

大学生公共素质课精品教材

经济数学

主 编 林立忠 高雪玲 吴 勇

中国出版传媒集团

语文出版社

经济数学

JINGJI SHUXUE

主 编 林立忠 高雪玲 吴 勇



中国教育出版传媒集团



语文出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

经济数学 / 林立忠, 高雪玲, 吴勇主编. -- 北京:
语文出版社, 2025. 2. -- ISBN 978-7-5187-2197-9

I. F224.0

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025NE1087 号

责任编辑 张 程
装帧设计 江林春
出 版  语文出版社
地 址 北京市东城区朝阳门内南小街51号 100010
电子信箱 ywbsywp@163.com
印刷装订 定州启航印刷有限公司
发 行 语文出版社 新华书店经销
规 格 787mm × 1092mm
开 本 1 / 16
印 张 12
字 数 270千字
版 次 2025年2月第1版
印 次 2025年2月第1次印刷
定 价 45.00元

 010-65253954(咨询) 010-65251033(购书) 010-65250075(印装质量)

目 录

第一章 函数	1
1.1 预备知识	2
1.2 函 数	4
1.2.1 函数的概念	4
1.2.2 函数的表示法	6
1.2.3 函数的性质	6
1.2.4 复合函数和反函数	9
1.2.5 基本初等函数	11
1.3 经济活动中常用的函数	16
1.3.1 总成本函数	16
1.3.2 收益函数	17
1.3.3 利润函数	17
1.3.4 平均成本函数	17
1.4 数学模型	18
第二章 极限与连续	30
2.1 极 限	31
2.1.1 数列极限	31
2.1.2 函数极限	32
2.2 极限的运算法则	36
2.3 两个重要极限	38
2.3.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	38
2.3.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ($e = 2.718\,281\,8\cdots$)	39

2.3.3	连续复利	40
2.4	无穷小与无穷大	41
2.4.1	无穷小量	41
2.4.2	无穷大量	43
2.4.3	无穷大量与无穷小量的关系	44
2.5	函数的连续性	44
2.5.1	函数连续的定义	44
2.5.2	函数的间断点	46
2.5.3	函数连续的性质	48
2.5.4	闭区间上连续函数的性质	49
第三章	导数与微分	55
3.1	导数概念	56
3.1.1	引例	56
3.1.2	导数概念	58
3.2	求导法则和基本初等函数导数公式	62
3.2.1	导数的四则运算	62
3.2.2	反函数求导法则	64
3.2.3	复合函数求导法则	65
3.2.4	基本初等函数的导数及运算法则	66
3.2.5	隐函数求导法则	67
3.3	高阶导数	69
3.4	微分	71
第四章	微分中值定理及导数的应用	79
4.1	中值定理	80
4.2	洛必达 (L'Hospital) 法则	84
4.2.1	$\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式的极限	85
4.2.2	其他未定式的极限	88

4.3	导数在研究函数上的应用	91
4.3.1	函数的单调性判定法	91
4.3.2	函数的极值	93
4.3.3	函数的最大值和最小值	97
4.3.4	函数的凹凸性与拐点	100
4.3.5	曲线的渐近线	103
4.3.6	函数图象的描绘	104
4.3.7	最值在经济学上的应用	107
第五章	不定积分	116
5.1	不定积分的概念	117
5.1.1	原函数的定义	117
5.1.2	不定积分的定义	118
5.2	不定积分的性质	119
5.3	换元积分法	122
5.3.1	第一类换元法	122
5.3.2	第二类换元法	125
5.4	分部积分法	129
5.5	几种特殊类型函数的积分	132
5.5.1	有理函数的积分	132
5.5.2	三角函数有理式的积分	135
5.5.3	简单无理函数的积分	137
第六章	定积分及其应用	143
6.1	定积分的概念	144
6.1.1	定积分问题举例	144
6.1.2	定积分的定义	146
6.2	定积分的性质	149
6.3	微积分基本公式	151
6.3.1	积分上限函数	152

6.3.2	微积分基本公式	153
6.4	定积分的换元法	155
6.5	定积分的分部积分法	158
6.6	广义积分	160
6.6.1	无限区间上的广义积分	160
6.6.2	无界函数的广义积分	162
6.7	定积分的应用	165
6.7.1	定积分的元素法	165
6.7.2	平面图形的面积	166
6.7.3	平行截面积为已知的立体的体积	170
6.7.4	旋转体的体积	171
6.7.5	平面曲线弧长	173

第一章

函 数

■ 导言

函数不仅是数学领域中不可或缺的基本概念，也是经济数学研究的核心对象。中学阶段，我们初步接触并学习了函数的基础知识。在本章中，我们将基于中学数学的基础，进一步阐明函数的一般定义、函数的简单性质，以及与函数概念相关的一些基本知识，为读者全面理解函数提供有力支持，同时也为后续的经济数学学习奠定坚实基础。

1.1 预备知识

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念. 一般地说, 所谓集合(或简称集)是指具有某种特定性质的对象的总体. 组成这个集合的对象称为该集合的元素. 例如, 06 级数学系的学生, 全体自然数, 某公司的全体员工.

通常以大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合, 集合的元素以小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示. 如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于 A , 记作 $a \in A$ (读作 a 属于 A); 如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a 不属于 A , 记作 $a \notin A$ (读作 a 不属于 A).

由有限个元素组成的集合称为有限集. 例如, 由元素 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 组成的集合 A , 可记作 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

由无限个元素组成的集合称为无限集. 无限集通常用如下的记号表示:

$$M = \{x | x \text{ 所具有的特性} \}$$

微积分中用到的集合主要是数集, 即元素都是数的集合. 我们将全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$, 全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$, 全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$, 全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素, 即若 $x \in A$, 则必 $x \in B$, 就说集合 A 是集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (读作 A 包含于 B 或读作 B 包含 A). 例如: $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$.

如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 就称集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如 $\{x | x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\}$ 是空集, 因为满足条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的. 空集记作 $\emptyset$, 并规定空集为任何集合的子集.

2. 区间

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 那么,

(1) 数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$, 如图 1-1 所示.

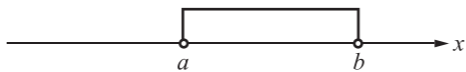


图 1-1

(2) 数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$, 如图 1-2 所示.

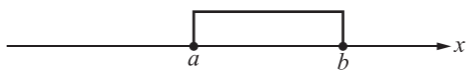


图 1-2

(3) 类似地, $[a, b), (a, b]$ 称为半开区间, 即 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$, 如图 1-3 所示;

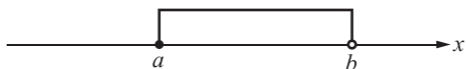


图 1-3

$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$, 见图 1-4.

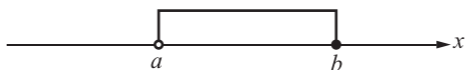


图 1-4

以上这些区间都称为有限区间, 数 $b - a$ 称为这些区间的长度.

此外还有无限区间, 引进 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示 $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$, 如图 1-5 所示; $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$, 如图 1-6 所示. $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$.

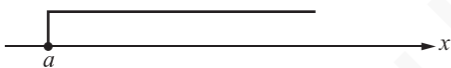


图 1-5

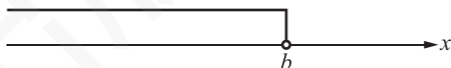


图 1-6

3. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$. 开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 称为 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即 $U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$. 其中, a 称为这个邻域的中心, δ 称为这个邻域的半径.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 在点 a 的邻域去掉中心后, 称为点 a 的去心邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$, 即 $\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

习题 1-1

1. 方程组 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ 的解集是 _____.
2. 若集合 A, B, C 满足 $A \cap B = A, B \cup C = C$ 则 A 与 C 的关系为 _____.
3. 集合 $\{x | 0.5 < x < 1.5\}$ 写成邻域形式为 _____.

1.2 函 数

1.2.1 函数的概念

在研究某个自然现象或实际问题时，往往会发现问题中的变量并不是彼此独立地变化的，而是相互联系并遵循着一定的变化规律，考虑以下几个例子．

例 1 半径为 R 的圆的面积为

$$A = \pi R^2$$

这就是两个变量 A 与 R 之间的关系，当半径 R 在区间 $(0, +\infty)$ 内任取一个值时，由上式就可唯一确定 A 的一个值．

例 2 表 1-1 给出世界人口数量 P 与某些年份 t 之间的关系．

表 1-1

年份	人口 / 百万
2011	7 054
2012	7 141
2013	7 229
2014	7 318
2015	7 405
2016	7 492
2017	7 578
2018	7 662
2019	7 743
2020	7 821
2021	7 888

对于每一个年份 t ，从表格中就可唯一地确定人口数量 P 的值．

例 3 图 1-7 是气温自动记录仪描绘出的某一天的气温变化曲线，它给出了时间 t 与气温 T 之间的关系．

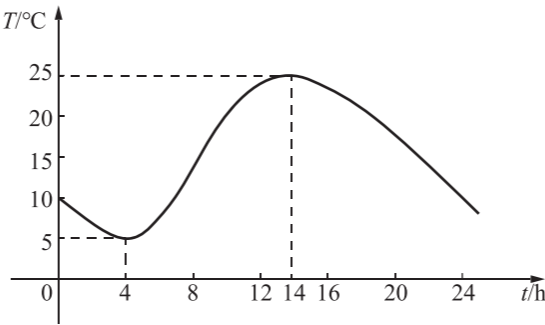


图 1-7

当时间 t 在区间 $[0, 24]$ 中任取一个值时, 从图上可以唯一地确定 T 的值, 如 $t = 14$ 时, $T = 25^\circ\text{C}$.

从以上的例子看到, 它们所描述的问题虽各不相同, 但却有共同的特征:

(1) 每个问题中都有两个变量, 它们之间不是彼此独立的, 而是相互联系, 相互制约的.

(2) 当一个变量在它的变化范围内任意取定一值时, 另一个变量按一定法则就有一个确定的值与之相对应.

具有这两个特征的变量之间的依存关系, 称为函数关系. 下面给出函数的定义.

定义 1 设 A 是一个非空数集, 如果存在一个对应法则 f , 使得对 A 中任一 $x (\forall x \in A)$, 通过 f 都对应唯一 $y \in \mathbf{R}$, 则称 f 是确定在 A 上的一个函数. 记作

$$y = f(x).$$

集合 A 称为函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量, x 所对应的 y 称为 f 在 x 处的函数值, 记为 $y = f(x)$. 全体函数值的集合

$$f(A) = \{y | y = f(x), x \in A\}$$

称为函数的值域.

在数学中, 对于抽象的函数表达式, 我们约定: 函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

例 4 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域应满足 $1-x^2 \geq 0$, 即 $-1 \leq x \leq 1$, 故定义域为 $[-1, 1]$.

例 5 函数 $y = \lg(5x-4)$ 的定义域应满足 $5x-4 > 0$, 故定义域为 $\left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$.

例 6 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ 的定义域应满足 $x^2-x-2 > 0$, 即 $(x-2)(x+1) > 0$, 故定义域为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

例 7 函数 $y = \arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域应满足 $\left|\frac{x-1}{5}\right| \leq 1$ 且 $x^2 < 25$, 即为 $-5 \leq x-1 \leq 5$ 且 $-5 < x < 5$, 故定义域为 $[-4, 5)$.

在函数关系中, 定义域、对应法则和值域是确定函数关系的三个要素, 如果两个函数的对应法则和定义域、值域相同, 则认为这两个函数是相同的, 至于自变量和因变量用什么字母表示则无关紧要.

例 8 下列各对函数是否相同?

$$(1) f(x) = x+1, \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; \quad (2) f(x) = |x|, \quad g(x) = \sqrt{x^2}.$$

解: (1) 不相同. $f(x) = x+1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为

$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 因此 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不相同, 故不是相同的函数.

(2) 相同. 因 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域相同, 均为 $(-\infty, +\infty)$, 而且对应法则、值域也相同, 所以是相同的函数.

1.2.2 函数的表示法

由于函数的对应法则是多种多样的, 所以表示一个函数要采取适当的方法. 在例 1 中, 函数的对应法则用一个数学表达式来表示, 这个数学表达式称为解析式, 这种利用解析式表示函数的方法称为解析法. 同理, 在例 2 中, 函数的对应法则用一个表格来表示, 这种表示方法称为表格法; 在例 3 中, 函数的对应法则用函数图形来表示, 称为图象法. 一般说来, 函数的常用表示法就是上述三种. 这三种表示法各有优缺点.

解析法的优点是形式简明, 便于作理论研究与数值计算; 缺点是不如图象法来得直观.

表格法的优点是表中有对应数据, 可以直接查用; 缺点是不便于作理论研究, 也不直观.

图象法的优点是直观, 并可从图形看出函数的变化情况; 缺点是不便于作理论研究. 尽管如此, 今后在研究函数时仍常常借助于它的图形, 从直观上去了解它的变化情况.

在实用上有些函数不能用单独一个解析式来表示, 往往当自变量在某一个区间上取值时, 可用这个解析式来表示, 而在另一个区间上取值时, 就得用另一个解析式来表示. 这种在不同区间上用不同解析式来表示的函数称为分段函数. 例如, 在电子技术中经常用到的单位阶跃函数就是一个分段函数:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases} \quad (a \geq 0)$$

它的定义域为 $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$, 图形如图 1-9 所示.

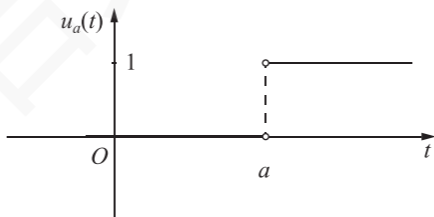


图 1-9

1.2.3 函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $A \subseteq D$, 如果存在一个常数 $M > 0$, 使得对于一切

$x \in A$, 都有

$$|f(x)| \leq M,$$

就称函数 $f(x)$ 在 A 上有界. 否则称函数 $f(x)$ 在 A 上无界, 也就是说, 对无论多大的 M , 总可以找到 A 中的点 x_1 , 使 $|f(x_1)| \leq M$.

函数 $y = \sin x$ 无论 x 取任何实数, 总有 $|\sin x| \leq 1$ 成立, 所以 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的. 又如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在半开区间 $[1, +\infty)$ 上是有界的, 因为对一切 $x \in [1, +\infty)$, 总有 $|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$. 但 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 因为对于任意取定的正数 M , 不妨设 $M > 1$, 则 $\frac{1}{2M} \in (0, 1)$, 当取 $x_1 = \frac{1}{2M}$ 时, $|f(x_1)| = \left|\frac{1}{x_1}\right| = 2M > M$. 因此, 可以进一步看到, 同一个函数在不同的区间上有界性可能不同.

显然, 当一个函数是有界函数时, 它的图形是介于两条水平直线 $y = M$ 及 $y = -M (M > 0)$ 之间的曲线.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$, 若对任意两点 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加 (或单调减少) 的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数. 当函数单调增加时, 它的图象是随 x 的增加而上升的曲线; 而函数单调减少时, 它的图象是随着 x 的增大而下降的曲线.

例如, 函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的, 所以在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 函数 $y = x^2$ 不是单调函数, 如图 1-9 所示. 又如, 函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的函数, 如图 1-10 所示.

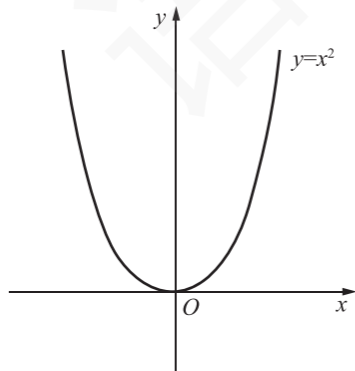


图 1-9

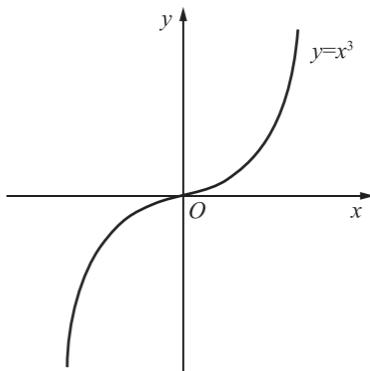


图 1-10

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任意的 $x \in D$, 总有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任意的 $x \in D$, 总有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图象关于 y 轴是对称的, 如图 1-11 (a) 所示. 奇函数的图象关于原点对称的, 如图 1-11 (b).

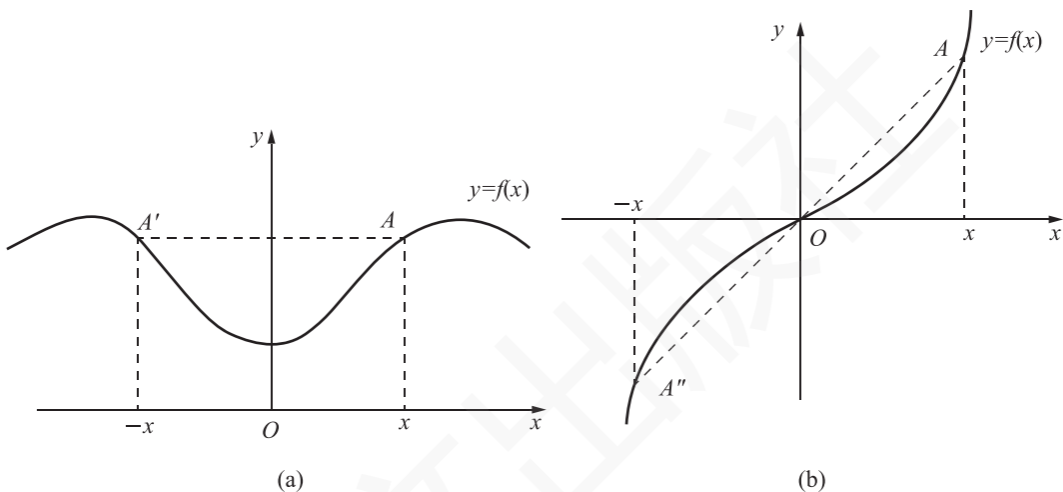


图 1-11

函数 $y = x^2 + 1$, $y = \cos x$, $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 等皆为偶函数; 而函数 $y = x^2 \sin x$, $y = \frac{x}{1+x^2}$, $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 等皆为奇函数. 函数 $y = \sin x + \cos x$ 及 $y = x + x^2$ 既非奇函数, 也非偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 l , 使得对于任一个 $x \in D$, 有 $(x \pm l) \in D$, 且

$$f(x+l) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的一个周期. 通常, 我们所说的周期函数的周期是指最小正周期. 例如, 函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; 函数 $y = \sin \omega t$ 是以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的函数.

一个周期为 l 的周期函数, 在每个长度为 l 的区间上函数图象有相同的形状. 并不是每个周期函数都有最小正周期, 狄利克雷函数就属于这种情形.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

若 x 为有理数, 对任一有理数 γ , $x + \gamma$ 也是有理数, 因而 $D(x + \gamma) = D(x) = 1$; 若 x 为无理数, 对上述有理数 γ , $x + \gamma$ 也是无理数, 所以 $D(x + \gamma) = D(x) = 0$. 这样, 任何有理数 γ 均是 $D(x)$ 的周期, 但在有理数集中没有最小的正有理数, 也就是说, 函数 $D(x)$ 没有最小正周期.

1.2.4 复合函数和反函数

1. 复合函数

先看一个例子. 设 $y = \sqrt{u}$, 而 $u = 1 - x^2$, 以 $1 - x^2$ 代替第一式中的 u , 得 $y = \sqrt{1 - x^2}$, 这时函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 就是由 $y = \sqrt{u}$ 及 $u = 1 - x^2$ 复合而成的复合函数.

一般地, 若函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_2 , 值域为 W_2 , 并且 $W_2 \subseteq D_1$, 那么对每个 $x \in D_2$, 有确定函数值 $u \in W_2$ 与之对应, 由于 $W_2 \subseteq D_1$, 因此这个值 u 也属于函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_1 , 故又有确定的值 y 与值 u 对应. 这样, 对每个数值 $x \in D_2$, 通过 u 有确定的数值 y 与之对应, 从而得到一个以 x 为自变量, y 为因变量的函数, 这个函数称为由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$, 而 u 称为中间变量.

必须注意, 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如 $y = \arcsin u$ 及 $u = 2 + x^2$, 因为对于 $u = 2 + x^2$, 无论 x 取什么实数, 总有 $u \geq 2$, 因而不能使 $y = \arcsin u$ 有意义, 所以这两个函数不能复合成一个复合函数. 而在前面已经见到的函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$, 复合前的函数 $u = 1 - x^2$ 的定义域为 $[-\infty, +\infty]$, 值域 W_2 为 $(-\infty, 1]$, 这显然不完全符合函数 $y = \sqrt{u}$ 的定义域 D_1 的要求, 也就是说, 定义中的条件 $W_2 \subseteq D_1$ 不成立, 但由于 $W_2 \cap D_1 \neq \emptyset$, 所以适当限制 x 的取值范围后, 函数 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = 1 - x^2$ 才能复合成一个复合函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$, 即在 $u = 1 - x^2$ 中, x 的取值范围必须限制为 $[-1, 1]$.

复合函数也可由两个以上的函数经过复合构成. 例如, $y = \ln \sqrt{2 + x^2}$, 就是由 $y = \ln u$, $u = \sqrt{v}$ 和 $v = 2 + x^2$ 三个函数复合而成的, 其中 u 和 v 都是中间变量.

2. 反函数

在同一个变化过程中存在着函数关系的两个变量之间, 究竟哪一个是自变量, 哪一个是因变量, 并不是绝对的, 这要视问题的具体要求而定. 例如, 在某商品销售工作中, 已知其价格为 a , 如果想从商品的销量 x 来确定销售总收入 y , 那么 x 是自变量, y 是因变量, 其函数关系为 $y = ax$; 反过来, 若想由商品销售总收入 y 确定其销量 x , 则又有

$x = \frac{y}{a}$. 我们称后一函数是前一函数的反函数, 或者说它们互为反函数.

一般地, 设 $y = f(x)$ 为给定的一个函数, 如果对其值域 W 中的任一值 y , 都可以通过关系 $x = f^{-1}(y)$ 在其定义域 D 中确定一个 x 值与之对应, 那么可得到一个定义在 W 上的以 y 作为自变量, x 作为因变量的函数, 这个函数称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 其定义域为 W , 值域为 D . 相对于反函数 $x = f^{-1}(y)$ 来说, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.

由定义可以证明, 若函数 $y = f(x)$ 是单值单调的函数, 那么就能保证其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 是单值单调的函数. 这是因为, 若 $y = f(x)$ 是单调函数, 则任取其定义域 D 上两个不同的值 $x_1 \neq x_2$ 时, 必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 所以在其值域 W 上任取一个数值 y_0 时, D 上不可能有两个不同的数值 x_1 及 x_2 使 $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. 但若 $y = f(x)$ 仅为单值函数, 则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 就不一定为单值的. 例如, 函数 $y = x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$, 在 $[0, +\infty)$ 上任取一值 y , 只要 $y \neq 0$, 则适合关系 $x^2 = y$ 的数值 x 就有两个, 即 $x = \sqrt{y}$ 或 $x = -\sqrt{y}$, 所以 $y = x^2$ 的反函数是多值函数. 又因为 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的, 所以, 如果把 x 限制在 $[0, +\infty)$ 上, 则 $y = x^2$ 的反函数是单值且单调增加函数 $x = \sqrt{y}$, 它称为函数 $y = x^2$ 的反函数的一个单值分支. 类似可知另一个分支是 $x = -\sqrt{y}$.

要注意的是, $y = f(x)$ 和 $x = f^{-1}(y)$ 表示变量 x 和 y 之间的同一关系, 因而它们的图形显然应是同一曲线. 而函数的实质是对应关系, 只要对应关系不变, 自变量和因变量用什么字母是无关紧要的. 在 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 中, 表示对应关系的符号 f^{-1} 没有改变, 这就表示它们是同一函数, 因此如果函数 $y = f(x)$ 的反函数是 $x = f^{-1}(y)$, 那么 $y = f^{-1}(x)$ 也是 $y = f(x)$ 的反函数, 这时, $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关系也就相当于把 x 轴和 y 轴互换, $y = f^{-1}(x)$ 的图象与 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 是对称的, 如图 1-12 所示.

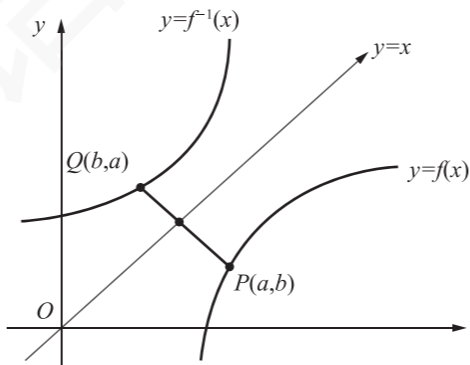


图 1-12

1.2.5 基本初等函数

基本初等函数是指下列五类函数:

- (1) 幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为常数).
- (2) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).
- (3) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).
- (4) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.
- (5) 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

1. 幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为常数)

幂函数的定义域要根据 α 的取值而定. 例如, 当 $\alpha = 2$ 时, $y = x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$; 而当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, $y = x^{\frac{1}{2}}$ 即 $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$; 又当 $\alpha = -\frac{1}{2}$ 时, $y = x^{-\frac{1}{2}}$ 即 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 但不论 α 取什么值, 幂函数 $y = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 内总有意义.

常见幂函数 $y = x^2, y = x^{\frac{2}{3}}, y = x^3, y = \sqrt[3]{x}$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 的图形, 如图 1-13 所示.

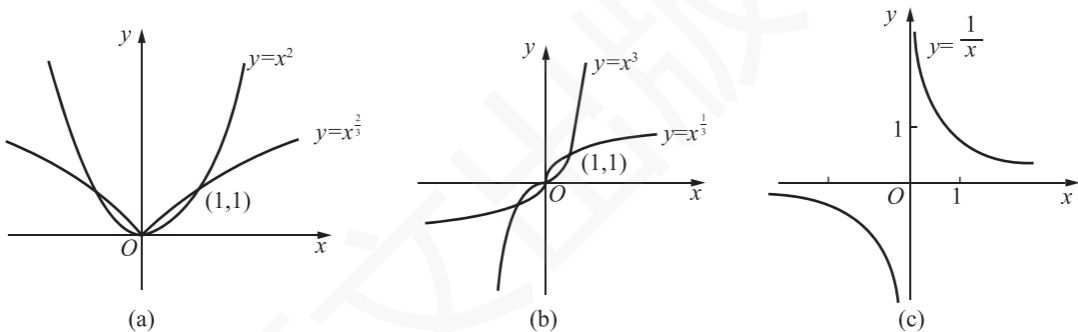


图 1-13

2. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$, 不论 a 取何值, 总有 $a^0 = 1$, 所以函数曲线总在 x 轴上方且经过点 $(0, 1)$.

当 $a > 1$ 时, a^x 单调增加; 当 $0 < a < 1$ 时, a^x 单调减少.

由 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$, 所以 $y = a^x$ 的图象与 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象是关于 y 轴对称的, 如图

1-14 所示.

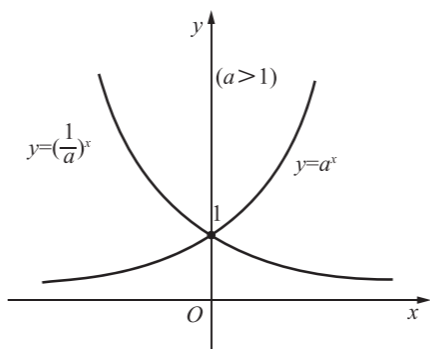


图 1-14

在科技工作中, 常用无理数 $e=2.718\ 2818\cdots$ 为底的指数函数 $y=e^x$.

3. 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)

对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数, 其定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 所以 $y=\log_a x$ 的图象总在 y 轴的右方且经过点 $(1, 0)$. 对数函数的图象可以从它所对应的指数函数的图象按反函数作图的一般规则作出, 关于直线 $y=x$ 作对称于曲线 $y=a^x$ 的图形就得函数 $y=\log_a x$ 的图形, 如图 1-15 所示.

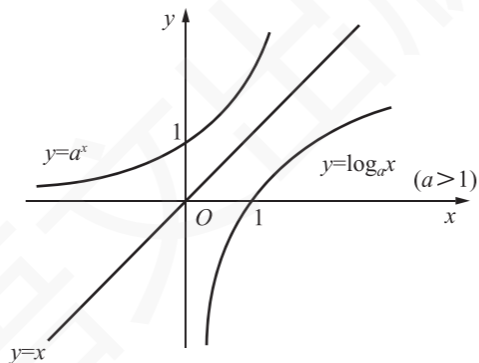


图 1-15

当 $a>1$ 时, $y=\log_a x$ 单调增加; 当 $0<a<1$ 时, $y=\log_a x$ 单调减少.

在工程问题中常常使用以常数 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$, 称为自然对数函数, 简记为 $y=\ln x$.

4. 三角函数

常用的三角函数有 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$.

正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 均以 2π 为周期, 值域都是闭区间 $[-1, 1]$, 所以它们都是有界函数. 正弦函数是奇函数, 余弦函数是偶函数, 分别如图 1-16 及图 1-17 所示.

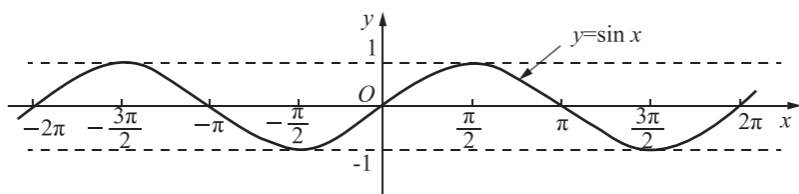


图 1-16

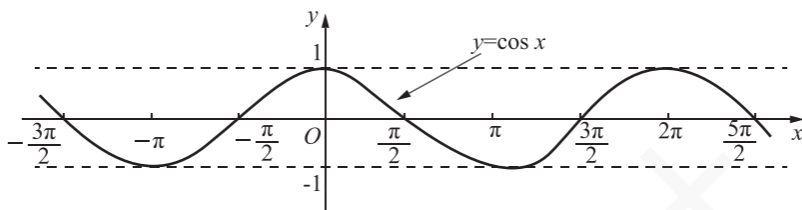


图 1-17

正切函数 $y = \tan x$ 的定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R}, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 周期为 π 且为奇函数, 如图 1-18 所示.

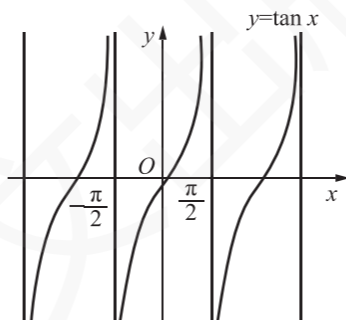


图 1-18

余切函数 $y = \cot x$ 的定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 周期为 π 且为奇函数, 如图 1-19 所示.

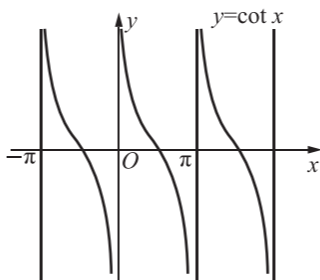


图 1-19

此外, 正割函数 $y = \sec x$ 及余割函数 $y = \csc x$ 分别为余弦函数和正弦函数的倒函数, 即

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

所以它们都是以 2π 为周期的函数, 并且在开区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内都是无界函数, 总有 $\sec x \geq 1$ 及 $\csc x \geq 1$.

5. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数, 常用的反三角函数有:

反正弦函数	$y = \arcsin x$,
反余弦函数	$y = \arccos x$,
反正切函数	$y = \arctan x$,
反余切函数	$y = \operatorname{arccot} x$.

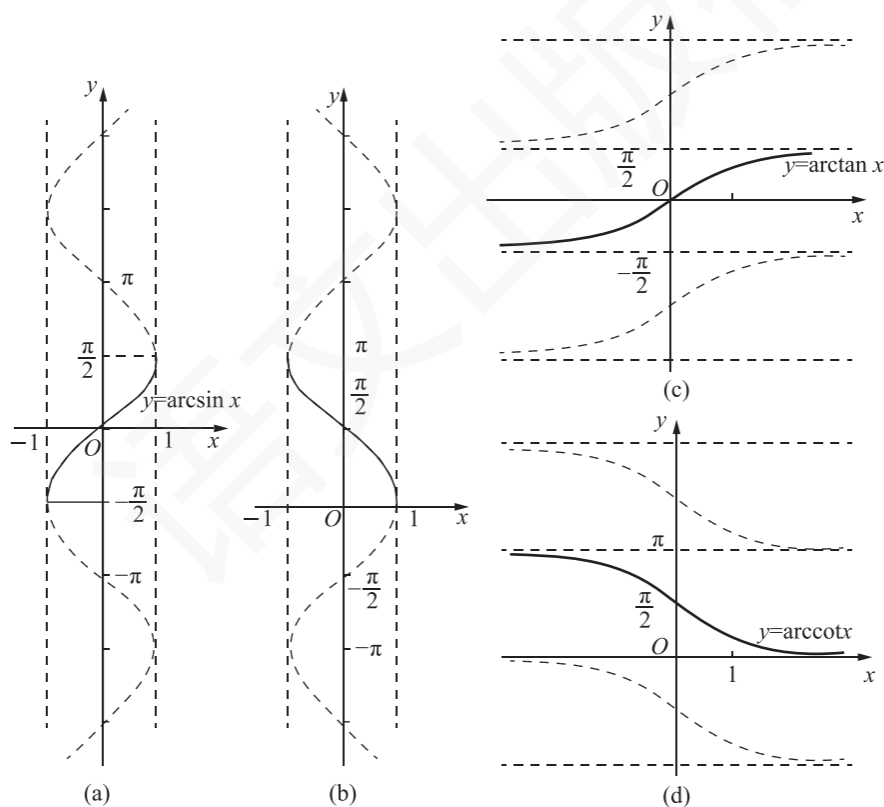


图 1-20

以上函数的图象如图 1-20 所示. 反三角函数的图象分别与其对应的三角函数的图

象对称于直线 $y=x$. 由于三角函数是周期函数, 对于值域内的每个值 y , 定义域总有无穷多个值 x 与之对应, 所以反三角函数都是多值函数, 我们可以取这些函数的一个单值分支, 称为主值, 记作

$$y = \arcsin x, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x, \quad y \in [0, \pi];$$

$$y = \arctan x, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \operatorname{arccot} x, \quad y \in (0, \pi).$$

在图 1-20 各图中实线部分即为主值的图象.

这样单值函数 $y = \arcsin x$ 及 $y = \arccos x$ 定义域都是闭区间 $[-1, 1]$, 值域分别是闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 及 $[0, \pi]$. 在 $[-1, 1]$ 上, $y = \arcsin x$ 是单调增加的, $y = \arccos x$ 是单调减少的.

$y = \arctan x$ 及 $y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域都是区间 $(-\infty, +\infty)$, 值域分别是开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 及 $(0, \pi)$. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $y = \arctan x$ 是单调增加的, $y = \operatorname{arccot} x$ 是单调减少的.

最后, 我们给出初等函数的定义: 由以上五种基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次的函数复合而构成的可以用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \sin^2 x$, $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$ 都是初等函数, 而诸如 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ \sin x, & x \leq 0 \end{cases}$, 这种分段函数往往不是初等函数.

习题 1-2

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{5-2x} + \frac{1}{x};$$

$$(2) y = \sqrt{1-|x|};$$

$$(3) y = \frac{1}{|x|-x};$$

$$(4) y = \lg x + \frac{1}{\tan x};$$

$$(5) y = \frac{1}{x} \lg \frac{1-x}{1+x};$$

$$(6) y = \arcsin(x-1);$$

$$(7) y = \arctan \frac{1}{x} + \sqrt{2-x};$$

$$(8) y = \cos \sqrt{x^2-1};$$

$$(9) y = \sqrt{\cos x - 1};$$

$$(10) y = \ln(\ln x);$$

$$(11) y = 2^{-x^2}.$$

2. 验证下列函数是否是单调函数.

$$(1) y = x^3, (-\infty, +\infty);$$

$$(2) y = \cos x, (0, \pi);$$

$$(3) y = \sqrt{x}, (0, +\infty).$$

3. 试举例说明: 单调增函数是否一定无界?
4. 下列函数中哪些是偶函数? 哪些是奇函数? 哪些既不是偶函数也不是奇函数?
- (1) $y = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; (2) $y = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-3, 4)$;
- (3) $y = |x-1|$; (4) $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$;
- (5) $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$; (6) $f(x) = (x^2 - x) / (x - 1)$.
5. $\sin^2 x$ 是不是周期函数? 如果是, 求它的周期.
6. 函数 $f(x) = 2^{-x} \cos x$ 在 $[0, +\infty)$ 内是 ().
- A. 偶函数 B. 单调函数 C. 有界的 D. 奇函数
7. 设 $f(x) = \frac{2x+3}{4x-2}$, 求 $f^{-1}(x)$.
8. 设 $f(x) = x^2 - x$, $\varphi(x) = \sin 2x$, 写出 $f[f(x)], f[\varphi(x)], \varphi[f(x)]$ 的表达式.
9. 函数 $y = [f(x)]^2$ 与 $y = f(x^2)$ 是由哪两个函数复合而成?
10. 设 $y = f(x)$ 的定义区间为 $(0, 1]$, 求下列各函数的定义域.
- (1) $y = f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;
- (3) $f(\lg x)$; (4) $f\left(x - \frac{1}{2}\right) + f(\log_2 x)$.
11. 计算.
- (1) $\arccos(-1) - \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$; (2) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$;
- (3) $\arctan(-\sqrt{3}) - \arctan(-1)$.
12. 下列函数中哪些是初等函数? 哪些不是初等函数?
- (1) $y = e^{-x^2}$; (2) $|x|$; (3) $y = \sqrt{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\sin x\right)$;
- (4) $y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \leq 0. \end{cases}$

1.3 经济活动中常用的函数

1.3.1 总成本函数

在经济活动中, 总成本由固定成本和变动成本两部分组成.

例 1 设某厂生产某种产品的最大生产能力为 b 个单位, 至少要生产 a 个单位, 固定费用为 C_1 元, 每生产 1 个单位产品, 变动费用增加 C_2 元, 试求总成本函数.

解: 设 q 表示总产量, 则 q 只能在 $[a, b]$ 内取值, 生产 q 个单位的变动成本为 $C_2 q$.

所以总成本

$$C = C_1 + C_2 q, \quad q \in [a, b].$$

1.3.2 收益函数

收益函数就是销量与价格的乘积, 以 q 代表销量, P 代表价格, R 代表收益, 则有

$$R = P \cdot q,$$

如果把 P 看作是 q 的函数 $P = P(q)$, 那么收益也是 q 的函数, 即

$$R = P \cdot q = R(q).$$

1.3.3 利润函数

收益与成本之差就是利润 L , 即

$$L = R(q) - C(q).$$

1.3.4 平均成本函数

平均成本就是总成本除以总产量所得的值, 也就是平均单位产品的成本. 设产量为 q , 总成本为 $C(q)$, 则平均成本 (记为 A.C) 为

$$\text{A.C} = \frac{C(q)}{q}.$$

例 2 某工厂生产某种产品的总成本中, 固定费用 $C_0 = 3$ 万元, 单位产品 (每台) 变动费用 $V = 600$ 元, 单位产品售价 p 为 1 000 元, 求产量为 q (也为销量) 时的总成本 C , 毛收入 R 与利润 L .

解: $C = C_0 + 600q = 30\,000 + 600q$,

$$R = 1\,000q,$$

$$L = 1\,000q - (30\,000 + 600q) = 400q - 30\,000 = 400(q - 75).$$

习题 1-3

1. 设生产某种商品 x 件时的总成本为 $C(x) = 100 + 3x + x^2$ (万元). 若每售出一件商品的收入是 43 万元, 求生产 30 件时的总利润和平均利润.

2. 已知某种产品的总成本函数为 $C(q) = 1\,000 + \frac{q^2}{2}$ (元). 求当生产 100 件该产品时的总成本和平均成本.

1.4 数学模型

数学模型是对现实问题某种现象的数学描述（通常表达为函数或方程），例如人口的数量、产品的销售量、化学反应中物质的浓度、落体的速度、初生儿生命的预期等问题。建立数学模型的目的是理解这些现象，并通过模型对未来的行为作一些预测和推断。

图 1-21 阐明了数学建模的基本步骤，对于一个实际的问题，第一步是分析和确定自变量和因变量、做一些假设使所研究的现象简化到数学上可以处理的程度，从而建立一个数学模型。通常利用已知的物理知识和数学技巧来得到联系这些变量的方程。遇到没有规律可用的情形，我们需要收集数据（通过图书馆、网络或者自身经验）并用表格的形式来研究数据，以观察其分布。

从函数的数值表达出发，通过将数据描点，就可以得到函数的图象。某些情形下这种图象甚至能够启示一个合适的代数表达式。

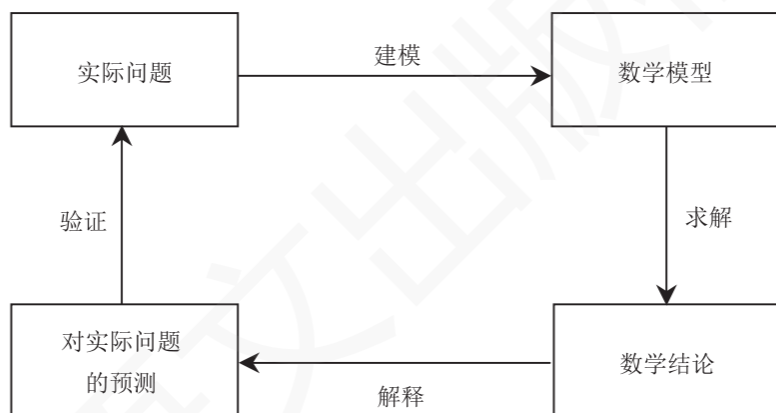


图 1-21 建模步骤

第二步是将数学知识和工具（比如本书中将要学习的微积分学）应用到我们已经得到的数学模型，设法给出该数学问题的解答。第三步是将已经得到的数学上的结论，解释为原始的实际问题的信息；依此来说明对象或者预测未来。最后一步是通过新的数据，测试我们的预测结果。如果预测与现实吻合得不好，我们就需要修正模型或者确立一个新的模型，并重新开始这个循环过程。

数学模型永远不会是自然界真实问题的精确表现——它永远只是理想化的东西。一个好的数学模型应该将现实问题化到足以允许数学计算，但又精确到足以提供有价值的结论。

许多不同类型的函数，都可以用来给现实世界中观察的现象建立模型。下面，我们将讨论这些函数的性态和图象，并给出成功地使用这些函数建模的例子。

1. 线性模型

线性函数的图象是一条直线，所以我们可以用直线方程的斜率—截距形式来写出函数如下的公式：

$$y = f(x) = mx + b,$$

其中， m 是直线的斜率， b 是 y 轴截距。

线性函数的一个典型特征就是它们以恒定的速度变化。例如，图 1-22 展示的是线性函数 $f(x) = 3x - 2$ 的图象以及样本值的表格（见表 1-2）。注意到只要 x 增加 0.1，函数值 $f(x)$ 就增加 0.3。故 $f(x)$ 增长的速度是 x 增长速度的三倍。从而， $f(x) = 3x - 2$ 的图象的斜率就是 3，也可以认为斜率是 y 关于 x 的变化速度。

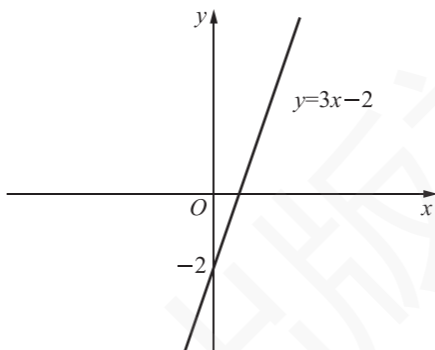


图 1-22

表 1-2

x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

例 1 (1) 当干燥的空气上升，会膨胀、冷却。如果地面温度是 20°C 而 1 km 高度的气温是 10°C ，将气温 T (单位： $^{\circ}\text{C}$) 表示为高度 h (单位：km) 的函数，假设线性模型适用。

(2) 画出 (1) 函数的图象并说明斜率代表什么。

(3) 2.5 km 高度的气温是多少？

解：(1) 假设 T 是 h 的线性函数，所以有

$$T = mh + b.$$

已知 $h=0$ 时 $T=20$, 故

$$20 = m \cdot 0 + b = b.$$

再由 $h=1$ 时 $T=10$, 故

$$10 = m \cdot 1 + 20.$$

从而得出直线的斜率 $m = 10 - 20 = -10$, 所求函数为

$$T = -10h + 20.$$

(2) 图象如图 1-23 所示. 斜率 $m = -10^\circ\text{C}/\text{km}$, 表示温度关于高度的变化速度.

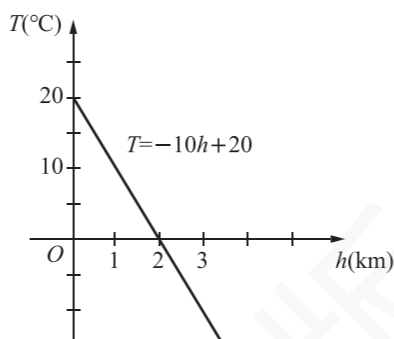


图 1-23

(3) 在 $h=2.5$ km 的高度, 气温为 $T = -10 \times 2.5 + 20 = -5$ ($^\circ\text{C}$).

如果没有自然规律或法则来帮助我们建立模型, 我们就构造一个经验模型, 它完全以已收集到的数据为基础, 我们寻找一条直观上能反映这些数据点的基本趋势的曲线来“拟合”这些数据.

例 2 表 1-3 列出的是从 1980 年到 2000 年在莫纳罗亚气象台测得的大气中二氧化碳的平均水平 (10^{-6}). 利用表 1-3 中的数据找到一个二氧化碳水平的模型.

表 1-3

年份	CO ₂ 水平 (10^{-6})
1980	338.7
1982	341.1
1984	344.4
1986	347.2
1988	351.5
1990	354.2
1992	356.4
1994	358.9
1996	362.6
1998	366.6
2000	369.4

解 我们利用表 1-3 的数据作出如图 1-24 的离散图, 其中 t 代表时间 (单位: 年), C 代表 CO_2 水平 (10^{-6}).

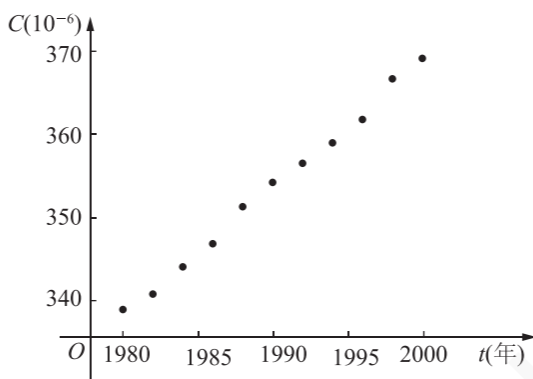


图 1-24 平均 CO_2 水平分布图

注意到数据点的分布看起来接近一条直线, 所以在这个案例中很自然地选择线性模型. 但是有很多直线接近这些数据点, 那我们应该选择哪一条呢? 从图象看, 有一个可能性是经过第一个和最后一个数据点的直线. 这条直线的斜率是

$$\frac{369.4 - 338.7}{2\,000 - 1980} = \frac{30.7}{20} = 1.535,$$

其方程为

$$C - 338.7 = 1.535(t - 1980),$$

或

$$C = 1.535t - 2\,700.6. \quad (1)$$

方程 1 给出了二氧化碳水平的一个可能的线性模型, 如图 1-25 所示.

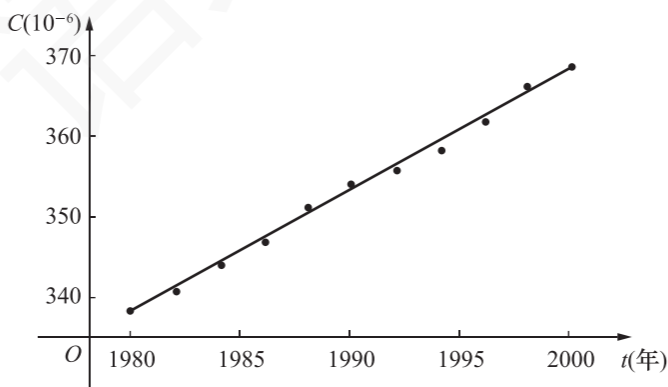


图 1-25

尽管我们的模型和数据吻合得相当好，但它给出的数值还是大部分比实际的 CO_2 水平要高。更好的线性模型可以通过一种叫作线性回归的统计手段得到。通过表 1-3 中的数据可以给出回归直线的斜率和 y 轴截距如下

$$m = 1.53818, \quad b = -2\,707.25.$$

故 CO_2 水平的最小二乘模型为

$$C = 1.53818t - 2\,707.25. \quad (2)$$

在图 1-26 中我们画出回归曲线及数据点，与图 1-25 相比较，我们看到它给出了一个比先前那个更好的线性模型。

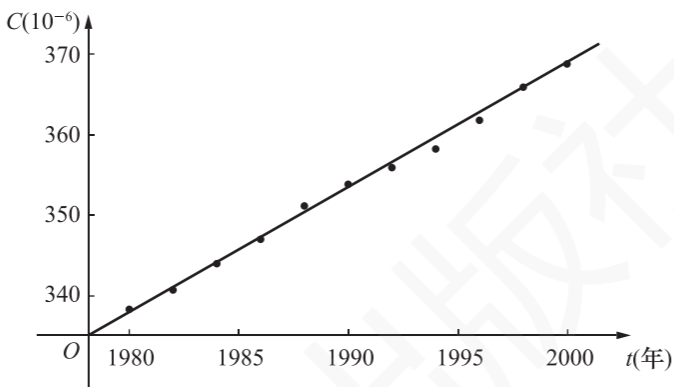


图 1-26

例 3 利用方程 (2) 给出的线性模型来估计 1987 年平均 CO_2 水平并给出 2010 年 CO_2 水平的预测。通过这个模型，什么时候 CO_2 的水平将超过 400×10^{-6} ？

解：在方程 (2) 中令 $t = 1987$ ，我们估计 1987 年平均 CO_2 水平为

$$C(1987) = 1.53818 \times 1987 - 2\,707.25 \approx 349.11.$$

这是内插法的一个例子，因为我们估计了两个观察到的值之间的值（事实上，莫纳罗亚气象台报告的 1987 年平均 CO_2 水平为 348.93×10^{-6} ，所以我们的估算还是相当精确的）。

当 $t = 2010$ 时，我们有

$$C(2010) = 1.53818 \times 2010 - 2\,707.25 \approx 384.49.$$

所以我们预测 2010 年平均 CO_2 水平将为 384.5×10^{-6} 。这是外插法的一个例子，因为我们预测了一个观察范围外的值。因此，我们对于预测准确性的把握就小多了。

利用方程 (2)，我们看到 CO_2 水平要超过 400×10^{-6} ，即

$$1.53818t - 2\,707.25 > 400.$$

解这个不等式, 我们得到

$$t > \frac{3107.25}{1.53818} \approx 2020.08.$$

由此我们可以预测 CO_2 水平将在 2020 年超过 400×10^{-6} .

2. 多项式

多项式一般可表示为

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

其中, n 为非负整数, $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数, 称为多项式的系数. 任何多项式的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$. 如果首项系数 $a_n \neq 0$, 则多项式的次数就为 n .

一次多项式具有形式 $P(x) = mx + b$, 所以是线性函数. 二次多项式具有形式 $P(x) = ax^2 + bx + c$, 称为二次函数, 它的图象是通过移动抛物线 $y = ax^2$ 得到的抛物线. 如果 $a > 0$, 则抛物线开口向上, $a < 0$, 则开口向下 (图 1-27).

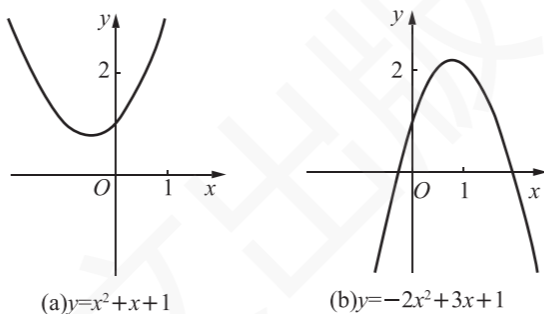


图 1-27

三次多项式具有形式

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

称为三次函数. 图 1-28 的 (a) 给出了三次函数的图象, (b) 和 (c) 分别是 4 次和 5 次多项式的图象. 以后我们可以看到为什么它们的图象有这样的形状.

多项式被普遍地用在自然和社会科学中的变量的建模上.

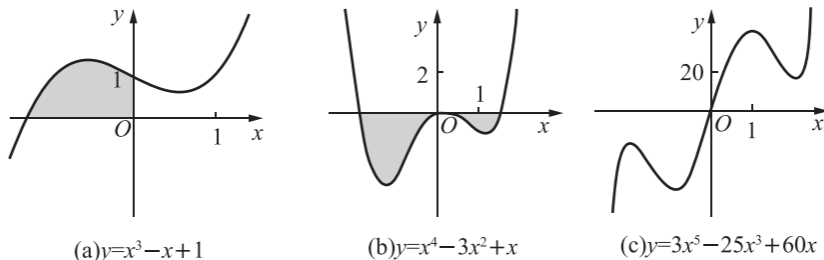


图 1-28

下面我们用二次函数来建立球下落的模型.

例 4 一个球从电视塔上面离地面 450 m 的观察台上被抛下. 球每隔 1 s 离地面的高度 h 记录在表 1-4 中. 找出符合这些数据的模型并由此预测球落地的时间.

表 1-4

时间 (s)	高度 (m)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

解: 我们在图 1-29 中画出数据点的离散图并观察到线性模型是不适合的. 但看起来似乎数据点分布在一条抛物线上, 我们就尝试用二次函数来替代. 利用计算机代数系统 (用最小二乘法), 我们得到如下的二次模型.

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2, \quad (3)$$

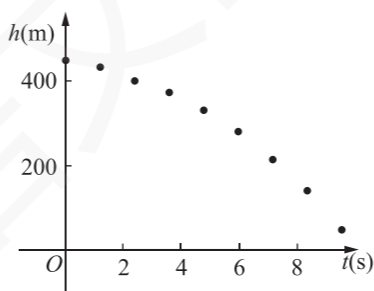


图 1-29 下落球的离散点

在图 1-30 中我们画出了方程 (3) 的图象以及数据点, 可以看出二次模型有很好的吻合.

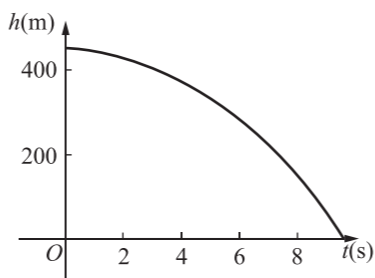


图 1-30 下落球的二次曲线

当 $h=0$ 时球落地，故我们解二次方程

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0,$$

由二次方程的求根公式给出

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4 \times (-4.90) \times 449.36}}{2 \times (-4.90)},$$

正根为 $t \approx 9.67$ ，因此我们预测球将在大约 9.67 s 后落地。

还有许多建立数学模型的函数，限于篇幅，不再一一详述。

习题 1-4

1. 生物学家发现某种蟋蟀鸣叫的频率似乎与温度有关，表 1-5 给出了不同温度的鸣叫频率。

表 1-5

温度 (F)	鸣叫频率 (次 / 分钟)
50	20
55	46
60	79
65	91
70	113
75	140
80	173
85	198
90	211

- (1) 画出数据的离散图。
- (2) 找到并画出回归直线。
- (3) 利用 (2) 的线性模型估计出 100 F 时鸣叫的频率。

2. 利用表 1-6 的数据通过一个三次函数来为 21 世纪的世界人口建立模型。然后用你的模型来估计 2025 年的人口数。

表 1-6

年份	人口(百万)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080
2010	6970
2020	7821

自我测验题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -2, \\ x+9, & -2 < x < 2, \\ 2^x, & x \geq 2, \end{cases}$ 则下列各式中不成立的是 ().
 A. $f(-2) = f(2)$ B. $f(1) = f(4)$
 C. $f(-1) = f(3)$ D. $f(0) = f(-3)$
2. 函数 $y = \frac{1}{2}e^{x-1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是 ().
 A. 单调增函数 B. 单调减函数
 C. 非单调函数 D. 有界函数
3. 函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是 ().
 A. 无界函数 B. 有界函数
 C. 上无界下有界 D. 上有界下无界
4. 函数 $f(x) = \tan(3\pi x + 1) - 5$ 的周期是 ().
 A. π B. 3 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}\pi$.
5. 设 $\varphi(x) = \sqrt[n]{1-x^n}, 0 < x \leq 1$, 求 $\varphi[\varphi(x)]$, 并求 $\varphi(x)$ 的反函数.

6. 求下列各函数的定义域.

$$(1) f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}; \quad (2) y = \sin(2x+1) + \arctan x;$$

$$(3) f(x) = \sqrt{\lg\left(\frac{9x-x^2}{2}\right)} - 1.$$

7. 表 1-7 中给出了 20 世纪奥运会中撑杆跳比赛的取胜高度.

表 1-7

年份	高度 (ft)	年份	高度 (ft)
1900	10.83	1956	14.96
1904	11.48	1960	15.42
1908	12.17	1964	16.73
1912	12.96	1968	17.71
1920	13.42	1972	18.04
1924	12.96	1976	18.04
1928	13.77	1980	18.96
1932	14.14	1984	18.85
1936	14.27	1988	19.77
1948	14.10	1992	19.02
1952	14.92	1996	19.42

(1) 画出离散图并确定线性模型是否适合.

(2) 找到并画出回归直线.

(3) 利用该线性模型预计出 2000 年奥运会撑杆跳比赛的取胜成绩并与实际的值比较.

(4) 用模型来预计 2100 奥运会的取胜高度合理吗?

8. 某商品的成本函数 (单位: 元) 为 $C = 81 + 3q$, 其中 q 为该商品的数量. 问:

(1) 售价为 12 元 / 件时, 售出 10 件商品的利润为多少?

(2) 售价为 12 元 / 件时, 至少生产该商品多少件, 开始产生利润?

总复习题

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \arcsin(x-1); (2) y = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x-1}; (3) y = \sqrt{\sin x}; (4) y = \arctan x + \sqrt{1-|x|}; (5) y = \frac{1}{x^2-1} + \arccos x + \sqrt{x}.$$

2. 设 $f(x) = \arcsin(\lg x)$, 求 $f(10^{-1}), f(1), f(10)$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 0, \\ 1 - x, & x < 0, \end{cases}$ 求 $f(1), f(-2), f(0)$.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0; \\ x + 1, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f(x+1), f(x-1)$.

5. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y = \sqrt{2 - x^2}$; (2) $y = \tan e^{5x}$; (3) $y = \sin^2(1 + 2x)$; (4) $y = [\arcsin(1 - x^2)]^3$;

(5) $y = \sqrt{\ln \tan x^2}$; (6) $y = \cos \frac{1}{x-1}$.

6. 甲船以每小时 20 nmile (注: nmile 为长度单位, 称为海里, 1 海里约等于 1 852 m) 的速度均匀向东行驶, 同一时间乙船在甲船正北 80 nmile 处以每小时 15 nmile 的速度均匀向南行驶, 试将两船间的距离表示成时间的函数.

7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的图形.

8. 若 $f(x) = 10^x$, $g(x) = \ln x$, 求:

(1) $f[g(100)]$; (2) $g[f(3)]$; (3) $f[g(x)]$; (4) $g[f(x)]$.

9. 做一个容积为 V 的圆柱形无盖小桶, 试将圆桶的全面积 S 表示成圆桶底半径 r 的函数.

10. 设销售某种商品的总收入 R 是销售量 x 的二次函数, 经统计得知当销售量分别为 0, 2, 4 时, 总收入 R 为 0, 4, 16, 试确定 R 关于 x 的函数式.

11. 设生产某种产品 x 件时的总成本为 $C(x) = 100 + 2x + x^2$ (万元), 若销售价格为 $P = 250 - 5x$ (x 为需求量), 试写出总利润函数.

12. 某厂生产一种元件, 设计能力为日产 120 件. 每日的固定成本为 200 元, 每件的平均可变成本为 10 元. 问:

(1) 试求该厂此元件的日总成本函数及平均成本函数.

(2) 若每件售价 15 元, 试写出总收入函数.

13. 表 1-8 中给出的是 1989 年某健康调查所报告的不同收入家庭 (终身) 消化器官溃疡率 (每百人).

表 1-8

收入 (美元)	溃疡率 (百人)
4 000	14.1
6 000	13.0
8 000	13.4
12 000	12.5
16 000	12.0
20 000	12.4
30 000	10.5
45 000	9.4
60 000	8.2

- (1) 画出这些数据的离散图并确定线性模型是否适合.
- (2) 求第一个和最后一个数据给出的线性模型并画图.
- (3) 给出最小二乘回归模型并画图.
- (4) 利用(3)中的线性模型来估计收入为 25 000 美元的溃疡率.
- (5) 根据这个模型, 一个收入为 80 000 美元的人遭受消化器官溃疡的可能性有多大?
- (6) 你认为将该模型用到一个收入为 200 000 美元的人身上合理吗?