



中等职业教育公共基础课程改革教材

数学

SHUXUE
(基础模块)

练习册 | 第二册

主 编 金桂堂

数
学
(基础模块)

练习册
第二册

主
编
金桂堂



北京出版集团公司
北 京 出 版 社

北京出版集团公司
北京出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学(基础模块)练习册.第2册/金桂堂主编. —
北京:北京出版社,2010.1(2019重印)
ISBN 978-7-200-08125-1

I. ①数… II. ①金… III. ①数学课—专业学校—习
题 IV. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第014950号

数学(基础模块)练习册 第二册

SHUXUE JICHU MOKUAI LIANXICE DIERCE

主 编:金桂堂
出 版:北京出版集团公司
北 京 出 版 社
地 址:北京北三环中路6号
邮 编:100120
网 址:www.bph.com.cn
总发行:北京出版集团公司
经 销:新华书店
印 刷:定州市新华印刷有限公司
版 次:2010年1月第1版 2019年1月修订 2021年1月第11次印刷
开 本:787毫米×1092毫米 1/16
印 张:11
字 数:193千字
书 号:ISBN 978-7-200-08125-1
定 价:22.00元

质量监督电话:010-828685218 010-58572162 010-58572393

目 录

第六章 数列	/1
6.1 数列的概念	/1
6.1.1 数列的概念	/1
6.1.2 数列的通项公式	/1
6.1.3 数列的前 n 项和	/1
6.2 等差数列	/5
6.2.1 等差数列的定义	/5
6.2.2 等差数列的通项公式	/5
6.2.3 等差数列前 n 项和公式	/8
6.2.4 等差数列的简单应用	/10
6.3 等比数列	/13
6.3.1 等比数列的定义	/13
6.3.2 等比数列的通项公式	/13
6.3.3 等比数列前 n 项和公式	/16
6.3.4 等比数列的简单应用	/18
第七章 平面向量	/24
7.1 平面向量的概念	/24
7.2 平面向量的线性运算	/28
7.2.1 平面向量的加法运算	/28
7.2.2 平面向量的减法运算	/32
7.2.3 平面向量的数乘运算	/35
7.3 平面向量的坐标表示	/39
7.3.1 平面向量的坐标表示	/39

7.3.2	平面向量的坐标运算	/39
7.4	平面向量的内积	/43
7.4.1	平面向量的内积	/43
7.4.2	平面向量内积的坐标表示	/46
第八章	直线和圆的方程	/52
8.1	平面解析几何的两个基本公式	/52
8.1.1	两点间距离公式	/52
8.1.2	线段的中点坐标公式	/52
8.2	直线的方程	/55
8.2.1	直线的倾斜角与斜率	/55
8.2.2	直线的点斜式方程和斜截式方程	/58
8.2.3	直线的一般式方程	/58
8.3	两条直线的位置关系	/62
8.3.1	两条相交直线的交点	/62
8.3.2	两条直线平行的条件	/62
8.3.3	两条直线垂直的条件	/62
8.3.4	点到直线的距离公式	/68
8.4	圆的方程	/71
8.4.1	圆的定义和标准方程	/71
8.4.2	圆的一般方程	/71
8.4.3	直线与圆的位置关系	/74
8.5	直线与圆的方程的简单应用	/77
第九章	立体几何	/83
9.1	平面的基本性质	/84
9.2	直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系	/86
9.2.1	直线与直线的位置关系	/86
9.2.2	直线与平面的位置关系	/89
9.2.3	平面与平面的位置关系	/90

9.3	直线与平面、平面与平面的平行的判定与性质	/92
9.3.1	直线与平面平行的判定与性质	/92
9.3.2	平面与平面平行的判定与性质	/95
9.4	直线与平面、平面与平面垂直的判定与性质	/97
9.4.1	直线与平面垂直的判定与性质	/97
9.4.2	平面与平面垂直的判定与性质	/101
9.5	常见几何体	/104
9.5.1	正棱柱及其表面积、体积	/104
9.5.2	正棱锥及其表面积、体积	/106
9.5.3	圆柱、圆锥、球及其表面积、体积	/108
第十章	概率与统计	/114
10.1	两个计数原理	/114
10.2	随机事件和概率	/117
10.3	直方图与频率分布	/119
10.4	随机抽样	/123
10.5	用样本估计总体	/126
10.6	一元线性回归	/129
答案与提示		/135

第六章 数列



学习目标

数列是职高数学课程的重要内容,是数学应用于实际的重要题材,是进一步学习高等数学的基础知识.

本章的学习目标为:

1. 通过日常生活中的实例,了解数列的概念和几种简单的表示方法(列表、图象、通项公式),了解数列是一种特殊函数.
2. 了解数列通项公式的意义,并能根据递推公式写出数列的前几项.能求某些数列的通项公式.
3. 理解等差数列的概念,掌握等差数列的通项公式与前 n 项和公式,并能解决简单的实际问题.
4. 理解等比数列的概念,掌握等比数列的通项公式与前 n 项和公式,并能解决简单的实际问题.

6.1 数列的概念

6.1.1 数列的概念

6.1.2 数列的通项公式

6.1.3 数列的前 n 项和



例题点拨

例1 已知数列 $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \dots, (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}, \dots$, 那么它第5项的值等于 ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $-\frac{1}{5}$

C. $-\frac{1}{25}$

D. $\frac{1}{25}$

分析: 首先, 我们已知数列的通项公式为 $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$, 将 $n=5$ 代入通项公式, 可得 $a_5 = (-1)^5 \times \frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$.

解: 选 C

点评: 数列的通项就是数列的第 n 项公式, 求第 5 项时取 $n=5$. 要注意, 计算 $(-1)^n$ 的值时不要算错了, -1 的偶次方的值是 1, -1 的奇次方的值是 -1 .

例2 数列 $\frac{1}{1 \times 2}, -\frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, -\frac{1}{4 \times 5}, \dots$ 的一个通项公式为 ()

A. $\frac{1}{n(n+1)}$

B. $-\frac{1}{n(n+1)}$

C. $\frac{1}{n(n-1)}$

D. $\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

分析: 数列各项的绝对值都等于其相应的序号与序号加 1 的积的倒数, 且奇数项为正, 偶数项为负, 所以通项公式为 $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$.

解: 选 D

点评: 求数列的通项公式时, 要仔细观察该数列的各项变化规律. 需要注意一个数列的通项公式并不是唯一的, 该题的通项公式也可以是 $a_n = \frac{(-1)^{n+3}}{n(n+1)}$. 当然, 有的数列通项公式是不存在的, 例如: π 精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不同近似值组成的数列 3.1, 3.14, 3.142, 3.1416, 3.14159, $\dots$, 该数列就没有通项公式.

基础达标

一、选择题

1. $\frac{2^2-1}{5}, \frac{3^2-1}{10}, \frac{4^2-1}{15}, \frac{5^2-1}{20}, \dots$ 的一个通项公式为 ()

A. $a_n = \frac{(n+1)^2-1}{n+5}$

B. $a_n = \frac{(n+1)^2-1}{5n}$

C. $a_n = \frac{n^2-1}{5n}$

D. $a_n = \frac{(n+1)^2-1}{5^n}$

2. 下列说法中, 正确的是 ()

A. 数列 1, 2, 3 和数列 3, 2, 1 是同一数列

B. 数列 1, 2, 3 和数列 1, 2, 3, 4 是同一数列

- C. 数列 $1, 2, 3, 4, \dots$ 的一个通项公式是 $a_n = n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)
 D. 数列 $1, 2, 3, 4, \dots$ 的通项公式是 $a_n = 2n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)
3. 已知数列的通项公式为 $a_n = 3^{n+1}$, 则 a_3 的值为 ()
 A. 12 B. 27 C. 81 D. 243
4. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_1 = 1$, 则 $a_6 =$ ()
 A. 31 B. 33 C. 61 D. 63

二、填空题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n^2 + 15$, 那么 $a_3 =$ _____.
2. 写出数列 $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$ 的一个通项公式 $a_n =$ _____.
3. $\frac{1}{72}$ 是数列 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ 的第 _____ 项.
4. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_{n+1} = n - \sqrt{n+1}$, 则 $a_{16} =$ _____.

三、解答题

根据数列的前几项, 写出下列各数列的一个通项公式:

1. $0, 1, 2, 3, 4, \dots$; 2. $2, 4, 6, 8, 10, \dots$;
3. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$; 4. $1, \frac{4}{3}, \frac{9}{5}, \frac{16}{7}, \dots$.



能力提升

一、选择题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{1}{2}n(n+2)$, 则 220 是这个数列的 ()
 A. 第 19 项 B. 第 20 项
 C. 第 21 项 D. 第 22 项

2. 数列 1, 0, 2, 0, 3, ... 的通项公式为 ()

A. $a_n = \frac{n - (-1)^n n}{2}$

B. $a_n = \frac{(n+1) [1 - (-1)^n]}{4}$

C. $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

D. $a_n = \frac{(n-1) [1 - (-1)^n]}{4}$

3. 数列 1, 3, 6, 10, x , 21, 28, ... 中 x 的值为 ()

A. 12

B. 15

C. 17

D. 18

4. 数列 1, 3, 6, 10, ... 的一个通项公式是 ()

A. $a_n = n^2 - (n-1)$

B. $a_n = \frac{1}{2}n^2 - (n-1)$

C. $a_n = \frac{1}{2}n^2 - (n-1) + 1$

D. $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$

二、填空题

1. 数列 $\{n(n+2)\}$ 的第_____项是 255.

2. 数列 $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{15}, \dots$, 则 $5\sqrt{3}$ 是它的第_____项.

3. 写出数列 $\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{8}, -\frac{9}{16}, \dots$ 的一个通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n+2}$ 对任意正整数都成立, 且 $a_7 = \frac{1}{2}$,

则 $a_6 = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

根据数列的前几项, 写出下列各数列的一个通项公式:

1. $1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5\frac{1}{8}, 7\frac{1}{16}, \dots;$

2. $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots;$

3. $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots;$

4. $9, 99, 999, 9999, \dots.$

6.2 等差数列

6.2.1 等差数列的定义

6.2.2 等差数列的通项公式



例题点拨

例1 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $d=3$, 那么当 $a_n=298$ 时, 项数 n 等于 ()

- A. 98 B. 99 C. 100 D. 101

分析: 本题可直接利用通项公式 $a_n=a_1+(n-1) \cdot d$ 求出 n .

因为 $a_1=1$, $d=3$,

所以 $298=1+(n-1) \times 3$,

解这个方程得 $n=100$.

解: 选 C

点评: 在等差数列通项 $a_n=a_1+(n-1) \cdot d$ 中, 有四个基本量 a_1 , d , n , a_n . 如果知道其中三个, 即可求出另外一个, 它体现了等差数列计算和证明中的最基本的思想方法.

例2 设 a , b , c 均为正数, $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$ 成等差数列, 那么 a , b , c 的关系可以表示成 ()

- A. $2b=a+c$ B. $b^2=ac$ C. $b=\sqrt{a}+\sqrt{c}$ D. $\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$

分析: 因为 a , b , c 均为正数, $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$ 成等差数列, 依等差数列中项定义有

$$2\lg b = \lg a + \lg c,$$

所以 $b^2=ac$.

解: 选 B

点评: x , y , z 成等差数列, 等价于 $2y=x+z$, 是等差数列很重要的性质.

等差数列还有下列性质: 若 $m+n=p+q$, 则 $a_m+a_n=a_p+a_q$. 利用它解答有关等

差数列问题较为简便.

例3 已知三个数成等差数列, 且它们的和为 12, 积为 28, 求这三个数.

分析: 三个数成等差数列, 可设此三个数分别为 $a-d$, a , $a+d$, 由题设知这三个数的和为 12, 积为 28, 列出关于 a , d 的二元方程组, 求出 a , d , 即可求出这三个数.

解: 设这三个数分别为 $a-d$, a , $a+d$, 由题设, 有

$$\begin{cases} (a-d) + a + (a+d) = 12, \\ (a-d) \cdot a \cdot (a+d) = 28. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=4, \\ d=3. \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=4, \\ d=-3. \end{cases}$$

所以这三个数分别为 1, 4, 7 或 7, 4, 1.

基础达标

一、选择题

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $d=3$, 那么当 $a_n=32$ 时, 项数 n 等于 ()
A. 8 B. 9 C. 10 D. 11
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=-\frac{3}{2}$, $a_6=1$, 则 d 等于 ()
A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$
3. 若实数 $a=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, 则 a 与 b 的等差中项是 ()
A. $-\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$
4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=3$, $a_4=6$, 则 a_3 等于 ()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 4.5

二、填空题

1. 已知等差数列 11, 6, 1, ... 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 18, 4, x 成等差数列, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知等差数列 $a_1=10$, $a_9=34$, 则 $d = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $d=0.75$, $n=30$, $a_n=15.75$, 则 $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

在等差数列 $\{a_n\}$ 中:

- (1) 已知 $a_6=24$, $a_9=39$, 求 a_1 和 d ;
 (2) 已知 $d=-\frac{1}{3}$, $a_7=8$, 求 a_1 ;
 (3) 已知 $a_1=5.6$, $a_6=20.6$, 求 a_4 ;
 (4) 已知 $a_2=8$, $a_8=2$, 求 a_{11} .



能力提升

一、选择题

- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3=6$, $a_6=3$, 则 $a_9=$ ()
 A. 27 B. 12 C. 6 D. 0
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=30$, 则 $a_7=$ ()
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d=1$, $a_4+a_{17}=8$, 则 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=$ ()
 A. 40 B. 45 C. 50 D. 55
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_7 是方程 $x^2-6x+4=0$ 的两个根, 则 $a_3+a_4+a_5=$ ()
 A. 3 B. 6 C. 8 D. 9

二、填空题

- 若三角形的三个内角 A, B, C 成等差数列, 则 $B=$ _____.
- 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_6+a_8=-20$, $a_{10}=-25$, 则 $a_4=$ _____.
- $\sin^2\alpha$ 和 $\cos^2\alpha$ 的等差中项是_____.
- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=a_{n-1}+5$, 且 $a_1=1$, 则其通项公式 $a_n=$ _____.

三、解答题

- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前三项为 $x-1, x+1, 2x+3$.
 (1) 求 x 的值;
 (2) 求这个数列的通项公式.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 + a_4 + a_7 = 39$, $a_2 + a_5 + a_8 = 33$, 求 $a_3 + a_6 + a_9$ 的值.

6.2.3 等差数列前 n 项和公式



例题点拨

例1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 2$, $S_{10} = 95$.

(1) 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 11 是否为该数列的项, 若是, 是第几项?

分析: 求通项的关键是求出 a_1 , d , 为此该题可先列出关于 a_1 , d 的两个方程, 通过解方程组求之.

解: (1) 因为 $a_3 = 2$, $S_{10} = 95$,

$$\text{所以} \begin{cases} 2 = a_1 + (3-1) \cdot d, \\ 95 = 10a_1 + \frac{10 \times (10-1)}{2} \cdot d, \end{cases} \text{解之, 得} \begin{cases} a_1 = -4, \\ d = 3. \end{cases}$$

所以 $a_n = -4 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 7$.

(2) 设 $a_n = 11$, 则 $-4 + (n-1) \cdot 3 = 11$, 解得 $n = 6$, 这表明 11 是该数列的第 6 项.

点评: 在等差数列的有关计算中, 有五个基本量 a_1 , d , n , a_n , S_n . 如果已知其中三个, 即可求出另外两个, 它体现了等差数列计算和证明中的最基本的思想方法.

例2 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $d = \frac{1}{2}$, 且 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = 60$, 求 S_{100} .

分析: 要求 S_{100} , 根据等差数列求和公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 知, 求出 $a_1 + a_{100}$ 即可. 或求出 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}$.

解法一: 由已知 $a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{99}$ 组成公差为 $2d$ 共 50 项的等差数列. 于是有

$$\frac{50(a_1 + a_{99})}{2} = 60,$$

$$a_1 + a_{99} = \frac{12}{5}, \quad \text{①}$$

$$\text{而} \quad S_{100} = \frac{100(a_1 + a_{100})}{2},$$

$$\text{由于} \quad a_{100} = a_{99} + d = a_{99} + \frac{1}{2},$$

$$\text{所以} \quad S_{100} = 50(a_1 + a_{99} + \frac{1}{2}), \quad \textcircled{2}$$

将①代入②，得， $S_{100} = 50(\frac{12}{5} + \frac{1}{2}) = 145$.

解法二：由于 $a_2 = a_1 + d$, $a_4 = a_3 + d$, $\dots$, $a_{100} = a_{99} + d$, 所以

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100} = (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99}) + 50d = 60 + 50 \times \frac{1}{2} = 85,$$

$$\text{则 } S_{100} = 60 + 85 = 145.$$

点评：本例也可以先求 a_1 ，再求 S_{100} ，但计算较烦琐，解法二用等差数列的定义，方法简捷.

基础达标

一、选择题

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 3$, $d = 2$, $S_n = 120$, 则 $n = (\quad)$
A. 8 B. 9 C. 10 D. 12
2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_5 = 10$, $S_3 = 3$, 则 $(\quad)$
A. $a_1 = -2$, $d = 3$ B. $a_1 = 2$, $d = -3$
C. $a_1 = 3$, $d = -2$ D. $a_1 = -3$, $d = 2$
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 10$, $a_n = 44$, $S_n = 270$, 则 $n = (\quad)$
A. 12 B. 11 C. 10 D. 9

二、填空题

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $d = 2$, $n = 15$, $a_n = -10$, 则 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $d = \frac{1}{3}$, $n = 37$, $S_n = 629$, 则 $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 < 0$, $S_{25} = S_{45}$, 若 S_n 最小，则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_{10} = 100$, $S_{10} = 100$, 求该数列中 a_1 及 d 的值.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $d=\frac{1}{2}$, $a_n=\frac{3}{2}$, $S_n=-\frac{15}{2}$, 求该数列中 a_1 及 n 的值.



能力提升

一、选择题

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5+a_8=10$, 则 $S_{12}=(\quad)$
A. 60 B. 50 C. 120 D. 100
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $S_5=15$, 则 a_3 为 $(\quad)$
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

二、填空题

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_4=7$, 则 $S_7=\underline{\hspace{2cm}}$.
2. S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_5=2$, $a_{n-4}=30$ ($n\geq 5$, $n\in\mathbf{N}^*$), $S_n=336$, 则 n 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 已知: $a_3=12$, $S_{12}>0$, $S_{13}<0$,

- (1) 求公差 d 的取值范围;
- (2) 指出 $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ 中最大的, 并说明理由.

6.2.4 等差数列的简单应用



例题点拨

例1 在通常情况下, 从地面到 10 km 高空, 高度每增加 1 km, 气温就下降某一个固定数值. 如果 1 km 高度的气温是 8.5°C , 5 km 高度的气温是 -15.5°C , 求 2 km, 4 km, 6 km 高度的气温.

分析：根据已知条件可知，这是个等差数列问题．其中 $a_1=8.5$ ， $a_5=-15.5$ ， $n=10$ ，求 a_2 ， a_4 ， a_6 的值．

解：由题意知，这是个等差数列问题，其中： $a_1=8.5$ ， $a_5=-15.5$ ，

将它们代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ ，得

$$-15.5=8.5+(5-1)\times d, d=-6,$$

$$\text{所以 } a_2=8.5+(2-1)\times(-6)=2.5,$$

$$a_4=8.5+(4-1)\times(-6)=-9.5,$$

$$a_6=8.5+(6-1)\times(-6)=-21.5.$$

答：2 km，4 km，6 km 高度的气温分别为 2.5°C ， -9.5°C ， -21.5°C ．

例2 某人在银行参加每月 500 元的零存整取储蓄，月利率是按单利 0.2% 计算，问一年后本利合计能取回多少元？（单利是指如果储蓄时间超过单位时间，利息不计入本金，上一单位时间给予的利息不再支付利息）

分析：根据已知条件可知，第 1 个月存入的 500 元，计利 12 个月到期本利是 $(500+500\times 0.2\%\times 12)$ 元，第 2 个月存入的 500 元，计利 11 个月到期本利是 $(500+500\times 0.2\%\times 11)$ 元， $\dots$ ，第 12 个月存入的 500 元，计利 1 个月到期本利是 $(500+500\times 0.2\%\times 1)$ 元．这是个等差数列问题．其中 $a_1=500+500\times 0.2\%\times 12=512$ ， $a_{12}=500+500\times 0.2\%\times 1=501$ ，要求 S_{12} 的值．

解：由题意知，这是个等差数列问题，其中：

$$a_1=500+500\times 0.2\%\times 12=512, a_{12}=500+500\times 0.2\%\times 1=501,$$

$$\text{将它们代入公式 } S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}, \text{ 得到 } S_{12}=\frac{12\times(512+501)}{2}=6\ 078.$$

答：一年后本利合计能取回 6 078 元．

点评：应用题是中职学校数学的重要部分，是学生走上工作岗位时很好的数学工具．解好数学应用题，要仔细阅读，理解题目，能综合运用所学的数学知识分析和解决问题．

基础达标

1. 一种车床变速箱的 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别是 24 和 45，求其余各齿轮的齿数．

2. 梯子的最高一级宽是 33 cm, 最低一级宽是 110 cm, 中间有十级, 各级的宽度成等差数列. 求中间各级的宽度.

3. 某职业学校的一个学生, 为了参加学校运动会的 3 000 m 比赛项目, 给自己制订了一周 7 天的训练计划: 第一天跑 3 000 m, 以后每一天比前一天多跑 500 m. 这个同学一周下来一共将跑多少米的距离?



能力提升

1. 某地区出租车的计价标准为 1.2 元/km, 起步价为 10 元, 即最初的 4 km (不含 4 km) 计费 10 元. 如果某人乘坐该地区的出租车去往 14 km 处的目的地, 且一路畅通, 等候时间为 0, 需要支付多少车费?

2. 今年, 李老师计划用 10 万元人民币买 1 辆小车. 如果每年使用的保险费、养路费、汽油费等约 0.9 万元人民币, 年维修费第一年需 0.2 万元人民币, 以后每年递增 0.2 万元人民币. 问李老师要买的这辆小车, 使用 12 年后其全部费用将是多少元人民币?

6.3 等比数列

6.3.1 等比数列的定义

6.3.2 等比数列的通项公式



例题点拨

例1 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -2$, $a_5 = -32$, 则公比 q 等于 ()

- A. 2 B. -2 C. ± 2 D. $-\frac{15}{2}$

分析: 本题可直接利用通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 求出 q .

因为 $a_1 = -2$, $a_5 = -32$,

所以 $-32 = (-2) \cdot q^{5-1}$ 得

$16 = q^4$, $q = \pm 2$.

解: 选 C

点评: 在等比数列通项 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 中, 有四个基本量 a_1 , q , n , a_n , 如果知道其中三个, 即可求出另外一个, 它体现了等比数列计算和证明中的最基本的思想方法.

例2 设 $\sqrt{3}$, $x+1$, $\sqrt{27}$ 成等比数列, 那么 x 的值等于 ()

- A. 8 或 -8 B. 2 或 -4
C. -2 或 4 D. 8 或 10

分析: 因为 $\sqrt{3}$, $x+1$, $\sqrt{27}$ 成等比数列, 依等比数列中项定义有

$(x+1)^2 = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$, $x+1 = \pm 3$,

所以 $x=2$ 或 $x=-4$.

解: 选 B

点评: x , y , z 成等比数列, 等价于 $y^2 = x \cdot z$, 是等比数列很重要的性质. 若 $m+n=p+q$, 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$. 利用它解答有关等比数列问题较为简便.

基础达标

一、选择题

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -2.7$, $q = -\frac{1}{3}$, 那么 a_6 等于 ()
 A. $\frac{1}{90}$ B. $-\frac{1}{90}$ C. $\frac{1}{30}$ D. $-\frac{1}{30}$
2. 若 x 是 3 与 27 的等比中项, 则 $x =$ ()
 A. 3 或 -3 B. 3 C. -3 D. 9 或 -9
3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -2$, $a_5 = -32$, 则公比 q 等于 ()
 A. 2 B. -2 C. ± 2 D. $-\frac{15}{2}$
4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 4$, $a_7 = 6$, 则 $a_9 =$ ()
 A. 6 B. -6 C. 36 D. 9

二、填空题

1. 已知等比数列 5, -15, 45, ..., 则 $a_n =$ _____.
2. 若负数 a 是 -2 与 -8 的等比中项, 则 $a =$ _____.
3. 在等比数列中, $a_1 = 48$, $a_7 = \frac{3}{4}$, 则 $q =$ _____.
4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 54$, $q = \frac{1}{3}$, $a_n = 2$, 则 $n =$ _____.

三、解答题

在等比数列 $\{a_n\}$ 中:

- (1) 已知 $a_3 = \frac{1}{8}$, $q = -2$, 求 a_6 ;
- (2) 已知 $a_4 = 18$, $a_2 = 2$, 求 a_1 与 q ;
- (3) 已知 $a_1 = 1$, $q = 2$, $a_n = 64$, 求 n ;
- (4) 已知 $a_3 = 3$, $a_9 = 9$, 求 a_{12} .



能力提升

一、选择题

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=4$, $a_8=16$, 则 $a_{11}=(\quad)$
A. 8 B. -8 C. ± 8 D. ± 32
2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3a_4=5$, 则 $a_1a_2a_5a_6=(\quad)$
A. 25 B. 10 C. -25 D. -10
3. 已知 $x, x+1, x+3$ 是一个等比数列的前三项, 则其第四项等于 $(\quad)$
A. -1 B. 1 C. -8 D. 8
4. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=a_{n+1}+a_{n+2}$, 那么这个数列的公比是 $(\quad)$
A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$

二、填空题

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_2=3$, $a_3+a_4=12$, 则 $a_7+a_8=$ _____.
2. 若 $2^a, 2^b, 2^c$ 成等比数列, 则 a, b, c 成_____数列.
3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\log_9 3$, 公比 $q=\log_2 8$, 则 $a_3=$ _____.
4. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ ($n \geq 1$) 且 $a_1=2$, 则其通项公式 $a_n=$ _____.

三、解答题

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和等于 7, 积等于 8, 求此数列的通项公式.
2. 有四个数, 其中前三个数成等差数列, 后三个数成等比数列, 并且第一个数与第四个数的和是 16, 第二个数与第三个数的和是 12, 求这四个数.

6.3.3 等比数列前 n 项和公式



例题点拨

例1 求等比数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ 的前 10 项和.

分析: 根据已知等比数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ 知 $a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$. 应用公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 可求 S_{10} 的值.

解: 因为 $a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}, n = 10$,

$$\text{所以 } S_{10} = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1\ 023}{1\ 024}.$$

点评: 在等比数列的有关计算中, 有五个基本量 a_1, q, n, a_n, S_n , 如果已知其中三个, 即可求出另外两个, 它体现了等比数列计算和证明中的最基本的思想方法.

例2 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -\frac{1}{2}$, 前 3 项之和 $S_3 = -\frac{3}{2}$, 求公比 q 的值.

分析: 根据已知条件知要利用公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 来计算 q 的值. 但是, 该公式条件是 $q \neq 1$ 的, 因此解答要分两步: (1) $q = 1$, (2) $q \neq 1$.

解法: (1) $q = 1$ 时, 因为 $a_1 = -\frac{1}{2}$, 则 $S_3 = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ 与条件吻合.

(2) $q \neq 1$ 时, 因为 $a_1 = -\frac{1}{2}, S_3 = -\frac{3}{2}$,

$$\text{所以 } -\frac{3}{2} = \frac{-\frac{1}{2}(1-q^3)}{1-q},$$

$$3 = \frac{(1-q)(1+q+q^2)}{1-q}, q^2 + q - 2 = 0,$$

$q = -2$ 或 $q = 1$ (舍去).

综合 (1) 和 (2) 得 $q=1$ 或 $q=-2$.

点评: 解题时要注意, 等比数列的前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$ 和 $S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$ 成立的条件是 $q \neq 1$.

基础达标

一、选择题

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=8$, $q=\frac{1}{2}$, 则 $S_5 = (\quad)$
 A. 15.5 B. 16.5 C. 17.5 D. 18.5
2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $q=3$, $n=6$, $S_6=728$, 则 a_6 等于 $(\quad)$
 A. 406 B. 360 C. 486 D. 286
3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=7$, $S_3=21$, 则 q 的值为 $(\quad)$
 A. 1 B. -2 C. 1 或 -2 D. -1 或 2

二、填空题

1. 等比数列 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ 的前 6 项和为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3=-1$, $S_3=-1$, 则 $q=\underline{\hspace{2cm}}$.
3. $1+3+3^2+\dots+3^n=\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $S_4=25$, $S_2=5$, $q \neq 1$, 求 q 的值.

2. 求等比数列 $1, 2, 4, 8, \dots$ 从第 5 项到第 10 项的和.



能力提升

一、选择题

1. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = -1$, 前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$, 则 $\frac{a_{10}}{a_5}$ 等于 ()

- A. $-\frac{1}{32}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{32}$ D. $\frac{1}{2}$

2. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ ($n \geq 1$) 且 $a_1 = 2$, 则 $S_5 =$ ()

- A. $\frac{31}{8}$ B. $-\frac{31}{8}$ C. $\frac{31}{32}$ D. $-\frac{31}{32}$

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 2$, $S_5 = 242$, 则公比 $q =$ ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

二、填空题

1. 已知在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 8$, 某同学经计算得 $S_2 = 20$, $S_3 = 36$, $S_4 = 65$. 后来该同学发现其中一个数算错了, 则该数是_____.

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10} = 10$, 前 20 项和 $S_{20} = 30$, 则前 30 项的和 $S_{30} =$ _____.

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是前 n 项的和, 若 $S_6 = 48$, $S_{12} = 60$, 则 $S_{18} =$ _____.

三、解答题

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为 $S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

(1) 试证 $\{a_n\}$ 为等比数列;

(2) 求 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}$ 的值.

6.3.4 等比数列的简单应用



例题点拨

例1 某地区环境保护部门测得, 去年该地区饮用水质量为“良”天数是 125

天, 争取三年后年饮用水质量为“良”天数达到 216 天, 这个地区饮用水质量为“良”天数的年平均增长率为多少?

分析: 根据已知条件可知, 这是个等比数列问题. 其中 $a_1=125$, $a_4=216$, 求 q 的值.

解: 由题意知, 这是个等比数列问题. 其中:

$$a_1=125, a_4=216,$$

将它们代入公式 $a_n=a_1q^{n-1}$ 得: $a_4=a_1 \cdot q^{4-1}$,

$$\text{所以 } 216=125 \cdot q^3, q^3=1.728, q=1.2.$$

答: 这个地区饮用水质量为“良”天数的年平均增长率为 20%.

例2 某市 1999 年国内生产总值 (GDP) 是 2 000 亿元人民币, 以后每年都以 10% 的速度增长, 问: 这个城市从 1999 年至 2008 年, 十年里 GDP 总共是多少亿元人民币?

分析: 根据已知条件可知, 这是个等比数列问题. 其中 $a_1=2\ 000$, $q=1.1$, $n=10$, 求 S_{10} 的值.

解: 由题意知, 这是个等比数列问题. 其中 $a_1=2\ 000$, $q=1.1$, $n=10$, 将它们代入公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 得: $S_{10}=\frac{2\ 000 \times (1-1.1^{10})}{1-1.1} \approx 31\ 875$.

答: 这个城市从 1999 年至 2008 年, 十年里 GDP 总共是 31 875 亿元人民币.

基础达标

1. 一款 mp3 播放器原来单价是 540 元, 经过三次降价, 现在单价是 160 元. 问: 这种 mp3 播放器平均每次降价的百分比大约是多少?

2. 一种计算机病毒是通过电子邮件进行传播的, 如果第一轮感染的计算机是 50 台, 并且从第一轮起, 以后的每一台计算机都可以感染下一轮的 50 台计算机, 到第五轮总共将有多少台计算机被该病毒感染?

3. 某汽车制造厂计划今年生产一款热销汽车 80 万辆, 以后每年比前一年多生产这款汽车 20%, 那在 5 年时间里, 共能生产这款汽车多少辆?



能力提升

1. 某一种放射性物质不断地变化为其他物质, 每经过一年剩留的这种物质是上年的 84%. 大约经过几年, 剩留的这种物质是原来的一半?

2. 某电器卖场今年卖出一款液晶电视 5 000 台. 如果今后平均每年的销售量比上一年的销售量增加 10%, 那么从今年起, 大约几年可使总销售量达到 30 000 台?

3. 有一座七层灯塔, 每层所点灯的盏数都是上面一层的 2 倍, 一共点 381 盏灯, 求最底层所点灯的盏数.



第六章综合练习

一、选择题

- 若数列 $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots, \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \dots$, 则它是 ()
 A. 等差数列但不是等比数列 B. 等比数列但不是等差数列
 C. 等差数列又是等比数列 D. 非等差数列又非等比数列
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5=10, a_{10}=5$, 则 $a_{15}=(\quad)$
 A. 15 B. 10 C. 5 D. 0
- 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\frac{1}{8}, q=2$, 则 $S_5=(\quad)$
 A. $\frac{31}{8}$ B. $-\frac{31}{8}$ C. -4 D. 4
- 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=-1, q=\frac{1}{2}$, 则 $a_5=(\quad)$
 A. $-\frac{1}{32}$ B. $\frac{1}{32}$ C. $-\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{16}$
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2, d=3, S_n=155$, 则 $n=(\quad)$
 A. 8 B. 9 C. 10 D. 12
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=-5, a_6=a_4+6$, 则 a_1 等于 ()
 A. -4 B. -5 C. -7 D. -8
- $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 既成等差数列, 又成等比数列, 则 $\triangle ABC$ 是 ()
 A. 等腰三角形但非等边三角形 B. 直角三角形但非等腰三角形
 C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形
- 若 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_n=n^2$, 则 $\{a_n\}$ 是 ()
 A. 等差数列但不是等比数列 B. 等比数列但不是等差数列
 C. 等差数列又是等比数列 D. 非等差数列又非等比数列

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $d=2$, 若 a_1, a_3, a_4 成等比数列, 则 a_2 的值为 ()

- A. -4 B. -6 C. -8 D. -10

10. 已知 $-1, a_1, a_2, -4$ 成等差数列, $-1, b_1, b_2, b_3, -4$ 成等比数列, 则 $\frac{a_2 - a_1}{b_2}$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$

二、填空题

1. 数列 $-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, -\frac{5}{36}, \dots$ 的一个通项公式为_____.
2. 数列 $\{n(n+3)\}$ 的第_____项是 378.
3. 若实数 $a = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}, b = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$, 则 a 与 b 的等差中项=_____.
4. 若 a 是 5 与 25 的等比中项, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 已知等差数列 19, 12, 5, $\dots$, 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 在等比数列 $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \dots$ 中, 32 是第_____项.
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = a_{n+1} - \lg 2$, 且 $a_1 = 1$, 则其通项公式为_____.
8. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 54, q = \frac{1}{3}, a_n = 2$, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = -\frac{3}{2}, a_6 = 1$, 则 $a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 设 $\sqrt{5}, x+1, 5\sqrt{5}$ 成等比中项, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 2n$, 求:
 - (1) $\{a_n\}$ 的前三项;
 - (2) $\{a_n\}$ 的通项公式.

2. 如果成等比数列的三个数的和为 7, 积为 8, 求这三个数.

3. 已知成等差数列的三个正数的和为 15, 且这三个数分别加上 1, 3, 9 后就成等比数列, 求这三个数.

4. 设 $y=f(n)$ 是一次函数 ($n \in \mathbf{N}^*$), $f(3)=5$, 且 $f(1), f(2), f(5)$ 成等比数列, 求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$ 的值.

5. 某汽车制造厂今年生产汽车 10 万辆, 如果平均每年的产量比上一年增长 10%, 那么从今年起, 几年内可使总产量达到 60 万辆 (结果保留到个位)? ($\lg 1.6=0.2041$, $\lg 1.1=0.0414$)