



“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

建筑力学

主编
叶腾

建筑力学

主编 叶腾

北京出版集团
北京出版社



扫描二维码
共享立体资源

北京出版集团
北京出版社

图书在版编目(CIP)数据

建筑力学 / 叶腾主编. — 北京 : 北京出版社,
2014.5 (2021 重印)

高职“十二五”规划教材: 2014 版

ISBN 978-7-200-10695-4

I. ①建… II. ①叶… III. ①建筑力学—高等职业教
育—教材 IV. ①TU3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 114236 号

建筑力学

JIANZHU LIXUE

主 编: 叶 腾

出 版: 北京出版集团

北京出版社

地 址: 北京北三环中路 6 号

邮 编: 100120

网 址: www.bph.com.cn

总发行: 北京出版集团

经 销: 新华书店

印 刷: 定州市新华印刷有限公司

版印次: 2014 年 5 月第 1 版 2019 年 5 月修订 2021 年 4 月第 5 次印刷

开 本: 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张: 16.5

字 数: 343 千字

书 号: ISBN 978-7-200-10695-4

定 价: 48.50 元

教材意见建议接收方式: 010-58572162 邮箱: jiaocai@bphg.com.cn

如有印装质量问题, 由本社负责调换

质量监督电话: 010-82685218 010-58572162 010-58572393

单元一 建筑力学概论	1
单元二 刚体静力学基础	6
学习任务 1 静力学基础知识	7
学习任务 2 平面力系	20
单元三 杆件的强度、刚度和稳定计算	42
学习任务 1 内力和内力图	43
学习任务 2 应力和变形	63
学习任务 3 强度计算和刚度计算	97
学习任务 4 轴心压杆的稳定计算	112
单元四 静定结构内力分析与位移计算	130
学习任务 1 平面体系的几何组成分析	131
学习任务 2 静定结构内力分析	146
学习任务 3 静定结构的位移计算	179

单元五 分析超静定结构基本方法	204
学习任务 1 力法	205
学习任务 2 位移法	224
学习任务 3 力矩分配法	240
参考文献	254

北京出版社

单元二 | 刚体静力学基础

单元描述

刚体静力学是力学的一个分支，它主要从静力学公理出发，研究物体在力的作用下处于平衡的规律，以及如何建立各种力系的平衡条件，还研究了力系的简化和物体受力分析的基本方法。刚体静力学是其他各种工程力学的基础，在土建工程中有广泛的应用。

学习目标

通过本单元的学习能正确区分不同的约束及其约束反力，会对物体进行受力分析并正确地画出受力图。掌握平面力系的合成与平衡问题，能运用平面力系的平衡条件与平衡方程计算常见结构的约束反力。

学习重点

1. 静力学公理。
2. 常见约束及其约束反力。
3. 物体的受力图。
4. 平面汇交力系、平面力偶系、平面任意力系的平衡条件及其应用。

学习任务 1 | 静力学基础知识

一、基本概念

1. 力的概念

人们在长期生活和实践中，建立了力的概念：力是物体间的相互机械作用。这种作用能使物体运动状态发生改变，并使物体变形。例如，力作用在车子上可以使车由静到动，或使车的运动速度变快，与此同时人也感到车对人有力的作用；力作用在钢筋上可以使直的钢筋弯曲或使弯曲的钢筋变直，同时钢筋也有力作用在施力物体上。

2. 力的作用效应

力使物体的机械运动状态发生变化，称为力的外效应——运动效应。例如，重力作用下物体加速下落；行驶的汽车刹车时，靠摩擦力慢慢停下来等都属于运动状态发生变化；以及运动效应的特例——平衡。例如，房屋在重力和风力的作用下相对地球保持静止。力使物体的几何尺寸和形状发生变化，称为力的内效应——变形效应。例如，弹簧受拉后伸长；混凝土试块在压力机的压力下被压碎等都属于力的变形效应。

力对物体的作用效应取决于力的三要素：大小、方向和作用点，如图 2-1-1 所示。力的大小表示物体间相互作用的强弱；力的方向包括力的作用线方位和指向，反映了物体间相互作用的方向性；力的作用点表示物体相互作用的位置。力的单位为 N（牛顿）。

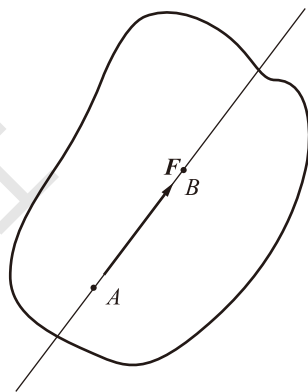


图 2-1-1

3. 力系

作用在物体上的一组力，称为力系。按照力系中各力作用线分布的不同形式，力系可分为：

- (1) 汇交力系：力系中各力作用线汇交于一点。
- (2) 力偶力系：力系中各力可以组成若干力偶或力系由若干力偶组成。
- (3) 平行力系：力系中各力作用线相互平行。
- (4) 任意力系：力系中各力作用线既不完全交于一点，也不完全相互平行。

按照各力作用线是否位于同一平面内，上述力系又可以分为平面力系和空间力系两大类，如平面汇交力系、空间任意力系等。

4. 刚体

实践表明，任何物体受力作用后，总会产生一些变形。但在通常情况下，绝大多数构件或零件的变形都是很微小的。研究证明，在很多情况下，这种微小的变形对外效应影响甚微，可以忽略不计，即认为物体在力作用下大小和形状保持不变。这种在力作用下不产生变形的物体称为刚体，刚体是对实际物体经过科学的抽象和简

化而得到的一种理想模型。而当变形在所研究的问题中成为主要因素时就不能再把物体看作刚体了。

二、静力学公理

1. 公理 1：二力平衡公理

作用于刚体上的两个力平衡的充分与必要条件是这两个力的大小相等、方向相反、作用线在一条直线上。

这一结论是显而易见的。如图 2-1-2 所示直杆，在杆的两端施加一对大小相等的拉力 (F_1 、 F_1') 或压力 (F_2 、 F_2')，均可使杆平衡。

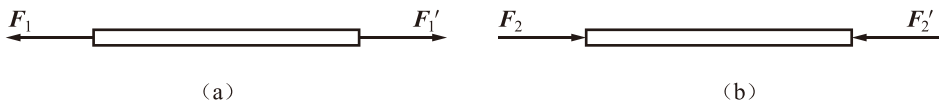


图 2-1-2

【特别提示】

二力平衡条件对于刚体来说是充分而且必要的；而对于变形体，该条件只是必要的而不是充分的。如柔索受到两个等值、反向、共线的压力作用时就不能平衡。

在两个力作用下处于平衡的物体称为二力体；若为杆件，则称为二力杆件。根据二力平衡公理可知，作用在二力构件上的两个力，它们必须通过两个力作用点的连线（与杆件的形状无关），且等值、反向，如图 2-1-3 所示。

2. 公理 2：加减平衡力系公理

在作用于刚体上的已知力系上，加上或减去任意一个平衡力系，不会改变原力系对刚体的作用效应。这是因为平衡力系中，诸力对刚体的作用效应相互抵消，力系对刚体的效应等于零。根据这个原理，可以进行力系的等效变换。

【推论】力的可传性原理

作用于刚体上的某点力，可沿其作用线移动到刚体内任意一点，而不改变该力对刚体的作用效应。利用加减平衡力系公理，很容易证明力的可传性原理。如图 2-1-4 所示，设力 F 作用于刚体上的 A 点，现在其作用线上的任意一点 B 加上一对平衡力 F_1 、 F_2 ，并且使 $F_1 = -F_2 = F$ ，根据加减平衡力系公理可知，这样做不会改变原力 F 对刚体的作用效应，再根据二力平衡条件可知， F_2 和 F 亦为平衡力系，可以撤去。所以，剩下的力 F_1 与原力 F 等效。力 F_1 即可成为力 F 沿其作用线由 A 点移至 B 点的结果。

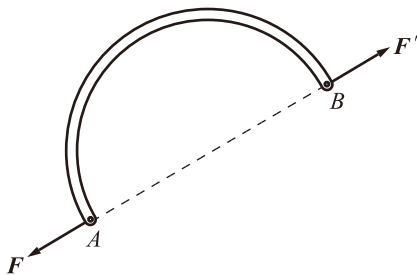


图 2-1-3

【特别提示】◆ ...

力的可传性原理也只适用于刚体而不适用于变形体。

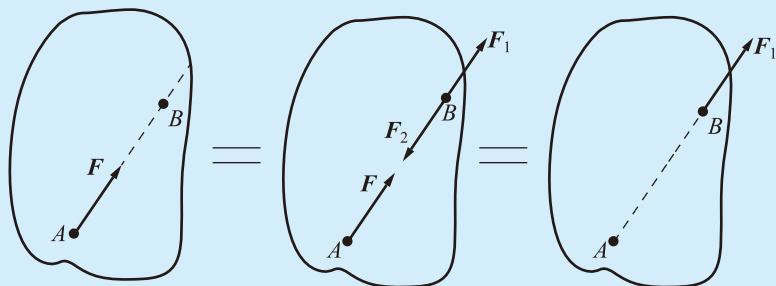


图 2-1-4

3. 公理 3: 力的平行四边形法则

作用于物体同一点的两个力, 可以合成一个合力, 合力也作用于该点, 其大小和方向由以两个力为邻边的平行四边形的对角线表示。如图 2-1-5 所示, 其矢量表达式为

$$F_1 + F_2 = R \quad (2-1-1)$$

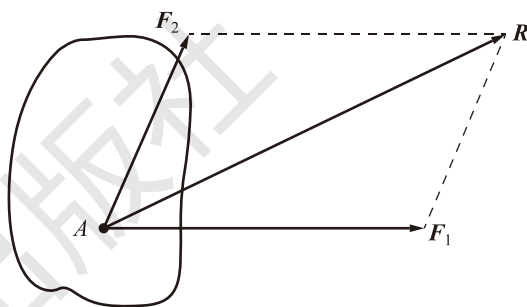


图 2-1-5

在求两共点力的合力时, 为了作图方便, 只需画出平行四边形的一半, 即三角形便可。其方法是从任意点 O 开始, 先画出矢量 F_1 , 然后再由 F_1 的终点画出另一矢量 F_2 , 最后由 O 点至力矢 F_2 的终点作一矢量 R , 它就代表 F_1 、 F_2 的合力矢。合力的作用点仍为 F_1 、 F_2 的汇交点 A 。这种作图法称为力的三角形法则。

【特别提示】◆ ...

若改变 F_1 、 F_2 的顺序, 其结果不变, 如图 2-1-6 所示。

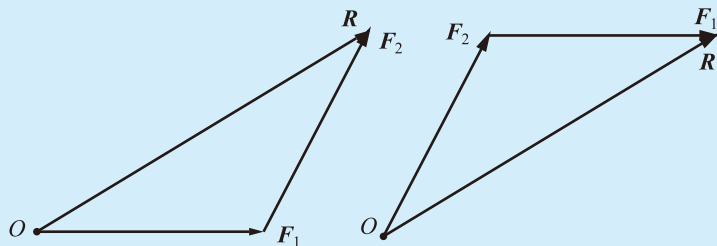


图 2-1-6

利用力的平行四边形法则，也可以把作用在物体上的一个力，分解为相交的两个分力，分力与合力作用于同一点。实际计算中，常把一个力分解为方向已知的两个力，如图 2-1-7 即为把一个任意力分解为方向已知且相互垂直的两个分力。

【推论】三力平衡汇交定理

一刚体受不平行的三个力作用而平衡时，此三力的作用线共面且汇交于一点。

如图 2-1-8 所示，设在刚体上的 A 、 B 、 C 三点，分别作用于不平行的三个相互平衡的力 F_1 、 F_2 、 F_3 。根据力的可传性原理，将力 F_1 、 F_2 移到其汇交点 O ，然后根据力的平行四边形法则，得合力 R_{12} 。则力 F_3 应与 R_{12} 平衡。由二力平衡公理可知， F_3 与 R_{12} 必共线。因此，力 F_3 的作用线必通过 O 点且与力 F_1 、 F_2 共面。

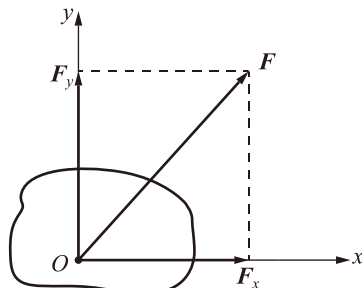


图 2-1-7

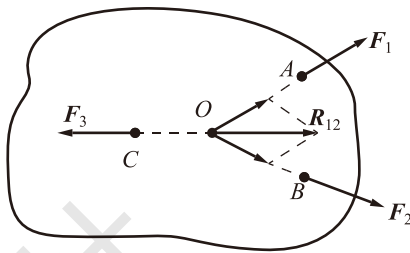


图 2-1-8

【特别提示】◆ ...

三力平衡汇交定理只说明了不平行的三力平衡的必要条件，而不是充分条件。它常用来确定刚体在不平行三力作用下平衡时，其中某一未知力的作用线。

4. 公理 4：作用力与反作用力公理

两个物体间相互作用的一对力，总是大小相等、方向相反、作用线相同，并分别而且同时作用于这两个物体上。

这个公理概括了任何两个物体间相互作用的关系。有作用力，必定有反作用力。两者总是同时存在，又同时消失。因此，力总是成对地出现在相互作用的物体上的。

【特别提示】◆ ...

要注意二力平衡公理和作用力与反作用力公理是不同的，前者是对一个物体而言，而后者则是对物体之间而言。

三、约束、约束反力和荷载

自然界中的一切事物总是以各种形式与周围事物互相联系而又互相制约。在工程结构中，每一构件都根据工作要求以一定方式和周围其他构件联系着，它的运动因而受到一定的限制。例如，梁由于墙的支持而不致下落，列车只能沿轨道行驶，门、窗由于合页的限制只能绕固定轴转动等。

1. 约束、约束反力

凡是对一个物体的运动（或运动趋势）起限制作用的其他物体，就称为这个物体的约束。

能使物体运动（或有运动趋势）的力称为主动力。主动力往往是给定的或已知的，例如物体的重力、水压力、土压力、风压力等。

约束既然限制物体的运动，也就给予该物体以作用力，约束施加在被约束物体上的力称为约束反力。约束反力的方向总是与约束所阻止的物体运动趋势方向相反。约束反力的方向与约束反力本身的性质有关。例如，梁搁置在墙上，墙阻止梁下落而反作用于梁一向上的支承力，即墙给梁的约束反力。

(1) 柔体约束

绳索、链条、传送带等柔体物体形成的约束即柔体约束。这些物体只能受拉，而不能受压。作为约束，它们只能限制物体沿其中心伸长方向的运动。因此，柔体约束的约束反力是通过接触点沿柔体中心线背离物体的拉力，以 T 表示。如图 2-1-9 所示。

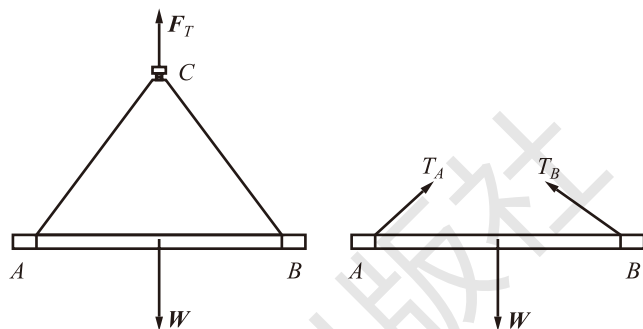


图 2-1-9

(2) 光滑接触面约束

当两物体接触面上的摩擦力很小，可以略去不计时，即可认为是光滑接触面约束。这种约束只能限制物体沿着接触面的公法线而指向支承面的运动，但不能限制物体沿着切平面或离开支承面的运动。因此，光滑接触面的约束反力通过接触点，方向沿接触面的公法线并指向被约束的物体（即为压力），以 N 表示，如图 2-1-10 所示。

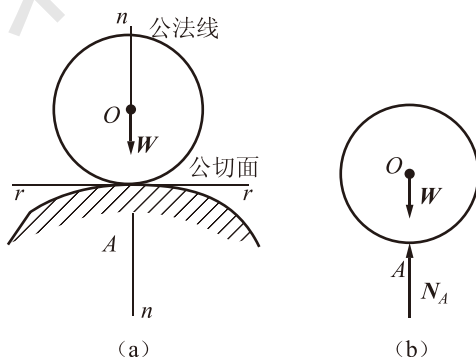


图 2-1-10

如图 2-1-11(a) 所示，一矩形构件搁置在槽中，光滑构件在 A 、 B 、 C 三点与光滑槽壁接触，三处的约束反力为垂直于接触面、指向矩形构件的压力 N_A 、 N_B 、 N_C 。如图 2-1-11(b) 所示。

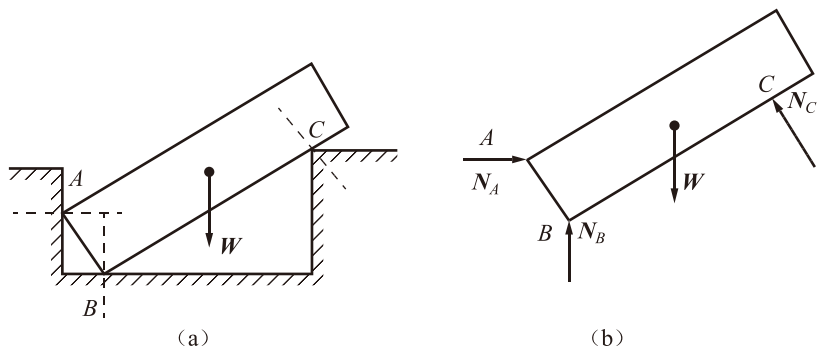


图 2-1-11

(3) 光滑圆柱铰链约束

光滑圆柱铰链在工程结构和机械设备中常用于连接构件或零部件。铰链是由一个圆柱形销钉插入两个物体的圆孔中构成的 [图 2-1-12(a)]。若销钉与物体之间的接触是光滑的, 则这种约束只能限制物体在垂直于销钉轴线的平面内做任意方向的运动, 但不能限制物体绕销钉的转动和沿其轴线方向的滑动。显然, 光滑圆柱铰链的约束反力必作用于接触点 K 并通过销钉中心, 如图 2-1-12(b) 中的 R 。但接触点 K 不能预先确定, 与作用在活动部分的主动力有关, 所以 R 的方向是未知的。因此, 光滑圆柱铰链的约束反力作用在垂直销钉轴线的平面内, 通过销钉中心, 而方向待定, 其约束反力有两个未知量 (大小和方向)。

在实际应用中, 通常把光滑圆柱铰链提供的约束反力分解为两个相互垂直且通过销钉中心的分力, 用 X 和 Y 表示 [图 2-1-12(c)], 其指向可以任意假定, 再根据计算结果来判定其正确性。只要确定了这两个分力, 反力 R 也就确定了。

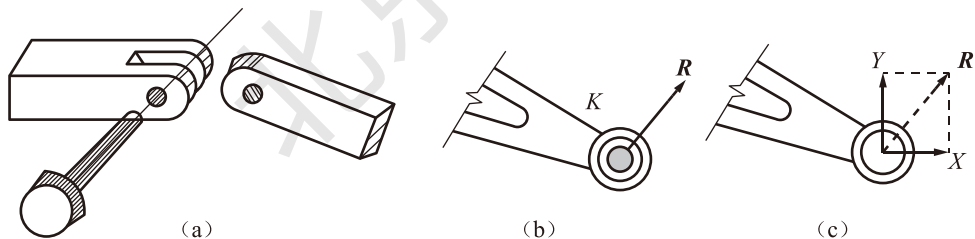


图 2-1-12

门窗用的合页、燃气灶盘上的爪连接、教师讲课时用的圆规等都是圆柱铰链约束的实例。圆柱铰链约束的常见形式有:

① 固定铰链支座。

工程上常将一支座用螺栓与基础或静止的结构物固定起来, 如将构件用圆柱形光滑销钉与该支座连接, 就构成所谓的固定铰链支座, 其基本构造如图 2-1-13(a) 所示。固定铰链支座的约束特性与圆柱铰链约束相同, 其支座简图及约束反力的表示法分别如图 2-1-13(b)、(c) 所示。

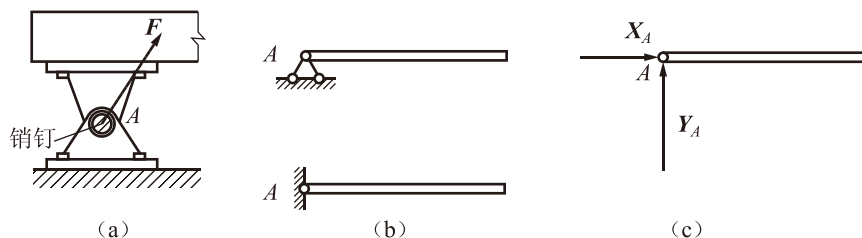


图 2-1-13

工程案例

在建筑结构中理想的固定铰支座是不多见的，通常把不能产生移动、只能产生微小转动的支座视为固定铰支座。如起重机起重臂等结构同支承面或机架的连接即为固定铰支座（图 2-1-14），以及屋架与墙体的连接处，屋架用预埋在混凝土垫块内的螺栓和支座连在一起，垫块则砌在墙内，这时，支座阻止了结构的垂直移动和水平移动，但是它不能阻止结构的微小转动。



图 2-1-14 起重臂与支承面连接

② 辊轴支座（可动铰链支座）。

在固定铰链支座下面用几个辊轴支承于平面上，并允许支座可以沿着支承面运动，但不能脱离支承面，就称为辊轴支座，也称为可动铰链支座，如图 2-1-15(a) 所示。不计各接触面的摩擦，这种支座不能限制物体绕销钉的转动和沿支承面的运动，只能限制物体与支承面垂直方向（指向或背离支承面）的运动。因此，辊轴支座的约束反力垂直于支承面，且通过销钉中心，而指向待定，如图 2-1-15(b)、(c) 所示。

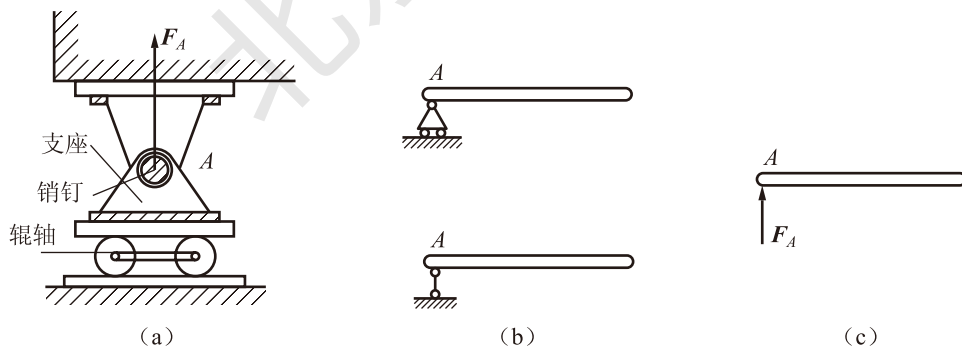


图 2-1-15

工程案例

在工程实际中，一些钢架桥或大型钢梁通常是一端用固定铰链支座，另一端用可动铰链支座，当桥梁因热胀冷缩而长度稍有变化时，可动铰链支座相应地沿支承面滑动，从而避免由温度变化引起的不良后果。如图 2-1-16 和图 2-1-17 所示。



图 2-1-16 开始安装桥梁支座



图 2-1-17 桥梁支座

(4) 链杆约束

两端用光滑销钉与物体相连而中间不受力的直杆称为链杆, 如图 2-1-18(a) 所示的杆 AB , 链杆只能限制物体沿其中心线方向的运动, 而不能限制其他方向的运动, 因此, 链杆的约束反力沿着链杆的中心线, 而指向待定, 如图 2-1-18(b) 所示。

(5) 固定端约束

工程中常将构件牢固地嵌在墙或基础内, 使物体既不能在任意方向上移动, 也不能自由转动, 这种约束称为固定端约束。例如梁端被牢固地嵌在墙中时, 如图 2-1-19(a) 所示。这种既能限制物体移动, 又能限制物体转动的约束称为固定端约束。

固定端约束的约束反力有三个: 作用于嵌入处截面形心上的水平约束反力 X 和垂直约束反力 Y , 以及约束反力偶 M , 如图 2-1-19(b) 所示。

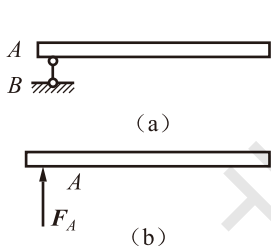


图 2-1-18

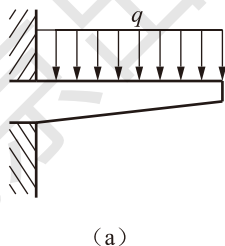


图 2-1-19

建筑物的阳台、房屋的雨篷、埋在地里的电线杆都受固定端的约束。

【特别提示】 ◆ ...

固定铰支座、可动铰支座、链杆约束以及固定端支座的约束反力的指向均待定, 可以任意假设, 通过计算验证假设正确与否。

2. 荷载

作用在物体上的力或力系统称为外力, 物体所受的外力包括主动力和约束反力两种, 其中主动力又称为荷载 (即为直接作用)。如人和物体的自重、风压力、水压力等。



荷载

(1) 集中力

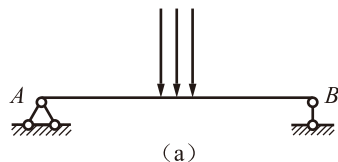
荷载的分布面积远小于物体的面积时, 可近似地看成集中作用在一点上, 故称为集中力。例如, 人站在地板上, 人的重力就是集中力(图 2-1-20)。集中力的单位是牛顿(N) 或千牛顿(kN), 通常用字母 F 表示。

(2) 均布荷载

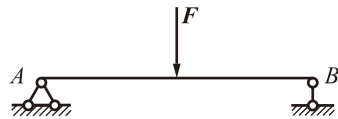
荷载连续作用称为分布荷载, 若大小各处相等, 则称为均布荷载。单位面积上承受的均布荷载称为均布面荷载, 通常用字母 F_q 表示, 单位为牛顿/平方米(N/m^2) 或千牛顿/平方米(kN/m^2)。单位长度上承受的均布荷载称为均布线荷载, 通常用字母 q 表示(图 2-1-21), 单位为牛顿/米(N/m) 或千牛顿/米(kN/m)。

(3) 集中力偶

如图 2-1-22 所示, 荷载作用在梁上的长度远小于梁的长度时, 则可简化为作用在梁上某截面处的一对等值反向的集中力, 称为集中力偶, 用符号 M 表示(图 2-1-22), 其单位为牛·米($\text{N}\cdot\text{m}$) 或千牛·米($\text{kN}\cdot\text{m}$)。



(a)



(b)

图 2-1-20

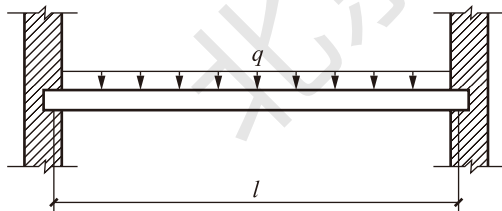
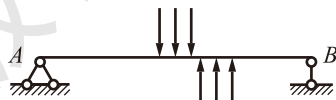
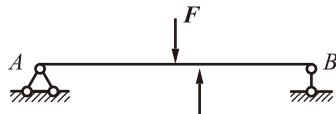


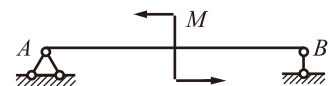
图 2-1-21



(a)



(b)



(c)

图 2-1-22

四、受力和受力图

分析物体的受力是解决各种力学问题的重要前提。例如在设计厂房或机器时, 总是要先明确它的每一个构件或零部件受哪些力作用, 其中哪些力是已知的, 哪些力是未知的, 这称为物体的受力分析。

工程上所碰到的物体多为非自由体, 它们同周围的物体相互连接, 为了便于分析并能清晰地表示物体的受力情况, 往往需要把所研究的物体从与它相联系的周围物体中分离出来即取隔离体, 解除全部约束, 单独画出研究物体的图形, 并将作用在它上面的主动力和约束反力全部画在图形上。这样的图形称为受力图。

下面举例说明怎样画物体的受力图。

[例 2-1-1] 重为 W 的细直杆 AB 搁在台阶上, 与地面 A 、 D 两点接触, 在 E 点用绳索 EF 与墙壁相连, 如图 2-1-23(a) 所示, 略去摩擦。试作直杆的受力图。

解: (1) 取直杆为研究对象, 将直杆从周围物体中分离出来, 解除 A 、 D 、 E 处的约束。

(2) 在直杆上加上作用在直杆上的主动力(重力) W 和分别作用在 A 、 D 、 E 处的约束反力。根据光滑接触面的约束特性, 约束反力 N_A 、 N_D 分别垂直于地面和直杆; 绳索作用于直杆的约束反力 T_E 是沿着绳索中心线的拉力。

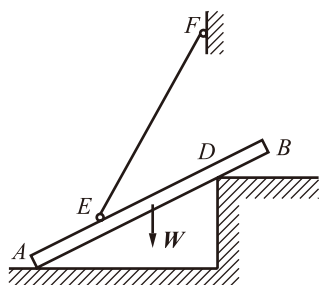
直杆的受力图如图 2-1-23(b) 所示。

[例 2-1-2] 水平梁在 A 、 B 两处分别为固定铰支座和可动铰支座, 梁在 C 点受一集中力 F , 如图 2-1-24(a) 所示。若不考虑梁的自重, 试画出梁的受力图。

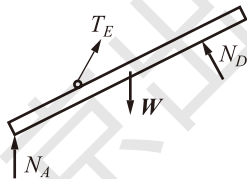
解: (1) 取梁为研究对象, 解除两端支座约束, 单独画出。

(2) 在梁上加上作用在梁上的主动力即集中力 F 和分别作用在 A 、 B 处的约束反力。 A 端为固定铰支座, 其约束反力可用水平分力 X_A 和铅垂分力 Y_A 表示; B 端为可动铰支座, 其约束反力垂直于支承面, 用铅垂方向的 R_B 表示。

梁的受力图如图 2-1-24(b) 所示。



(a)



(b)

图 2-1-23



(a)



(b)

图 2-1-24

[例 2-1-3] 由水平杆 AB 和斜杆 BC 构成的管道支架如图 2-1-25(a) 所示, 在 AB 杆上放一重为 P 的管道, A 、 B 、 C 处都是圆柱铰链连接, 不计各杆的自重, 各接触面都是光滑的, 试分别画出管道 O 、水平杆 AB 、斜杆 BC 及整体的受力图。

解: (1) 取管道 O 为研究对象, 在管道 O 上加上作用在管道上的主动力(重力) P 和作用在 D 处的约束反力。根据光滑接触面的约束特性, 约束反力 N_D 垂直于水平杆 AB , 管道 O 的受力图如图 2-1-25(b) 所示。

(2) 取水平杆 AB 为研究对象, 在 AB 杆上加上作用于 A 、 B 、 D 处的约束反力。 A 处为固定铰支座, 其支座反力可用 X_A 、 Y_A 表示, 指向假设如图; 而 B 处为链杆约束, 其约束反力沿着链杆中心线, 假设为 R'_B ; D 处的约束反力 N'_D 与 N_D 互为作用力与反作用力, 所以 N'_D 与 N_D 方向相反。水平杆 AB 的受力图如图 2-1-25(c) 所示。

(3) 取斜杆 BC 为研究对象, 因其不计自重, 为用铰链连接链杆, 故 B 、 C 两处的约束反力必满足二力平衡条件, 其受力图如图 2-1-25(d) 所示, 其中 R_B 与 R'_B 为作用力与反作用力。

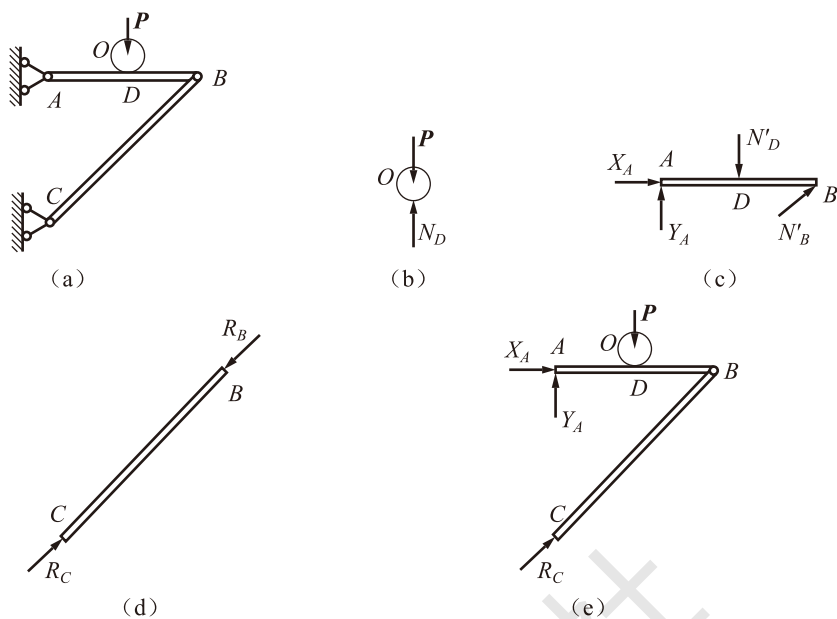


图 2-1-25

(4) 取整体为研究对象, 其受力图如图 2-1-25(e) 所示。注意 A 、 C 铰链支座的约束反力的指向应与图 2-1-25(c)、(d) 中相应约束反力的方向一致。

【特别提示】

对由几个物体组成的系统(简称物体系统)进行受力分析时, 我们把物体系统内部各物体之间相互作用的力称为内力, 系统以外的物体对该系统的作用力称为外力。根据作用与反作用定律, 系统内部相互作用力总是成对出现的, 并且彼此等值、反向、共线。在以系统为研究对象时, 成对的内力并不影响平衡, 因此, 在系统的受力图上就不必画出内力。

通过上面实例的分析, 现在把画受力图的步骤和注意点归纳如下:

- ①明确研究对象, 即要根据问题的条件和要求, 选择合适的研究对象, 并从与它相联系的其他物体中分离出来, 解除全部约束, 单独画出其简图。
- ②根据约束的类型及其约束特性, 在研究对象上正确画出约束反力, 并将它所受到的主动力一并画出。如果取几个物体组成的系统为研究对象, 则内力不必画出。
- ③分析物体受力时注意找出链杆, 先画出链杆受力图, 利用二力平衡条件确定某些约束反力的方向。
- ④分别画出两个相互作用物体的受力图时, 要特别注意作用力与反作用力的关系。

学习任务小结

1. 静力学的基本理论

- (1) 力: 力是物体间的相互机械作用。这种作用使物体运动状态发生改变, 并使物

体变形。

- (2) 力偶：大小相等、方向相反、作用线不重合的两个平行力称为力偶。
- (3) 刚体：在外力作用下几何尺寸和形状都不发生变化的物体称为刚体。
- (4) 平衡：物体相对于地球处于静止或做匀速直线运动称为平衡。
- (5) 约束：凡是对一个物体的运动（或运动趋势）起限制作用的其他物体，称为这个物体的约束。

2. 静力学基本公理

- 静力分析中的公理揭示了力的基本性质，它是静力分析的理论基础。
- (1) 二力平衡公理说明了作用在一个刚体上的两个力的平衡条件。
 - (2) 加减平衡力系公理是力系等效代换的基础。
 - (3) 力的平行四边形公理给出了共点力的合成方法。
 - (4) 作用与反作用公理说明了物体间相互作用的关系。

3. 物体受力分析及画受力图

针对研究对象进行受力分析，在其上画出受到的全部力的图形称为受力图。画受力图要明确研究对象，去掉约束，单独取出，画上所有主动力与约束反力。

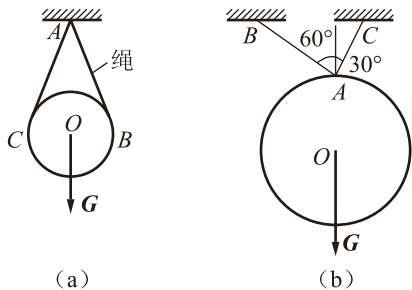
职业技能知识点考核

一、简答题

- 1. 哪几条公理或推论只适用于刚体？
- 2. 二力平衡公理和作用力与反作用力定理中，都说是二力等值、反向、共线，其区别在哪里？
- 3. 画受力图的主要步骤有哪些？

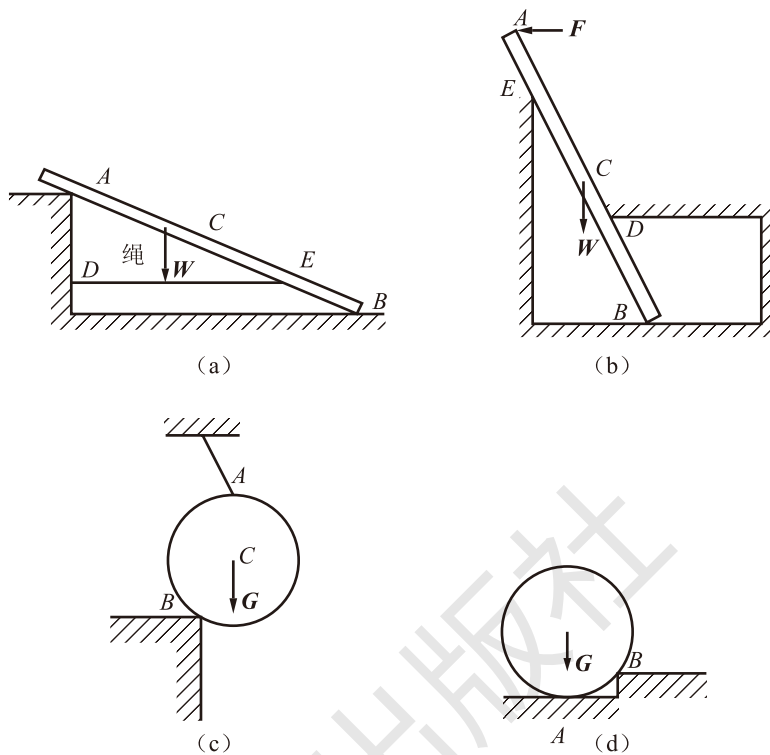
二、作图题

- 1. 如题 1 图所示，一小球用绳 AB、AC 悬挂，自重为 G，画出小球的受力图。



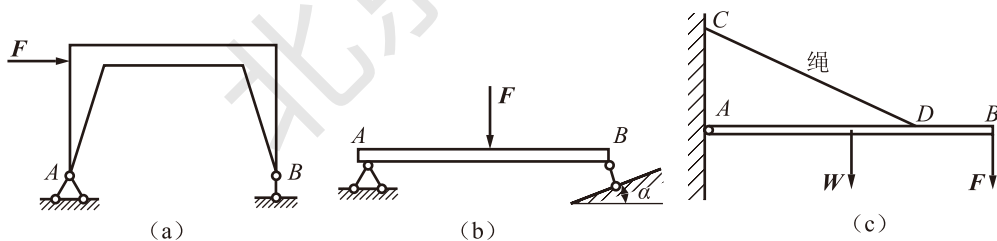
题 1 图

2. 画出题 2 图中 AB 杆和小球的受力图，各接触面均为光滑接触面。



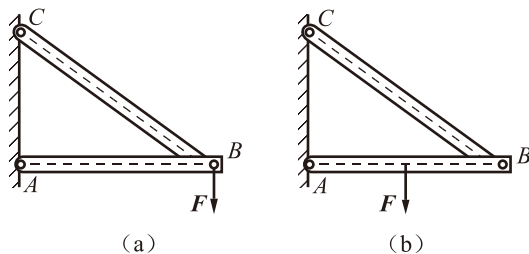
题 2 图

3. 画出题 3 图中杆 AB 的受力图。



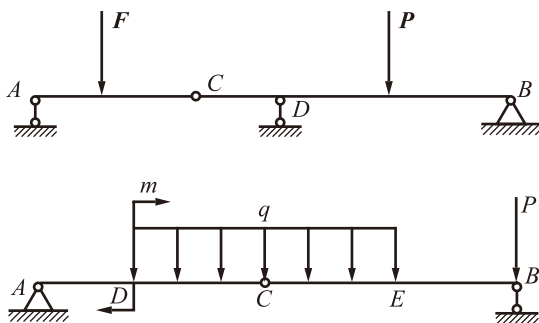
题 3 图

4. 画出题 4 图中三角架 B 处的销钉、各杆件以及整体的受力图 (各杆的自重忽略不计)。



题 4 图

5. 画出题 5 图中各杆件及整体的受力图 (各杆的自重不计)。



题 5 图

学习任务 2 | 平面力系

一、平面汇交力系的合成与平衡

1. 平面汇交力系的合成

在工程实际中常将力系分类, 如果作用在物体上的力系, 各力的作用线相交于同一点, 则称为汇交力系。若汇交力系中的所有力的作用线都在同一个平面内, 则该力系称为平面汇交力系, 否则称为空间汇交力系。本章只讨论平面汇交力系。

如图 2-2-1(a) 所示, 有一作用于刚体上 O 点的平面汇交力系 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, 现分别用几何法和解析法将这一力系合成。

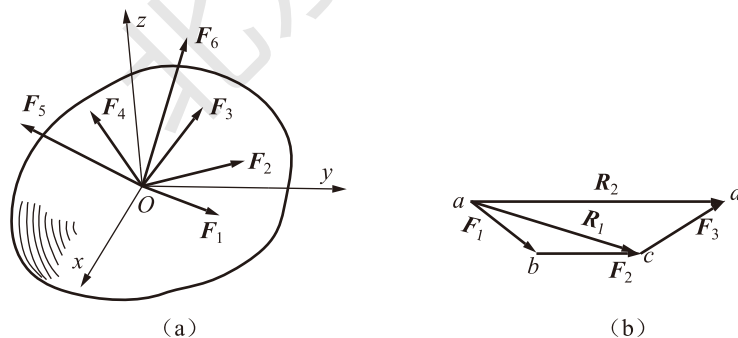


图 2-2-1

(1) 几何法

根据力的三角形法则, 可将 F_1 和 F_2 合成一合力 R_1 [图 2-2-1(b)], 则有

$$R_1 = F_1 + F_2$$

其作用线通过 O 点, 再将 R_1 与 F_3 合成, 得 R_2 , 则有

$$R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$$

力 R_2 的作用线仍通过 O 点。连续应用力的三角形法则，最后就把此力系合成为作用线通过 O 点的合力 R ，即

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = \sum F_i$$

由此可知，汇交力系合成的结果是一个合力，合力等于已知力系各力的矢量和，其作用线通过力系的汇交点。

为了求出合力 R ，无须画出中间过程的力矢 R_1 、 R_2 、 $\cdots$ ，只要将表示各力的矢量依次首尾相接，然后从第一个分力的始端与最后一个分力的末端作一矢量，此矢量代表合力 R 的大小和方向。这样作出的多边形称为力多边形，合力矢量是力多边形的封闭边。这种求合力的方法，称为力的多边形法则。

【特别提示】

任意变换力的次序，可得到形状不同的力多边形，如图 2-2-2 所示，但合力仍然不变。

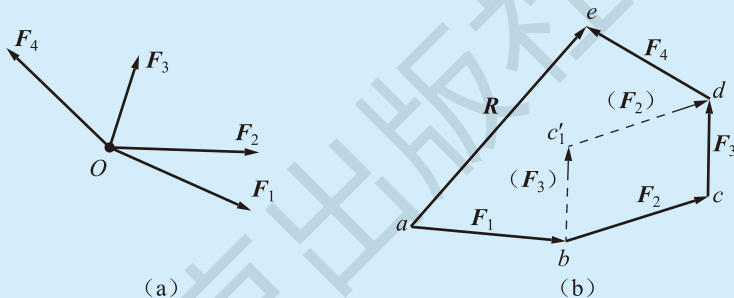


图 2-2-2

(2) 解析法

解析法是求解平面汇交力系合成的另一种常用方法，它是以力在坐标轴上的投影为基础的。以下先介绍力在坐标轴上投影的概念。

① 力在其平面直角坐标轴上的投影。

设力 F 作用在物体上的 A 点，取直角坐标系 xOy ，使力 F 在 xOy 平面内，如图 2-2-3 所示。过力 F 的两端 A 、 B 向坐标轴作垂线，则这两根垂线在坐标轴上所截的线段并冠以正负号，称为力 F 在坐标轴上的投影。图 2-2-3 中的 ab 线段即为力 F 在 x 轴上的投影，以 X 表示，线段 $a'b'$ 为力 F 在 y 轴上的投影，用 Y 表示。力在轴上的投影是代数量，其正负号规定如下：若由 a 到 b (或由 a' 到 b') 的顺序与坐标轴的正向相同时，则力的投影为正值，反之为负值。

一般情况下，在直角坐标系 xOy 中，若已知力 F 与 x 轴所夹的锐角为 α ，则力 F 在 x 、 y 轴上的投影分别为

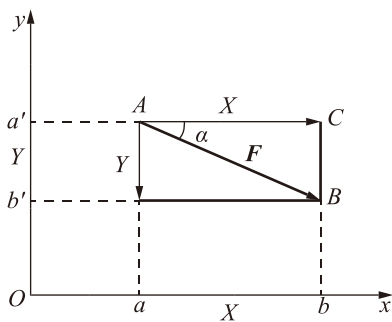


图 2-2-3

$$\begin{cases} X = \pm F \cos \alpha \\ Y = \pm F \sin \alpha \end{cases} \quad (2-2-1)$$

[例 2-2-1] 已知力 $F_1=20\text{ N}$, $F_2=50\text{ N}$, $F_3=40\text{ N}$, $F_4=60\text{ N}$, 各力方向如图 2-2-4 所示, 试求各力在 x 轴和 y 轴上的投影值。

解:

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1 \cdot \cos 90^\circ = 0 \\ Y_1 &= F_1 \cdot \sin 90^\circ = 20 \times 1 = 20\text{ N} \\ X_2 &= -F_2 \cdot \cos 0^\circ = -50 \times 1 = -50\text{ N} \\ Y_2 &= F_2 \cdot \sin 0^\circ = 0 \\ X_3 &= F_3 \cdot \cos 60^\circ = 40 \times \frac{1}{2} = 20\text{ N} \\ Y_3 &= F_3 \cdot \sin 60^\circ = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 34.64\text{ N} \\ X_4 &= -F_4 \cdot \sin 30^\circ = -60 \times \frac{1}{2} = -30\text{ N} \\ Y_4 &= -F_4 \cdot \cos 30^\circ = -60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -51.96\text{ N} \end{aligned}$$

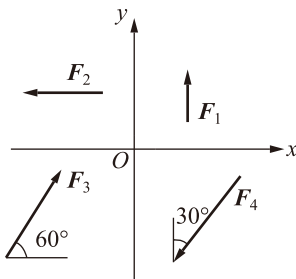


图 2-2-4

【特别提示】 ◆ ...

由例题 2-2-1 计算可知:

- (a) 如力的作用线和坐标轴垂直, 则力在该坐标轴上的投影值等于零;
- (b) 如力的作用线和坐标轴平行, 则力在该坐标轴上的投影的绝对值等于力的大小。

②平面汇交力系合成的解析法。

设有一作用于刚体上 O 点的平面汇交力系 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, 由汇交力系合成的几何法, 已知汇交力系合成的结果是一个合力, 它等于该力系中各力的矢量和, 即合力

$$R = \sum F_i$$

如果合力 R 在 x 、 y 轴上的投影分别为 X 、 Y , 力系中各力在同一轴上的投影分别为 $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n$, 则

$$\begin{cases} X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum X_i \\ Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum Y_i \end{cases} \quad (2-2-2)$$

上式即合力投影定理: 合力在坐标轴上的投影, 等于各分力在同一轴上投影的代数和。

【特别提示】 ◆ ...

合力投影定理虽然由平面汇交力系推出, 但适用于任何力系。

由合力投影定理, 可以求出平面汇交力系的合力。若刚体上作用一已知的平面汇交力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$, 根据合力投影定理, 可得 X 和 Y 如图 2-2-5(b) 所示, 则合力的大小为

$$\begin{cases} R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2} \\ \tan \alpha = \left| \frac{Y}{X} \right| \end{cases} \quad (2-2-3)$$

式中, α 表示合力 R 与 x 轴所夹的锐角, 具体指向可由 X 和 Y 的正负确定。

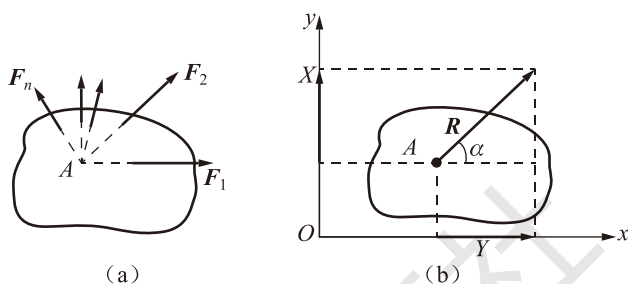


图 2-2-5

[例 2-2-2] 如图 2-2-6(a) 所示, 吊钩受 F_1, F_2, F_3 三个力的作用。若 $F_1=732 \text{ N}$, $F_2=732 \text{ N}$, $F_3=2\,000 \text{ N}$ 。试求合力的大小和方向。

解: (1) 建立图 2-2-6(a) 所示平面直角坐标系。

(2) 根据力的投影公式, 求各力在 x, y 轴上的投影。

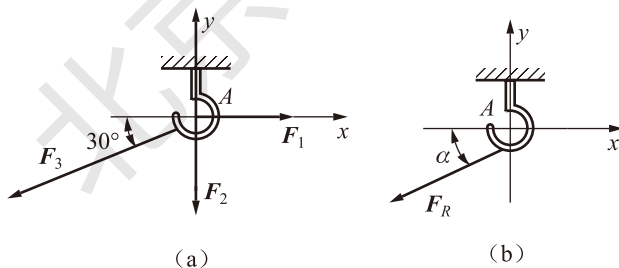


图 2-2-6

$$X_1 = 732 \text{ N}$$

$$X_2 = 0$$

$$X_3 = -F_3 \cos 30^\circ = -2\,000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -1\,732 \text{ N}$$

$$Y_1 = 0$$

$$Y_2 = -732 \text{ N}$$

$$Y_3 = -F_3 \sin 30^\circ = -2\,000 \times 0.5 = -1\,000 \text{ N}$$

(3) 由合力投影定理求合力。

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = 732 + 0 - 1\,732 = -1\,000 \text{ N}$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0 - 732 - 1\,000 = -1\,732 \text{ N}$$

则合力的大小为

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(-1\,000)^2 + (-1\,732)^2} = 2\,000 \text{ N}$$

由于 X 、 Y 均为负，则合力 F 指向左下方，与 x 轴所夹角 α 为

$$\tan \alpha = \left| \frac{Y}{X} \right| = \left| \frac{-1\,732}{-1\,000} \right| = 1.732$$

即 $\alpha = 60^\circ$



平面汇交力系的平衡

2. 平面汇交力系的平衡

平面汇交力系合成的结果是一个合力。若刚体在平面汇交力系的作用下保持平衡，则该力系的合力应为零；反之，若一平面汇交力系的合力为零，则刚体在该力系的作用下必保持平衡。所以，平面汇交力系平衡的充分必要条件是该力系的合力等于零。

$$R = \sum F_i = 0 \quad (2-2-4)$$

在几何法中，若汇交力系的力多边形的最后一个力的终点与第一个力的起点相重合，则表示该力系的力多边形的封闭边变为一个点，即合力等于零。因此，任何两个相邻的力都首尾相接，构成了一个封闭的力多边形。由此得出结论，平面汇交力系平衡的必要和充分的几何条件是力多边形封闭。

在解析法中，由式 (2-2-3) 可知

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2}$$

式中根号内的各项都是正值，欲使 $R=0$ ，其充分必要条件是

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases} \quad (2-2-5)$$

因此，平面汇交力系平衡的必要和充分的解析条件是：力系中各力在直角坐标系各轴上的投影的代数和都等于零。式 (2-2-5) 称为平面汇交力系的平衡方程。



【特别提示】

应用平面汇交力系的平衡方程，可以求解两个未知量。在实际问题中，如果未知量的数目超过独立的平衡方程的数目，那么，就不能求出全部未知量，这样的问题称为静不定问题；若未知量的数目等于平衡方程的数目，这样的问题称为静定问题。

利用平衡方程求解实际问题时，受力图中的未知力指向可以任意假设，若计算结果为正值，表示假设的指向就是实际的指向；若计算结果为负值，表示假设的指向与实际

际指向相反。

[例 2-2-3] 如图 2-2-7(a) 所示的平面刚架 $ABCD$ ，自重不计，在 B 点作用一水平推力 $P=60\text{ kN}$ ，试求 A 、 D 支座的支座反力。

解：(1) 取刚架为研究对象，刚架受到力 P 及 A 、 D 支座的支座反力 R_A 、 R_D 共三个力的作用而平衡，此三力共面，且可求得 P 和 R_D 两力相交于 C 点。根据三力平衡汇交定理可知， R_A 的作用线必通过 C 点。刚架的受力图如图 2-2-7(b) 所示。

(2) 建立直角坐标系如图 2-2-7(b) 所示，列平衡方程求解

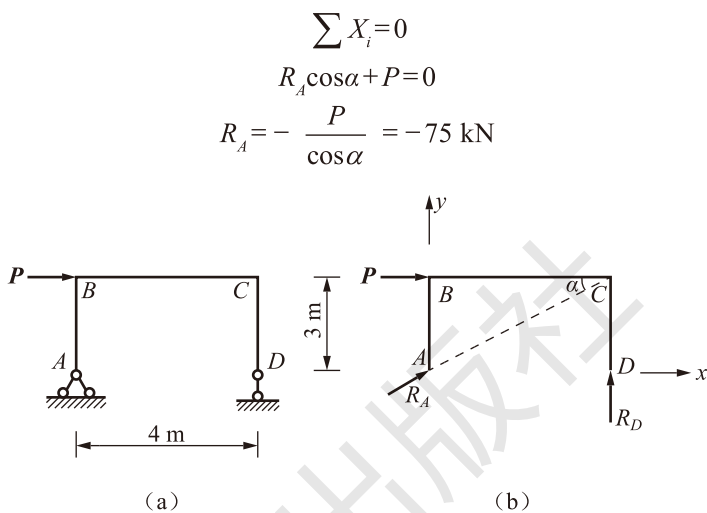


图 2-2-7

【特别提示】

R_A 为负值，表示它的实际指向与受力图中假设的指向相反。应当指出，如果后面用到 R_A 的值，应连同负号一并代入。

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0 \\ R_D + R_A \sin \alpha &= 0 \\ R_D &= -R_A \sin \alpha = 45\text{ kN}\end{aligned}$$

R_D 为正值，表示所假定的指向就是它的实际方向。

二、平面力偶系的合成和平衡

1. 力对点的矩

力对点的矩是力学中的基本概念之一。如图 2-2-8 所示，在扳手上作用一力 F ，扳手与螺钉将一起绕螺钉中心 O 转动。由经验知，力 F 使扳手与螺钉绕 O 点转动的效应既与力 F 的大小有关，也与力 F 的作用线到 O 点的垂直距离 d 有关。在平面问题中，我们以乘积 Fd 冠以适当的正负号，作为度量力 F 使物体绕 O 点转动效应的物理量，这个量称为力对点的矩，简称力矩，以符号 $M_O(F)$ 表示。

$$M_O(F) = \pm Fd \quad (2-2-6)$$

式中, 点 O 称为“矩心”; d 称为“力臂”。通常规定力使物体绕矩心逆时针方向转动时, 力矩取正号; 做顺时针方向转动时, 取负号。力矩的单位为牛·米 ($\text{N}\cdot\text{m}$) 或千牛·米 ($\text{kN}\cdot\text{m}$)。

可见, 在平面问题中, 力对点之矩包含力矩的大小和转向 (以正负表示), 因此, 力矩为代数量。前者度量力使物体产生转动效应的大小, 后者表示转动方向。

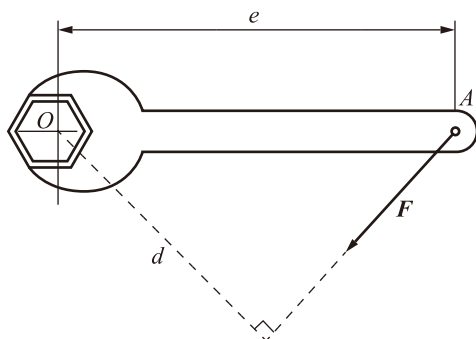


图 2-2-8

【特别提示】

力矩有下列性质:

- (1) 力对矩心之矩, 不仅与力的大小和方向有关, 而且与矩心的位置有关。
- (2) 力沿其作用线滑移时, 力对点之矩不变。
- (3) 当力的作用线通过矩心时, 力矩为零。

[例 2-2-4] 分别计算图 2-2-9 所示的 F_1 、 F_2 对 O 点的力矩。

解: 由式 (2-2-6) 有

$$M_O(F_1) = F_1 d_1 = 10 \times 1 \times \sin 30^\circ = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_O(F_2) = -F_2 d_2 = -30 \times 1.5 = -45 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

合力矩定理: 在计算力矩时, 若直接计算力臂比较困难, 有时, 如果将力适当地分解, 计算各分力的力矩可能很简单, 因此就需要建立合力对某点的力矩与其分力对同一点的力矩之间的关系。

设图 2-2-10 中 A 点上的作用力为 F_1 、 F_2 , 且 $R = F_1 + F_2$, 可以证明

$$M_O(R) = M_O(F_1) + M_O(F_2)$$

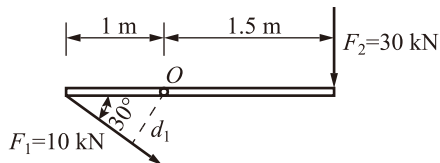


图 2-2-9

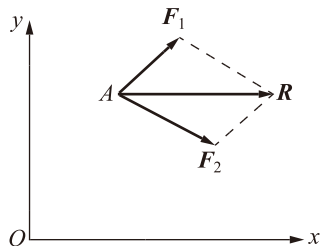


图 2-2-10

对于由 n 个力 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ 组成的汇交力系, 上式同样成立。即

$$M_O(R) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \dots + M_O(F_n) = \sum M_O(F_i) \quad (2-2-7)$$

式(2-2-7)表明,平面汇交力系的合力对平面内任意一点之矩,等于力系中所有分力对同一点之矩的代数和,此关系称为合力矩定理。这个定理对任何力系均成立。

[例 2-2-5] 如图 2-2-11 所示每 1 m 长挡土墙所受土压力的合力为 R , $R=200$ kN, 求土压力 R 使墙倾覆的力矩。

解: 土压力 R 可使挡土墙绕 A 点倾覆, 求 R 使墙倾覆的力矩, 就是求它对 A 点的力矩。由于 R 的力臂求解比较麻烦, 如果将 R 分解为两个分力 F_1 和 F_2 , 两分力的力臂是已知的。因此, 根据合力矩定理, 合力 R 对 A 点之矩等于 F_1 、 F_2 对 A 点之矩的代数和。则:

$$\begin{aligned} M_A(R) &= M_A(F_1) + M_A(F_2) \\ &= F_1 \times \frac{h}{3} - F_2 \times d = 200 \times \cos 30^\circ \times 2 - 200 \times \sin 30^\circ \times 2 \\ &= 146.4 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

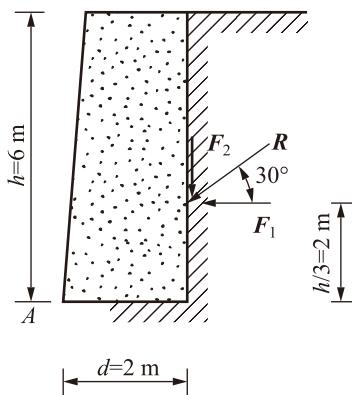


图 2-2-11

2. 平面力偶

在生产实践和日常生活中,经常遇到大小相等、方向相反、作用线不重合的两个平行力所组成的力系。这种力系只能使物体产生转动效应而不能使物体移动。例如,司机操纵方向盘[图 2-2-12(a)]、拧螺栓[图 2-2-12(b)]以及开关自来水龙头或拧钢笔套等。这种大小相等、方向相反、作用线不重合的两个平行力称为力偶,用符号 (F, F') 表示。力偶的两个力作用线间的垂直距离 d 称为力偶臂,力偶的两个力所构成的平面称为力偶作用面。

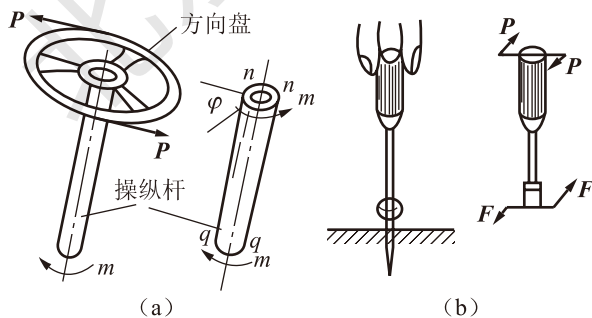


图 2-2-12

实践表明,当组成力偶的力 F 越大以及力偶臂越大,则力偶使物体的转动效应就越强;反之就越弱。因此,与力矩类似,我们用 F 与 d 的乘积来度量力偶对物体的转动效应,并把这一乘积冠以适当的正负号称为力偶矩,用 m 表示,即

$$m = \pm Fd \quad (2-2-8)$$

式中,正负号表示力偶矩的转向,通常规定:若力偶使物体做逆时针方向转动时,力偶矩为正,反之为负。在平面力系中,力偶矩是代数量,其单位与力矩相同。

【特别提示】◆ ...

力偶不同于力，它具有一些特殊的性质：

(1) 力偶没有合力，不能用一个力来代替，在其作用面内，力偶在任一轴上的投影等于零。

(2) 力偶对其作用面内任一点之矩都等于力偶矩，与矩心位置无关。

(3) 同一平面内的两个力偶，如果它们的力偶矩大小相等、转向相同，则这两个力偶等效，称为力偶的等效性。

从以上性质还可得出以下两个推论。

(1) 在保持力偶矩的大小和转向不变的条件下，力偶可在其作用面内任意移动，而不会改变力偶对物体的转动效应。

(2) 在保持力偶矩的大小和转向不变的条件下，可以任意改变力偶中力的大小和力偶臂的长短，而不改变力偶对物体的转动效应。

由以上分析可知，力偶对于物体的转动效应完全取决于力偶矩的大小、力偶的转向及力偶作用面，即力偶的三要素。因此，在力学计算中，有时也用一带箭头的弧线表示力偶，如图 2-2-13 所示，其中箭头表示力偶的转向， m 表示力偶矩的大小。

3. 平面力偶系的合成和平衡

(1) 平面力偶系的合成

作用在同一平面内的若干个力偶称为平面力偶系，如图 2-2-14 所示。平面力偶系合成可以根据力偶的等效性来进行。其合成的结果是：平面力偶系可以合成为一个合力偶，合力偶矩等于力偶系中各分力偶矩的代数和，即

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum m_i \quad (2-2-9)$$

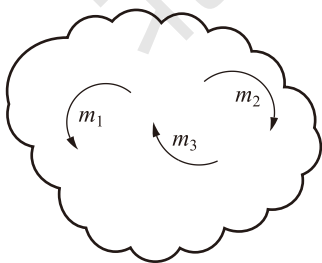


图 2-2-13

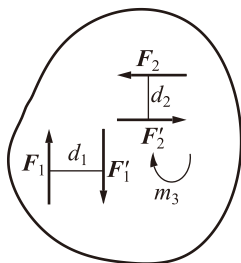


图 2-2-14

[例 2-2-6] 如图 2-2-14 所示，某物体受三个共面力偶的作用，已知 $F_1 = 10 \text{ kN}$ ， $d_1 = 2 \text{ m}$ ， $F_2 = 4 \text{ kN}$ ， $d_2 = 1 \text{ m}$ ， $m_3 = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ，试求其合力偶。

解：

由式 (2-2-8) 得

$$m_1 = -F_1 \cdot d_1 = -10 \times 2 = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$m_2 = F_2 \cdot d_2 = 4 \times 1 = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

合力偶矩

$$M = m_1 + m_2 + m_3 = -20 + 4 - 20 = -36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 平面力偶系的平衡

平面力偶系可以合成为一个合力偶，当合力偶矩等于零时，则力偶系中的各力偶对物体的转动效应相互抵消，物体处于平衡状态。因此，平面力偶系平衡的必要和充分条件是：力偶系中各力偶矩的代数和为零，即

$$M = \sum m_i = 0 \quad (2-2-10)$$

[例 2-2-7] 在梁 AB 的两端各作用一力偶，其力偶矩的大小分别为 $m_1 = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ， $m_2 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ，转向如图 2-2-15(a) 所示，梁跨度 $l = 5 \text{ m}$ ，重量不计。求 A 、 B 处的支座反力。

解：取梁 AB 为研究对象，作用在梁上的力有：两个已知力偶 m_1 、 m_2 和支座 A 、 B 的支座反力 R_A 、 R_B ，其中 B 处为可动铰支座，支座反力 R_B 的方位铅垂，指向假设向上； A 处为固定铰支座，支座反力 R_A 方向本来未能确定，但因梁上只受力偶作用，故 R_A 必须与 R_B 组成一个力偶才能与梁上的力偶平衡，所以 R_A 的方向也为铅垂，指向假设向下。梁 AB 的受力图如图 2-2-15(b) 所示，由式 (2-2-10) 得

$$M = \sum m_i = 0$$

$$m_1 - m_2 + R_A \cdot l = 0$$

故 $R_A = -16 \text{ kN}(\uparrow)$ ，求得结果为负值，说明原假设 R_A 和 R_B 的指向与实际指向相反。

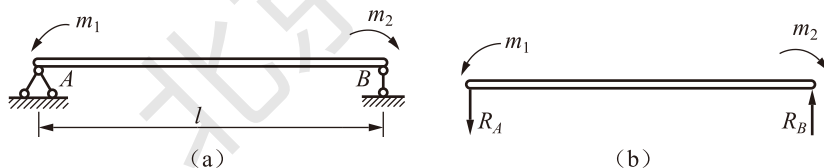


图 2-2-15

[例 2-2-8] 不计重量的水平杆 AB ，受到固定铰支座 A 和链杆 DC 的约束，如图 2-2-16(a) 所示。在杆 AB 的 B 端有一力偶作用，力偶矩的大小为 $M = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。求固定铰支座 A 和链杆 DC 的约束反力。

解：取杆 AB 为研究对象。由于力偶必须由力偶来平衡，支座 A 与链杆 DC 的约束反力必定组成一个力偶与力偶 (F, F') 平衡。链杆 DC 所受的力 F_{DC} 沿 DC 杆的轴线，固定铰支座 A 的反力 F_A 的作用线必与 F_{DC} 平行，而且 $F_A = F_{DC}$ ，假设它们的方向如图 2-2-16(b) 所示，其作用线之间的距离为

$$AE = AC \sin 30^\circ = 0.5 \times 0.5 = 0.25 \text{ m}$$

由平面力偶系的平衡条件，有

$$\sum M = 0 \quad -M - F_A \cdot AE = 0$$

即

$$-100 - 0.25F_A = 0$$

解得

$$F_A = -\frac{100}{0.25} = -400 \text{ N}$$

因而

$$F_{DC} = F_A = -400 \text{ N}$$

F_A 、 F_{DC} 的实际指向与假设相反。

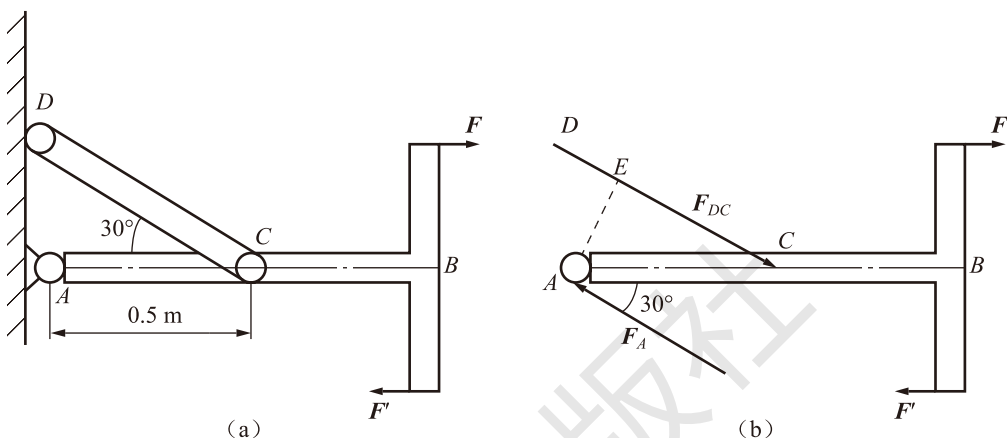


图 2-2-16

三、平面任意力系向一点的简化

1. 平面任意力系的基本概念

如果作用于物体上的力系，各力的作用线都在同一平面内，它们既不全都汇交于一点，也不全都相互平行，这样的力系称为平面任意力系。

在工程实际中，常常遇到一些结构物或构件，它们的厚度比其余两个方向的尺寸小得多，我们把它称之为平面结构或平面构件。作用在这种物体上的各力，其作用线一般都位于该平面内，从而构成平面任意力系。例如，三角形屋架（图 2-2-17），它承受着屋面自重引起的竖直方向荷载 P 、风荷载 Q 以及两端支座的支座反力 X_A 、 Y_A 、 X_B 和 Y_B ，这些力作用在图示屋架平面内，组成了一个平面任意力系。

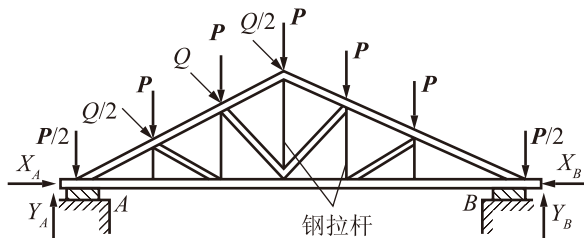


图 2-2-17

此外，有些结构虽然本身并不是平面结构，且所承受的各力本来也不是平面任意力系，但如果结构的本身、荷载及支承都具有同一个对称平面，则作用在物体上的力系就可以

简化为在这个对称平面内的平面任意力系。例如, 图 2-2-18(a) 所示的楼梯板, 沿斜面均布的荷载及两端的约束反力都可向其对称平面内简化 [图 2-2-18(b)], 则作用在斜面长度上的均布荷载 q 及两端的约束反力 X_A 、 Y_A 、 R_B , 组成一个平面任意力系, 如图 2-2-18(c) 所示。

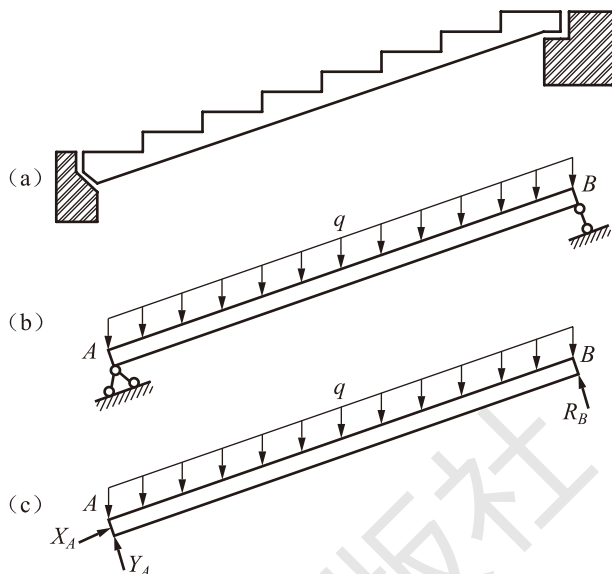


图 2-2-18

2. 力的平移定理

为了解决平面任意力系的简化问题, 需要寻找一种有效的方法, 为此引出力的平移定理。

设刚体的 A 点作用着一个力 F [图 2-2-19(a)], 在此刚体上任取一点 O , 现在来讨论怎样才能把力 F 平移到 O 点, 而不改变其原来的作用效应。为此, 可在 O 点加上两个大小相等、方向相反、与 F 平行的力 F' 和 F'' , 且 $F=F'=F''$ [图 2-2-19(b)], 根据加减平衡力系公理, F 、 F' 和 F'' 与图 2-2-19(a) 的 F 对刚体的作用效应相同。显然, F'' 和 F 组成一个力偶, 其力偶矩为

$$M = Fd = M_O(F)$$

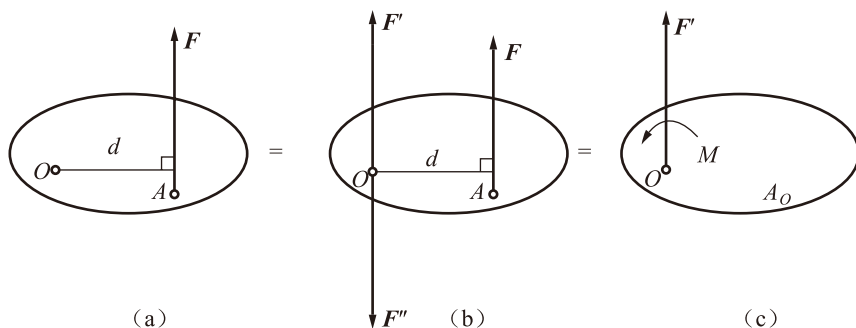


图 2-2-19

这三个力可转换为作用在 O 点的一个力和一个力偶 [图 2-2-19(c)]。由此可得力的

平移定理：作用于刚体上的力，可以平移到同一刚体的任一指定点，但同时必须附加一力偶，其力偶矩等于原来的力对此指定点的矩。

应用力的平移定理时必须注意：

- (1) 力线平移时所附加的力偶矩的大小、转向与平移点的位置有关；
- (2) 力的平移定理只适用于刚体，对变形体不适用，并且力的作用线只能在同一刚体内平移，不能平移到另一刚体；
- (3) 力的平移定理的逆定理也成立。

力的平移定理是平面任意力系向一点简化的理论依据，也是分析力对物体作用效应的一个重要方法。例如，图 2-2-20(a) 所示的厂房的柱子受到吊车梁传来的荷载 F 的作用，为分析 F 的作用效应，可将力 F 平移到柱的轴线上的 O 点，根据力的平移定理得一个力 F' ，同时还必须附加一个力偶 [图 2-2-20(b)]。力 F 经平移后，它对柱子的变形效果就可以很明显地看出来，力 F' 使柱子轴向受压，力偶使柱子弯曲。

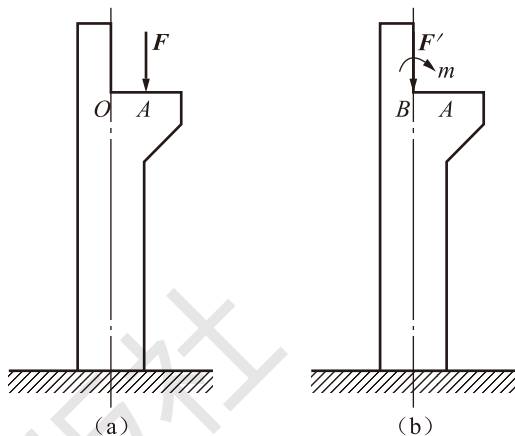


图 2-2-20

3. 平面任意力系向平面内一点的简化

将平面任意力系进行简化，可以连续应用力的平行四边形法则，将力系中各力逐个合成，直到求得最后的结果，但这样的方法使力的合成过程过分烦琐。这里将介绍一种较为简单且具有普遍性的方法，这个方法称为力系向一点 O 简化， O 点称为简化中心。这个方法的实质在于将一个平面任意力系变换为平面汇交力系和平面力偶系。

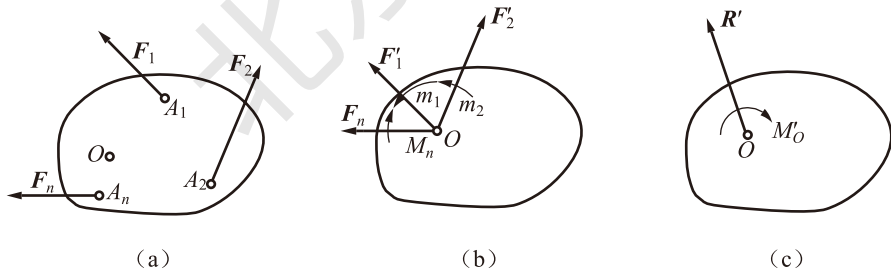


图 2-2-21

设刚体上作用着平面任意力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$ ，如图 2-2-21(a) 所示，各力作用点分别为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，在力系所在平面内任选一点 O 为简化中心，并根据力的平移定理将力系中各力平移到 O 点。于是原力系就转化成为作用于 O 点的一个平面汇交力系 $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ 以及相应的一个力偶矩分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 的附加平面力偶系 [图 2-2-21(b)]。其中： $F'_1 = F_1, F'_2 = F_2, \dots, F'_n = F_n$ ； $m_1 = M_O(F_1), m_2 = M_O(F_2), \dots, m_n = M_O(F_n)$ 。

现分别将这两个力系合成，如图 2-2-21(c) 所示。

将平面汇交系 $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ 合成为一个力，该力称为原力系的主矢量，记作 R' ，即

$$R' = F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_n = \sum F'_i = \sum F_i$$

其作用点在简化中心 O ，大小、方向可用解析法计算

$$\begin{cases} X' = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum X_i \\ Y' = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \sum Y_i \end{cases} \quad (2-2-11)$$

$$\begin{cases} R' = \sqrt{X'^2 + Y'^2} = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2} \\ \tan \alpha = \left| \frac{Y'}{X'} \right| = \left| \frac{\sum Y_i}{\sum X_i} \right| \end{cases} \quad (2-2-12)$$

式中， α 为 R' 与 x 轴所夹的锐角。

R' 的指向可由 $\sum X_i$ 、 $\sum Y_i$ 的正负来确定。

对于附加力偶系，可以合成为一个合力偶，其力偶矩称为原力系的主矩，记作 M'_O ，即

$$M'_O = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \cdots + M_O(F_n) = \sum M_O(F_i) \quad (2-2-13)$$

综上所述，可得出如下结论：平面任意力系向作用面内任一已知点简化，一般可以得到一个力和一个力偶。这个力作用在简化中心，其矢量称为原力系的主矢，并等于这个力系中各力的矢量和；这个力偶的力偶矩称为原力系对于简化中心的主矩，并等于这个力系中各力对简化中心的矩的代数和。

[例 2-2-9] 如图 2-2-22 所示，物体受 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 、 F_5 五个力的作用，已知各力的大小均为 10 N，试将该力系分别向 A 点和 D 点简化。

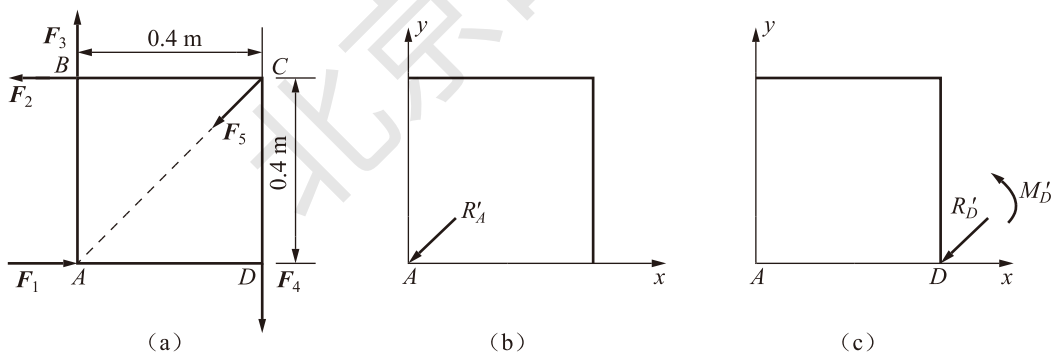


图 2-2-22

解：建立直角坐标系 yAx ，如图 2-2-22(b)、(c) 所示。

(1) 向 A 点简化，由式 (2-2-11) 得

$$X' = \sum X_i = F_1 - F_2 - F_5 \cos 45^\circ = (10 - 10 - 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = -5\sqrt{2} \text{ N}$$

$$Y' = \sum Y_i = F_3 - F_4 - F_5 \sin 45^\circ = (10 - 10 - 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = -5\sqrt{2} \text{ N}$$

$$R'_A = \sqrt{X'^2 + Y'^2} = 10 \text{ N} \quad M'_A = \sum M_A(F) = 0.4F_2 - 0.4F_4 = 0$$

向 A 点简化的结果, 如图 2-2-22(b) 所示。

(2) 同理, 向 D 点简化可得

$$R_D' = 10 \text{ N} \quad M_D' = 2\sqrt{2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

如图 2-2-22(c) 所示 (分析略)。

由例 2-2-9 可知, 平面任意力系的主矢只是原力系中各力的矢量和, 所以它的大小和方向均与简化中心的位置无关, 而力系对于简化中心的主矩一般地说与简化中心的位置有关, 这是因为选择不同的点为简化中心时, 各力对简化中心的矩也随之改变。

学习拓展

我们可以将平面任意力系的简化理论应用于分析平面固定端支座的约束特性。例如: 有一根梁, 它的一端嵌入墙体内, 使梁固定不动, 墙即为梁的固定端支座, 如图 2-2-23 所示。固定端对物体的约束反力是分布在物体的整个接触面上的, 而且组成一个平面任意力系。如果将这个力系向 A 点简化, 可以得到一个力和一个力偶, 若将这个

力沿直角坐标轴方向分解为水平和竖直两个分量, 则固定端对物体的作用, 以水平、竖直两个方向的约束反力和一个约束反力偶表示。因此, 在一般情况下, 固定端支座反力不仅包含着阻止物体向任何方向移动的水平反力和竖直反力, 还有阻止物体转动的反力偶。

平面任意力系向一点简化, 一般可得到一个力和一个力偶, 但这并不是最后的简化结果。根据主矢与主矩是否存在, 可能出现下列几种情况:

(1) 主矢 $R' \neq 0$, 主矩 $M_O' = 0$, 此时原力系简化为一个作用于简化中心 O 的一个力 R' , 这个力 R' 即为原力系的合力。

(2) 主矢 $R' = 0$, 主矩 $M_O' \neq 0$, 此时原力系简化为一个力偶, 此力偶即为原力系的合力偶, 其力偶矩等于主矩 M_O' 。在这种情况下, 因为力偶对其作用面内任一点的矩恒等于力偶矩本身, 故主矩与简化中心的位置无关。也就是说, 原力系不论向其所在作用面内哪一点简化, 其结果都是一个力偶, 且力偶矩也应该相等。

(3) 主矢 $R' \neq 0$, 主矩 $M_O' \neq 0$, 此时根据力的平移定理的逆定理, 力系可以简化为一个合力 R , 如图 2-2-24 所示。

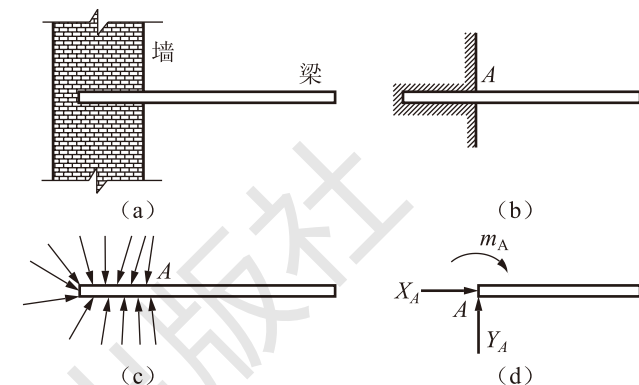


图 2-2-23

$$M_O(R) = Rd = M_O'$$

$$\text{根据式 (2-2-12): } M_O' = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \cdots + M_O(F_n) = \sum M_O(F_i)$$

所以

$$M_O(R) = \sum M_O(F_i) \quad (2-2-14)$$

即当平面任意力系简化为一个合力时, 合力对力系所在平面内任一点的矩, 等于力系中各力对同一点的矩的代数和。这称为平面任意力系的合力矩定理。

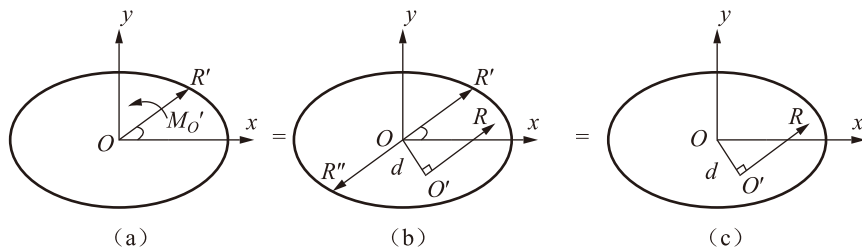


图 2-2-24

(4) 主矢 $R'=0$, 主矩 $M_O'=0$, 此时力系处于平衡状态。

四、平面任意力系的平衡条件和平衡方程

平面任意力系简化后, 主矢等于零, 表明作用于简化中心的汇交力系相互平衡; 主矩等于零, 表明附加力偶系也相互平衡, 则刚体平衡。反之, 若刚体平衡, 主矢、主矩必同时为零。所以平面一般力系平衡的必要和充分条件是力系的主矢和主矩同时为零。即

$$R'=0 \quad M_O'=0$$

根据式 (2-2-12)、式 (2-2-13)

$$R' = \sqrt{X'^2 + Y'^2} = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2}$$

$$M_O' = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \cdots + M_O(F_n) = \sum M_O(F_i)$$

若使 $R'=0$, $M_O'=0$, 则必须

$$\begin{cases} \sum X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0 \\ \sum Y_i = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0 \\ \sum M_O(F_i) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \cdots + M_O(F_n) = 0 \end{cases} \quad (2-2-15)$$

即平面任意力系平衡的必要和充分条件是力系中各力在作用面内两个直角坐标轴上的投影的代数和等于零, 以及力系对该平面内任一点的矩的代数和也等于零。

式 (2-2-15) 称为平面任意力系平衡方程的基本形式, 其中前两个称为投影方程, 后一个称为力矩方程。这三个方程是彼此独立的, 可以求解出三个未知量。

【特别提示】

在应用式 (2-2-15) 求解平衡问题时, 为了使计算简便, 通常将矩心选在两个未知力的交点上; 而坐标轴则尽可能选取与力系中尽量多的未知力的作用线垂直。

现举例说明应用平面任意力系的平衡条件来求解工程实际中物体平衡问题的步骤和方法。

[例 2-2-10] 悬臂梁 AB 受荷载作用, 如图 2-2-25(a) 所示, A 端为固定端支座, B 端为自由端。已知均布荷载 $q=10 \text{ kN/m}$, $l=2 \text{ m}$, 梁自重不计。求 A 支座的支座反力。

解：(1) 取梁 AB 为研究对象，受力图如图 2-2-25(b) 所示，支座反力的指向均为假设，梁上所受的荷载与支座反力组成平面任意力系。

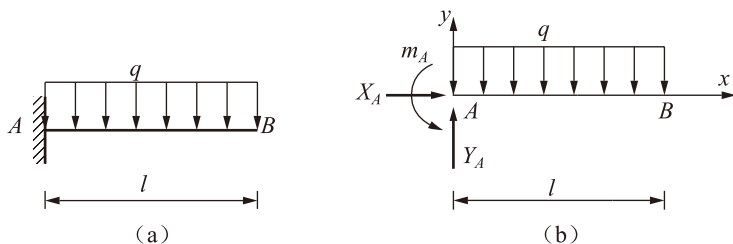


图 2-2-25

(2) 选取坐标系如图 2-2-25(b) 所示，列平衡方程如下

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 & X_A &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 & Y_A - ql &= 0 \\ \sum M_A &= 0 & m_A - ql \times \frac{l}{2} &= 0\end{aligned}$$

解得 $X_A = 0 \quad Y_A = ql = 20 \text{ kN} \quad m_A = \frac{ql^2}{2} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$

求得结果为正值，说明假设支座反力的指向与实际相同。

平面任意力系的平衡方程除了式 (2-2-15) 所表示的基本形式以外，还可以将平衡方程改写成二矩式和三矩式的形式。

(1) 二矩式

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum M_A(F_i) = 0 \\ \sum M_B(F_i) = 0 \end{cases} \quad (2-2-16)$$

式中 A 、 B 连线不垂直于 x 轴。

(2) 三矩式

$$\begin{cases} \sum M_A(F_i) = 0 \\ \sum M_B(F_i) = 0 \\ \sum M_C(F_i) = 0 \end{cases} \quad (2-2-17)$$

式中 A 、 B 、 C 三点不共线。

【特别提示】 ◆ ...

三组方程都可以用来解决平面任意力系的平衡问题，究竟选取哪一组方程，需根据具体条件确定。对于受平面任意力系作用的单个物体的平衡问题，只可以写出三个独立的平衡方程，求解三个未知量。任何第四个方程都是不独立的，我们可以利用不独立的方程来校核计算的结果。

[例 2-2-11] 简支刚架如图 2-2-26(a) 所示, 已知 $P=30\text{ kN}$, $m=6\text{ kN}\cdot\text{m}$, $Q=60\text{ kN}$, 求 A 、 B 支座的支座反力。

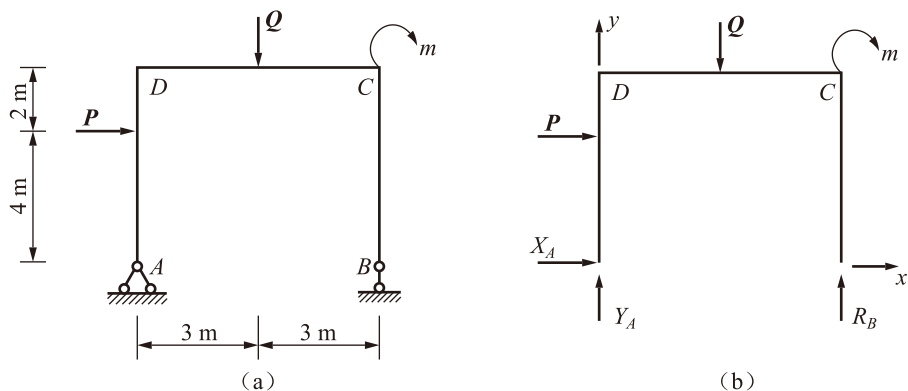


图 2-2-26

解: (1) 取刚架整体为研究对象, 受力图如图 2-2-26(b) 所示, 支座反力的指向均为假设, 刚架上所受的荷载与支座反力组成平面任意力系。

(2) 选取坐标系如图 2-2-26(b) 所示, 列平衡方程如下

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 & X_A + P &= 0 \\ \sum M_A &= 0 & R_B \times 6 - m - Q \times 3 - P \times 4 &= 0 \\ \sum M_B &= 0 & -Y_A \times 6 - m + Q \times 3 - P \times 4 &= 0\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}X_A &= -30\text{ kN}(\leftarrow) \\ Y_A &= 9\text{ kN} \\ R_B &= 51\text{ kN}\end{aligned}$$

求得 X_A 为负值, 说明假设的指向与实际相反; Y_A 、 R_B 为正值, 说明假设的指向与实际相同。

校核

$$\sum Y = Y_A + R_B - Q = 9 + 51 - 60 = 0$$

说明计算无误。

对于简支梁、简支刚架均适于采用二矩式平衡方程求解支座反力。

[例 2-2-12] 某房屋的外伸梁构造及尺寸如图 2-2-27(a) 所示, 该梁的力学简图如图 2-2-27(b) 所示。已知 $q_1=20\text{ kN/m}$, $q_2=25\text{ kN/m}$, 求 A 、 B 支座的支座反力。

解: (1) 取外伸梁 AC 为研究对象, 其受力图如图 2-2-27(c) 所示, 支座反力的指向均为假设。

(2) 选取坐标系如图 2-2-27(c) 所示, 列平衡方程如下

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 & X_A &= 0 \\ \sum M_A &= 0 & R_B \times 5 - 20 \times 5 \times 2.5 - 25 \times 2 \times 6 &= 0 \\ \sum M_B &= 0 & -Y_A \times 5 + 20 \times 5 \times 2.5 - 25 \times 2 \times 1 &= 0\end{aligned}$$

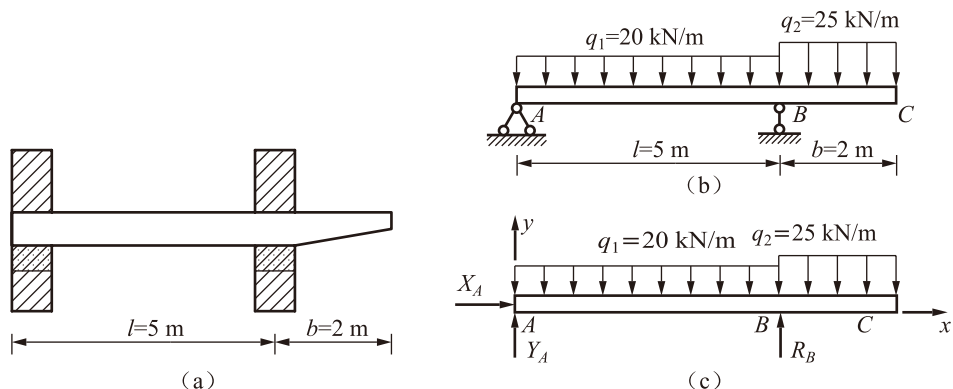


图 2-2-27

解得 $X_A=0$; $Y_A=40 \text{ kN}$; $R_B=110 \text{ kN}$

计算结果均为正值, 说明假设的指向与实际指向相同。

校核 $\sum Y=Y_A+R_B-20 \times 5-25 \times 2=0$

说明计算无误。

本例中梁 AC 所受的平面力系称为平面平行力系, 平面平行力系是平面任意力系的一种特殊情况。当选取的 x 轴与各力垂直时, 则不论力系是否平衡, 每一个力在 x 轴上的投影恒等于零, 即 $\sum X_i \equiv 0$, $X_A \equiv 0$ 。于是, 平面平行力系只有两个独立的平衡方程, 即

$$\begin{cases} \sum Y_i = 0 \\ \sum M_O = 0 \end{cases}$$

平面平行力系的平衡方程也可以写成二矩式的形式, 即

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

式中 A 、 B 两点的连线不与力线平行。

利用平面平行力系的平衡方程, 可求解两个未知量。

学习任务小结

1. 平面汇交力系

- (1) 平面内各力的作用线汇交于一点称为平面汇交力系。
- (2) 平面汇交力系的合成可以采用力的多边形法则, 也可采用合力投影定理确定。
- (3) 平面汇交力系的平衡的充分必要条件是合力为零, 即 $R=0$, 平衡方程为

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases}$$

2. 平面力偶系

- (1) 平面内仅由若干个力偶组成的力系称为平面力偶系。
- (2) 平面力偶系的合成公式为

$$M = \sum m_i$$

- (3) 平面力偶系的平衡方程为

$$\sum m_i = 0$$

3. 平面任意力系

- (1) 平面任意力系向平面内任意一点简化将产生一个合力即主矢和一个合力偶即主矩。
- (2) 平面任意力系平衡的充分必要条件是主矢和主矩同时为零。
- (3) 平面任意力系的平衡方程的一般表达式为

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \\ \sum M_O(F_i) = 0 \end{cases}$$

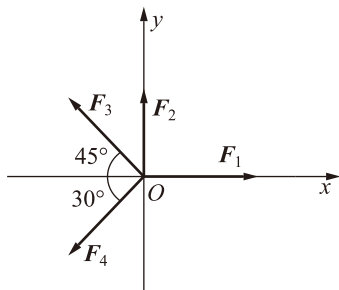
职业技能知识点考核

一、问答题

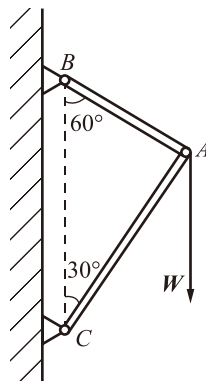
1. 怎样的力偶才是等效力偶？等效力偶是否两个力偶的力和力臂都应该分别相等？
2. 分析力和力偶的区别与联系。
3. 平面任意力系向简化中心简化时，可能产生几种结果？
4. 平面任意力系的平衡方程有几种形式？应用时有什么限制条件？

二、计算题

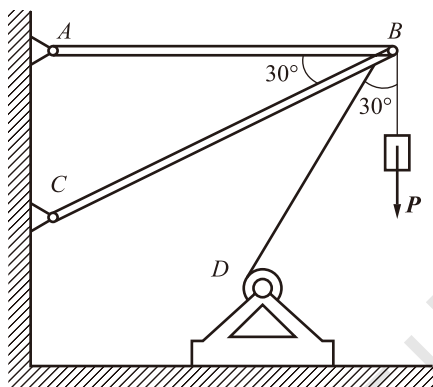
1. 已知 $F_1=20\text{ N}$, $F_2=10\text{ N}$, $F_3=10\text{ N}$, $F_4=24\text{ N}$, 各力的方向如题 1 图所示。试求合力。
2. 如题 2 图所示，支架由杆 AB 、 AC 构成， A 、 B 、 C 处都是铰接。在 A 点有铅垂力 W 。求 AB 、 AC 杆所受的力。
3. 物体重 $P=100\text{ kN}$ ，用绳子挂在支架的滑轮 B 上，绳子的另一端接在绞车 D 上，如题 3 图所示。转动绞车，物体便能升起。设滑轮的大小及轴承的摩擦略去不计，杆重不计， A 、 B 、 C 三处均为铰链连接。当物体处于平衡状态时，求拉杆 AB 和支杆 BC 所受的力。
4. 在四链杆机构 $ABCD$ 的铰链 B 和 C 上分别作用有力 F_1 和 F_2 ，该机构在图示位置平衡。求平衡时力 F_1 和 F_2 的关系。



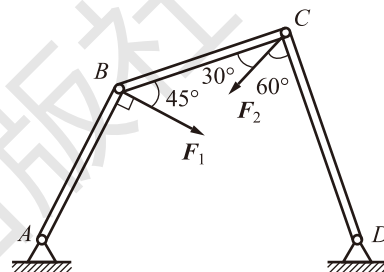
题 1 图



题 2 图

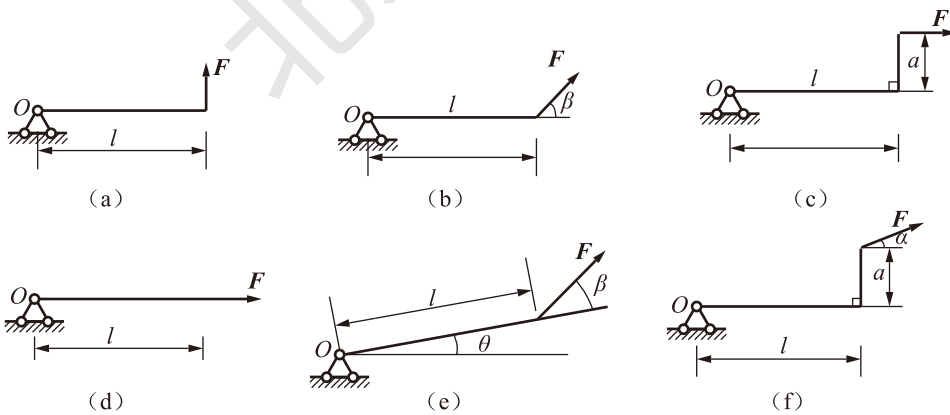


题 3 图



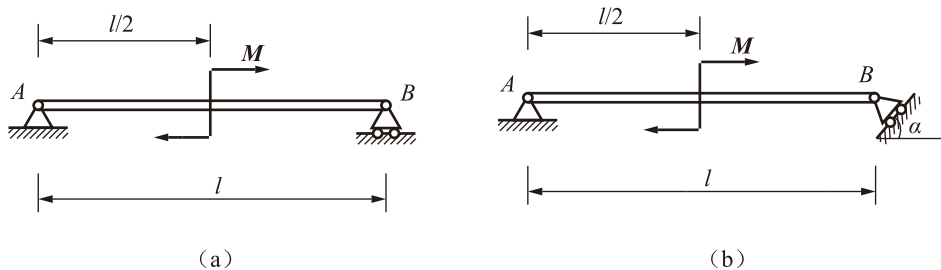
题 4 图

5. 如题 5 图所示，试求各力对 O 点之矩。



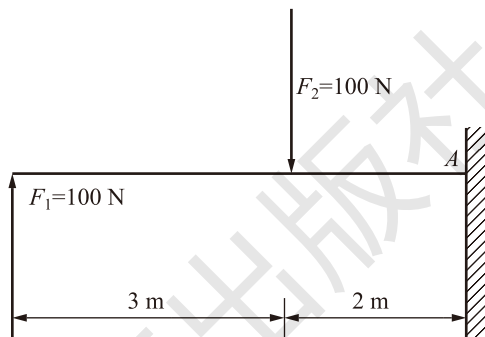
题 5 图

6. 已知梁 AB 上作用一力偶，力偶矩为 M ，梁长为 l ，梁重不计。求在题 6 图 (a)、(b) 两种情况下，支座 A 和 B 的约束反力。



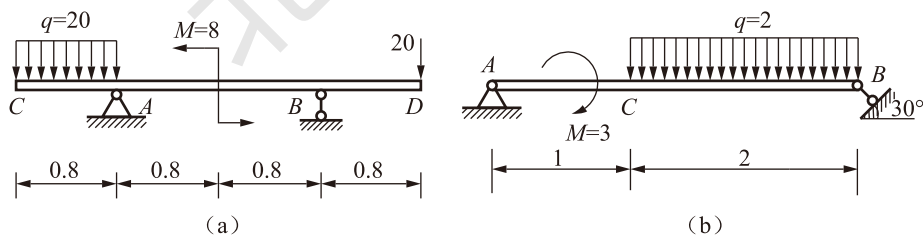
题 6 图

7. 如题 7 图所示，悬臂梁受力 F_1 和 F_2 的作用，求 A 支座的约束反力。



题 7 图

8. 试求题 8 图所示各梁支座的约束反力。设力的单位为 kN ，力偶矩的单位为 $\text{kN} \cdot \text{m}$ ，长度的单位为 m ，分布载荷集度为 kN/m 。



题 8 图