷款是偿还本金和利息. A 同学家贷款 5 年（即 60 个月）到期付清时，100 000 元贷款的本金与利息之和是多少？大家可以通过完成表 6-1 知道.

表 6-1

	100 000 元贷款的本金与它的利息之和
1 个月后	$100\ 000\times1.004\ 5$ 元
2 个月后	$100\ 000\times1.004\ 5^2$ 元
3 个月后	
……	……
59 个月后	
60 个月后	$100\ 000\times1.004\ 5^{60}$ 元

2. 如果每个月还款 x 元，各月所付款额到贷款全部付清时也会产生利息(同样按月复利计息). 各月所付款与它的利息之和是多少？同样，大家可以通过完成表 6-2 知道.

表 6-2

	各月所付款与它的利息之和
1 个月后还 x 元	$1.004\ 5^{59}x$ 元
2 个月后还 x 元	
3 个月后还 x 元	
……	……
59 个月后还 x 元	
60 个月后还 x 元	$1.004\ 5^{0}x$ 元

3. 根据表 6-1 和表 6-2 可知：

$$100\ 000\times1.004\ 5^{60}=1.004\ 5^{59}x+\underline{\qquad\qquad}+\underline{\qquad\qquad}+\cdots+\underline{\qquad\qquad}+1.004\ 5^{0}x$$
$$=1.004\ 5^{0}x+1.004\ 5^{1}x+1.004\ 5^{2}x+\cdots+1.004\ 5^{59}x,$$

则 $100\ 000\times1.004\ 5^{60}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}x$，

$x=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

4. 根据上面结果，如果向银行贷款 a 元，月利率为 r，约定 n 个月将贷款还清，月均还款 x 元，则有

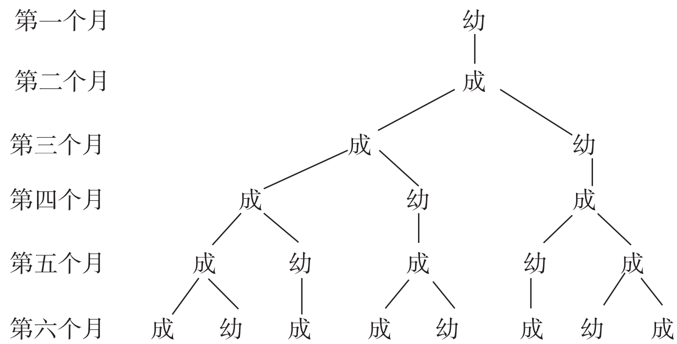
$$x=\frac{a\cdot(1+r)^n\cdot r}{(1+r)^n-1}.$$

数海拾贝

斐波那契数列

1202 年,斐波那契出版了他的《算盘全书》.书中记载了大量的算术和代数问题及其解答.其中有一个非常著名的兔子繁殖问题:

如果 1 对兔子每月能生 1 对小兔子(一雄一雌),而每 1 对小兔子在它出生后的第 3 个月里,又能生 1 对小兔子.假定在不发生死亡的情况下,由 1 对初生的小兔子开始,50 个月后会有多少对兔子?



在第 1 个月时,只有 1 对小兔子,过了 1 个月,那对兔子成熟了,在第 3 个月时便生下 1 对小兔子,这时有两对兔子.再过 1 个月成熟的兔子再生 1 对小兔子,而另 1 对小兔子长大,有 3 对小兔子.如此进行推算,我们可以得到表 6-3:

表 6-3

时间(月)	初生兔子(对)	成熟兔子(对)	兔子总数(对)
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21
9	13	21	34
10	21	34	55

由此可见,从第 1 个月开始,以后每个月的兔子总对数是

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,….

你发现这个数列的规律了吗?数列的最初的两个数都是 1,而数列中的每个数都是前两个数之和.

这个数列叫作斐波那契数列.这个数列中的各个数叫作斐波那契数.斐波那契数列可以由下面的公式来表示:

$$\begin{cases} a_1=a_2=1, \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\geqslant 3). \end{cases}$$

斐波那契数列还有一系列奇妙的性质,现简列以下几条,供同学们欣赏.

1. 从首项开始,我们依次计算每一项与它的后一项的比值,并精确到小数后面第四位:

$$\frac{1}{1}\approx 1.000\ 0 \qquad \frac{1}{2}=0.500\ 0$$

$$\frac{2}{3}\approx 0.666\ 7 \qquad \frac{3}{5}=0.600\ 0$$

$$\frac{5}{8}\approx 0.625\ 0 \qquad \frac{8}{13}=0.615\ 4$$

$$\frac{13}{21}\approx 0.619\ 0 \qquad \frac{21}{34}=0.617\ 6$$

$$\frac{34}{55}\approx 0.618\ 2 \qquad \frac{55}{89}=0.618\ 0$$

$$\frac{89}{144}\approx 0.618\ 1 \qquad \frac{144}{233}=0.618\ 0$$

如果将这一工作不断地继续下去,这个比值将无限趋近于黄金数0.618 033 988 7…,它还能用$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$精确地表示出来,恰是一元二次方程 $x^2+x-1=0$ 的一个根.(注:黄金分割是指把一条线段分割为两部分,使其中一部分与全长之比等于另一部分与这部分之比.其比值是无理数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,称其为黄金数,取其前三位数字的近似值是 0.618.)(详见《数学》第一册教材第二章的“数海拾贝”.)

2. 本章“数列”的章头图(树木生长的树杈图)中树苗在第一年长出一条新枝,由于新生的枝条,往往需要一段“休息”时间,供自身生长,而后才能萌发新枝.所以,一株树苗在一段间隔,例如一年,以后长出一条新枝;第二年新枝“休息”,老枝依旧萌发;此后,老枝与“休息”过一年的枝同时萌发,当年生的新枝则次年“休息”.这样,一株树各个年份的枝桠数,正好是 1,1,2,3,5,8,13,21,34,…,也就是斐波那契数列.这个规律,就是生物学

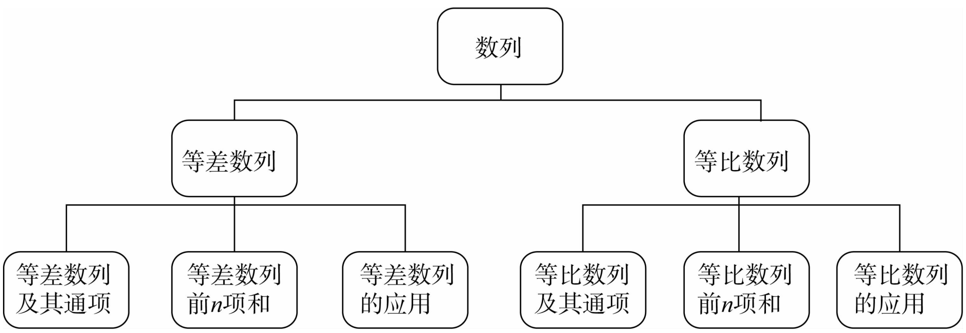
上著名的“鲁德维格定律”.

3.很多花朵的瓣数都是斐波那契数列数，如鸢尾花、延龄草和蝴蝶花 3 瓣，金凤花、苹果花、野玫瑰和梅花 5 瓣，翠雀花、飞燕草、血根草和洛桑花 8 瓣，万寿菊、金盏和玫瑰 13 瓣，紫菀 21 瓣，向日葵 21 或 34 瓣，雏菊是 34 瓣、55 瓣或 89 瓣. 当然，并非所有的花的花瓣数都是斐波那契数，如油菜花、萝卜花都是 4 瓣，而蟹爪莲 18 瓣……

4.不仅在植物王国中可以找到斐波那契数列的踪迹，自然界还有许多关于斐波那契数列的有趣的性质与现象，在现实生活中众多领域有着广泛的应用，如估计股市中股指波动、建筑学中通风采光的设计等，这些都有待于同学们进一步发现、了解和探究，使其造福于人类.

小结与复习

一、本章知识结构图



二、学习要求

1. 了解数列的概念，了解数列的通项公式的意义. 会根据数列的通项公式写出数列的任意一项，会写出简单数列的通项公式.
2. 理解等差数列的定义、通项公式、前 n 项和公式，并能运用等差数列的知识解决一些简单的实际问题.
3. 理解等比数列的定义、通项公式、前 n 项和公式，并能运用等比数列的知识解决一些简单的实际问题.

三、需要注意的问题

等差数列与等比数列在内容上是完全平行的，应该将它们对比起来学习，以进一步认识它们之间的区别与联系.

复习题

A 组

一、选择题:

1. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{1}{2}n(n+2)$,则 220 是这个数列的 ( )

A. 第 19 项　　B. 第 20 项

C. 第 21 项　　D. 第 22 项

2. 数列$\{\lg 2^n\}$是 ( )

A. 等差数列但不是等比数列　　B. 等比数列但不是等差数列

C. 既是等差数列又是等比数列　　D. 非等差数列又非等比数列

3. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_5+a_8=10$,则S_{12}等于 ( )

A. 60　　B. 50

C. 120　　D. 100

4. 设等比数列$\{a_n\}$的公比$q=2$,且$a_2\cdot a_4=8$,则$a_1\cdot a_7$等于 ( )

A. 8　　B. 16

C. 32　　D. 64

二、填空题:

1. 若数列$\{a_n\}$为等差数列,且$a_6+a_8=-20$,$a_{10}=-30$,则$a_4=$________.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中,若$a_1=1$,$a_n=-512$,$S_n=-341$,则$q=$________.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=4$,且a_1,a_5,a_{13}成等比数列,则等差数列$\{a_n\}$的通项公式为________.

4. 如图 6-2 所示,用火柴棒摆成正方形图形,则第 50 个图形需用火柴棒______根.

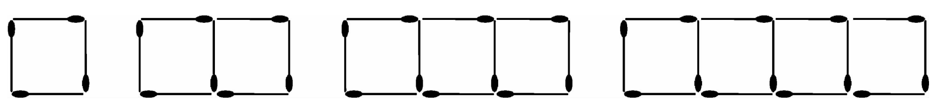


图 6-2

三、解答题:

1. 已知数列$\{a_n\}$,当n为奇数时,$a_n=-3n+2$;当n为偶数时,$a_n=2^n-7$.

(1)请写出此数列的前 4 项;

(2)问:121 和-19是否是此数列中的项? 若是,求出它的下一项.

2. 有三个数成等差数列,前两个数和的 3 倍等于第三个数的 2 倍,若第二个数减去 2(仍做第二项),则三数成等比数列,求此三个数.

3. 定义“等和数列”：在一个数列中，如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数，那么这个数列叫作等和数列，这个常数叫作该数列的公和. 已知数列$\{a_n\}$是等和数列，且$a_1=3$，公和为5，求：

(1)这个数列的第5项；

(2)这个数列的前21项的和.

4. 假设世界人口自1980年起，50年内每年的增长率固定不变. 已知1987年世界人口达50亿，1999年第60亿个人诞生，根据这些资料推测2023年世界人口数将接近多少亿？

B 组

1. 在公差不为0的等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$中，$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$a_8=b_3$，求数列$\{a_n\}$的公差d和数列$\{b_n\}$的公比q.

2. 求数列$1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{4}$，$3\frac{1}{8}$，…前10项的和.

3. 已知等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数，$a_1=2$，且前3项之和为14.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前20项的和.

4. 某城市2013年底人口为100万，人均住房建筑面积为25平方米.

(1)若该城市人口每年比上一年平均增长1%，那么到2015年底该城市人口将达到多少？(精确到1万人)

(2)若计划到2015年底人均住房建筑面积达到30平方米，则该城市每年比上一年平均增加住房建筑面积多少平方米？