前　　言

大学物理实验是理工科学生进入大学后较早遇到的一门系统、全面的课程。该门课程对学生独立工作能力的培养有十分重要的影响。大学物理实验课程教学质量的高低是由学校各级领导对物理实验的重视程度、师资水平、实验室设备条件、教师对学生的循循善诱和严格要求以及课程如何组织实施等诸多因素综合决定的，实验教材则是其中很重要的一个载体。

本书是根据高等学校物理实验课程教学基本要求，按照“江苏高等学校实验教学示范中心建设指南”，结合编者多年来的教学经验编写而成的。它是教学实践的产物，注重培养学生的独立工作能力和实验素养。

本书主要有以下特点：一是根据国际上统一测量不确定度量化表示的进展情况，结合物理实验教学的实际水平，实行以不确定度评定实验结果的新方法；二是解决实验绪论与具体实验项目相互脱节的矛盾，使之更有机融合；三是实验项目紧贴学校的实验条件，学生没有陌生感，稍加努力便可以完成；四是与物理实验网络多媒体教学系统相互配套，易于学生自学。

在本书的编写过程中，我们参考了一些物理实验的教材，在此向有关作者谨致谢意！

本书的出版是大家共同努力的结果。在此编者特向为本书出版作出贡献的所有同志致以衷心的谢意！

本书可供高等院校有关专业物理实验教学之用。限于我们的水平，书中错误和不足之处，敬请读者批评指正。

编　者

目　　录

第一部分　测量误差及数据处理

物理实验的任务不仅是定性地观察各种自然现象，更重要的是定量地测量相关物理量。而对事物定量地描述又离不开数学方法和进行实验数据的处理。因此，误差分析和数据处理是物理实验课的基础。本章将从测量及误差的定义开始，逐步介绍有关误差和实验数据处理的方法和基本知识。误差理论及数据处理是一切实验结果中不可缺少的内容，是不可分割的两部分。误差理论是一门独立的学科。随着科学技术的发展，近年来误差理论基本的概念和处理方法也有很大发展。误差理论以数理统计和概率论为其数学基础，研究误差性质、规律及如何消除误差。实验中的误差分析，其目的是对实验结果作出评定，最大限度地减小实验误差，或指出减小实验误差的方向，提高测量质量，提高测量结果的可信赖程度。对低年级大学生而言，这部分内容难度较大，本课程仅限于介绍误差分析的初步知识，着重点放在几个重要概念及最简单情况下的误差处理方法，不进行严密的数学论证，减小学生学习的难度，有利于学好物理实验这门基础课程。

第一节　测量与误差

物理实验不仅要定性地观察物理现象，更重要的是找出有关物理量之间的定量关系，因此就需要进行定量的测量，以取得物理量数据的表征。对物理量进行测量，是物理实验中极其重要的一个组成部分。对某些物理量的大小进行测定，实验上就是将此物理量与规定的作为标准单位的同类量或可借以导出的异类物理量进行比较，得出结论，这个比较的过程就叫做测量。例如，物体的质量可通过与规定用千克作为标准单位的标准砝码进行比较而得出测量结果；物体运动速度的测定则必须通过与两个不同的物理量，即长度和时间的标准单位进行比较而获得。比较的结果记录下来就叫做实验数据。测量得到的实验数据应包含测量值的大小和单位，二者是缺一不可的。

国际上规定了七个物理量的单位为基本单位。其他物理量的单位则是由以上基本单位按一定的计算关系式导出的。因此，除基本单位之外的其余单位均称为导出单位。如以上提到的速度以及经常遇到的力、电压、电阻等物理量的单位都是导出单位。

一个被测物理量，除了用数值和单位来表征它外，还有一个很重要的表征它的参数，这便是对测量结果可靠性的定量估计。这个重要参数却往往容易为人们所忽视。设想如果得到一个测量结果的可靠性几乎为零，那么这种测量结果还有什么价值呢？因此，从表征被测量这个意义上来说，对测量结果可靠性的定量估计与其数值和单位至少具有同等的重要意义，三者是缺一不可的。

一、测量

测量可以分为两类。按照获得测量结果的方法来分，可将测量分为直接测量和间接测量两类，而从测量条件是否相同来分，又有所谓等精度测量和不等精度测量。

根据测量方法可分为直接测量和间接测量。直接测量就是把待测量与标准量直接比较得出结果。如用米尺测量物体的长度，用天平称量物体的质量，用电流表测量电流等，都是直接测量。间接测量借助函数关系由直接测量的结果计算出所谓的物理量。例如已知了路程和时间，根据速度、时间和路程之间的关系求出的速度就是间接测量。

一个物理量能否直接测量不是绝对的。随着科学技术的发展，测量仪器的改进，很多原来只能间接测量的量，现在可以直接测量了。比如电能的测量本来是间接测量，现在也可以用电度表来进行直接测量。物理量的测量，大多数是间接测量，但直接测量是一切测量的基础。

根据测量条件来分，有等精度测量和非等精度测量。等精度测量是指在同一(相同)条件下进行的多次测量，如同一个人，用同一台仪器，每次测量时周围环境条件相同，等精度测量每次测量的可靠程度相同。反之，若每次测量时的条件不同，或测量仪器改变，或测量方法、条件改变。这样所进行的一系列测量叫做不等精度测量，不等精度测量的结果，其可靠程度自然也不相同。物理实验中大多采用等精度测量。应该指出：重复测量必须是重复进行测量的整个操作过程，而不是仅仅为重复读数。

测量仪器是进行测量的必要工具。熟悉仪器性能，掌握仪器的使用方法及正确进行读数，是每个测量者必备的基础知识。如下简单介绍仪器精密度、准确度、精确度和量程等基本概念。

仪器的精密度、准确度和精确度都是评价测量结果的术语，但目前使用时其涵义并不尽一致，以下介绍较为普遍采用的意见。

测量精密度表示在同样测量条件下，对同一物理量进行多次测量，所得结果彼此间相互接近的程度，即测量结果的重复性、测量数据的弥散程度，因而测量精密度是测量偶然误差的反映。测量精密度高，偶然误差小，但系统误差的大小不明确。

仪器精密度是指仪器的最小分度相当的物理量。仪器最小的分度越小，所测量物理量的位数就越多，仪器精密度就越高。对测量读数最小一位的取值，一般来讲应在仪器最小分度范围内再估计读出一位数字。如具有毫米分度的米尺，其精密度为 1 毫米，应该估计读出到毫米的十分位；螺旋测微器的精密度为 0.01 毫米，应该估计读出到毫米的千分位。

仪器准确度是指仪器测量读数的可靠程度。它一般标在仪器上或写在仪器说明书上。如电学仪表所标示的级别就是该仪器的准确度。对于没有标明准确度的仪器，可粗略地取仪器最小的分度数值或最小分度数值的一半，一般对连续读数的仪器取最小分度数值的一半，对非连续读数的仪器取最小的分度数值。在制造仪器时，其最小的分度数值是受仪器准确度约束的，不同的仪器准确度是不一样的，测量长度的常用仪器米尺、游标卡尺和螺旋测微器，它们的仪器准确度依次提高。

测量准确度表示测量结果与真值接近的程度，因而它是系统误差的反映。测量准确

度高，则测量数据的算术平均值偏离真值较小，测量的系统误差小，但数据较分散，偶然误差的大小不确定。

测量精确度则是对测量的偶然误差及系统误差的综合评定。精确度高，测量数据较集中在真值附近，测量的偶然误差及系统误差都比较小。

总之，精密度高是指随机误差小，数据集中；准确度高是指系统误差小，测量的平均值偏离真值小；精确度高是指测量的精密度和准确度都高。数据集中而且偏离真值小，即随机误差和系统误差都小。

量程是指仪器所能测量的物理量最大值和最小值之差，即仪器的测量范围(有时也将所能测量的最大值称量程)。在测量过程中，超过仪器量程使用仪器是不允许的，轻则仪器准确度降低，使用寿命缩短，重则损坏仪器。

二、误差与偏差

测量的目的就是为了得到被测物理量所具有的客观真实数据，但由于受测量方法、测量仪器、测量条件以及观测者水平等多种因素的限制，只能获得该物理量的近似值，也就是说，一个被测量值 N 与真值 N_0 之间总是存在着差值，这种差值称为测量误差，即

$$\Delta N = N - N_0$$

显然误差 ΔN 有正负之分，因为它是测量值与真值的差值，常称为绝对误差。注意，绝对误差不是误差的绝对值！

误差存在于一切测量之中，测量与误差形影不离，分析测量过程中产生的误差，将影响降到最低程度，并对测量结果中未能消除的误差作出估计，是实验中的一项重要工作，也是实验的基本技能。实验总是根据对测量结果误差限度的一定要求来制定方案和选用仪器的，不要以为仪器精度越高越好。因为测量的误差是各个因素所引起的误差的总和，要以最小的代价来取得最好的结果，要合理的设计实验方案，选择仪器，确定测量方法。如比较法、替代法、天平复称法等，都是为了减小测量误差；对测量公式进行这样或那样的修正，也是为了减少某些误差的影响；在调节仪器时，如调节仪器使其处于铅直、水平状态，要考虑到什么程度才能使它的偏离对实验结果造成的影响可以忽略不计；电表接入电路和选择量程都要考虑到引起误差的大小。在测量过程中某些对结果影响大的关键量，就要努力想办法将它测准；有的测量不太准确对结果没有什么影响，就不必花太多的时间和精力去对待，在进行处理数据时，某个数据取到多少位，怎样使用近似公式，作图时坐标比例、尺寸大小怎样选取，如何求直线的斜率等，都要考虑到引入误差的大小。

由于客观条件所限、人们认识的局限性，测量不可能获得待测量的真值，只能是近似值。设某个物理量真值为 x_0，进行 n 次等精度测量，测量值分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$(测量过程无明显的系统误差)，它们的误差为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_0$$

$$\cdots$$

$$\Delta x_n = x_n - x_0$$

求和

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - n x_0$$

即

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - x_0$$

当测量次数 $n \to \infty$，可以证明 $\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i}{n} \to 0$，而且 $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$ 是 x_0 的最佳估计值，称 $\overline{x}$ 为测量值的近似真实值。为了估计误差，定义测量值与近似真实值的差值为偏差：即 $\Delta x_i = x_i - \overline{x}$。偏差又叫做“残差”。实验中真值得不到，因此误差也无法知道，而测量的偏差可以准确知道，实验误差分析中要经常计算这种偏差，用偏差来描述测量结果的精确程度。

三、相对误差

绝对误差与真值之比的百分数叫做相对误差。用 E 表示

$$E = \frac{\Delta N}{N_0} \times 100\%$$

由于真值无法知道，所以计算相对误差时常用 N 代替 N_0。在这种情况下，N可能是公认值，或高一级精密仪器的测量值，或测量值的平均值。相对误差用来表示测量的相对精确度，相对误差用百分数表示，保留两位有效数字。

四、系统误差与随机误差

根据误差的性质和产生的原因，可分为系统误差和随机误差。

1. 系统误差

系统误差是指在一定条件下多次测量的结果总是向一个方向偏离，其数值一定或按一定规律变化。系统误差的特征是具有一定的规律性。系统误差的来源具有以下几个方面：(1)仪器误差。它是由于仪器本身的缺陷或没有按规定条件使用仪器而造成的误差。(2)理论误差。它是由于测量所依据的理论公式本身的近似性，或实验条件不能达到理论公式所规定的要求，或测量方法等所带来的误差。(3)观测误差。它是由于观测者本人生理或心理特点造成的误差。例如，用“落球法”测量重力加速度，由于空气阻力的影响，多次测量的结果总是偏小，这是测量方法不完善造成的误差；用停表测量运动物体通过某一段路程所需要的时间，若停表走时太快，即使测量多次，测量的时间 t 总是偏大为

一个固定的数值，这是仪器不准确造成的误差；在测量过程中，若环境温度升高或降低，使测量值按一定规律变化，是由于环境因素变化引起的误差。

在任何一项实验工作和具体测量中，必须要想尽一切办法，最大限度地消除或减小一切可能存在的系统误差，或者对测量结果进行修正。发现系统误差需要改变实验条件和实验方法，反复进行对比，系统误差的消除或减小是比较复杂的一个问题，没有固定不变的方法，要具体问题具体分析。产生系统误差的原因可能不止一个，一般应找出影响的主要因素，有针对性地消除或减小系统误差。以下介绍几种常用的方法。

检定修正法：指将仪器、量具送计量部门检验取得修正值，以便对某一物理量测量后进行修正的一种方法。

替代法：指测量装置测定待测量后，在测量条件不变的情况下，用一个已知标准量替换被测量来减小系统误差的一种方法。如消除天平的两臂不等对测量的影响可用此办法。

异号法：指对实验时在两次测量中出现符号相反的误差，采取平均值后消除的一种方法。例如在外界磁场作用下，仪表读数会产生一个附加误差，若将仪表转动 180° 再进行一次测量，外磁场将对读数产生相反的影响，引起负的附加误差。两次测量结果平均，正负误差可以抵消，从而可以减小系统误差。

2. 随机误差

在实际测量条件下，多次测量同一量时，误差时大时小、时正时负，以不可预定方式变化着的误差叫做随机误差，有时也叫偶然误差。当测量次数很多时，随机误差就显示出明显的规律性。实践和理论都已证明，随机误差服从一定的统计规律(正态分布)，其特点是：绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大(单峰性)；绝对值相等的正负误差出现的概率相同(对称性)；绝对值很大的误差出现的概率趋于零(有界性)；误差的算术平均值随着测量次数的增加而趋于零(抵偿性)。因此，增加测量次数可以减小随机误差，但不能完全消除。

引起随机误差的原因也很多。与仪器精密度和观察者感官灵敏度有关，如仪器显示数值的估计读数位偏大和偏小；仪器调节平衡时，平衡点确定不准；测量环境扰动变化以及其他不能预测不能控制的因素，如空间电磁场的干扰，电源电压波动引起测量的变化等。

由于测量者过失，如实验方法不合理，用错仪器，操作不当，读错数值或记错数据等引起的误差，是一种人为的过失误差，不属于测量误差，只要测量者采取严肃认真的态度，过失误差是可以避免的。

五、随机误差的估算

对某一测量进行多次重复测量，其测量结果服从一定的统计规律，也就是正态分布(或高斯分布)。我们用描述高斯分布的两个参量(x 和 σ)来估算随机误差。设在一组测量值中，n 次测量的值分别为：$x_1, x_2, \cdots, x_n$

1. 算术平均值

根据最小二乘法原理证明，多次测量的算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1}$$

是待测量真值 x_0 的最佳估计值。称 $\bar{x}$ 为近似真实值，以后我们将用 $\bar{x}$ 来表示多次测量的近似真实值。

2. 标准偏差

误差理论证明，平均值的标准偏差(贝塞尔公式)

$$S_x=\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}} \tag{2}$$

其意义表示某次测量值的随机误差在 $-\sigma_x \sim +\sigma_x$ 之间的概率为 68.3%。

3. 算术平均值的标准偏差

当测量次数 n 有限，其算术平均值的标准偏差为

$$S_{\bar{x}}=\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n\left(n-1\right)}} \tag{3}$$

其意义是测量平均值的随机误差在 $-\sigma_{\bar{x}} \sim +\sigma_{\bar{x}}$ 之间的概率为 68.3%。或者说，待测量的真值在 $\left(\bar{x}-\sigma_{\bar{x}}\right)\sim\left(\bar{x}+\sigma_{\bar{x}}\right)$ 范围内的概率为 68.3%。因此 $\sigma_{\bar{x}}$ 反映了平均值接近真值的程度。

当测量次数很少时，样本的平均值与平均值的标准偏差，可能严重偏离正态分布的平均值和平均值的标准偏差。根据误差理论，如果令：$T=S_{x_0}/S_{\bar{x}}$，式中 S_{x_0} 为统计的标准偏差，T 作为一个统计量将遵从另一种分布——T 分布，即“学生分布”。其函数式比较复杂，可不去管它。但 T 分布可以提供一个系数因子，简称 T 因子，用这个 T 因子乘样本的平均值的标准偏差作为置信区间，仍能保证在这个区间有 68.3%的置信概率。表 1-1 中列出几个常用的 T 因子。

表 1-1　T 因子表(表中 N 表示测量次数)

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T_{0.683}$	1.84	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06
$T_{0.95}$	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23
$T_{0.99}$	9.92	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17

从表中可见，$T_{0.683}$ 因子随测量次数的增加而趋向于 1，在测量次数 7 次以上可以不考虑 T 因子。在测量次数小于 7 次时，把测量结果表示成：$\bar{x}\pm T_{0.683}\cdot S_{\bar{x}}(p=68.3\%)$或$\bar{x}\pm T_{0.95}\cdot$

$S_{\bar{x}}(p=95\%)$或$\bar{x}\pm T_{0.99}\cdot S_{\bar{x}}(p=99\%)$ 。

六、异常数据的剔除

剔除测量列中异常数据的标准有 $3\sigma_x$ 准则、肖维准则、格拉布斯准则等。

1. $3\sigma_x$ 准则

统计理论表明，测量值的偏差超过 $3\sigma_x$ 的概率已小于 1%。因此，可以认为偏差超过 $3\sigma_x$ 的测量值是其他因素或过失造成的，为异常数据，应当剔除。剔除的方法是将多次测量所得的一系列数据，算出各测量值的偏差 Δx_i 和标准偏差 σ_x，把其中最大的 Δx_j 与 $3\sigma_x$ 比较，若 $\Delta x_j > 3\sigma_x$，则认为第 j 个测量值是异常数据，舍去不计。剔除 x_j 后，对余下的各测量值重新计算偏差和标准偏差，并继续审查，直到各个偏差均小于 $3\sigma_x$ 为止。

2. 肖维准则

假定对一物理量重复测量了 n 次，其中某一数据在这 n 次测量中出现的几率不到半次，即小于 $\frac{1}{2n}$，则可以肯定这个数据的出现是不合理的，应当予以剔除。

根据肖维准则，应用随机误差的统计理论可以证明，在标准误差为 σ 的测量列中，若某一个测量值的偏差等于或大于误差的极限值 K_σ，则此值应当剔出。不同测量次数的误差极限值 K_σ 列于表 1-2。

表 1-2　肖维系数表

n	K_σ	n	K_σ	n	K_σ
4	1.53σ	10	1.96σ	16	2.16σ
5	1.65σ	11	2.00σ	17	2.18σ
6	1.73σ	12	2.04σ	18	2.20σ
7	1.79σ	13	2.07σ	19	2.22σ
8	1.86σ	14	2.10σ	20	2.24σ
9	1.92σ	15	2.13σ	30	2.39σ

3. 格拉布斯(Grubbs)准则

若有一组测量得出的数值，其中某次测量得出数值的偏差的绝对值$|\Delta x_i|$与该组测量列的标准偏差 σ_x 之比大于某一阈值 $g_0(n,1-p)$，即

$$|\Delta x_i| > g_0(n,1-p)\cdot\sigma_x$$

则认为此测量值中有异常数据，并可予以剔除。这里 $g_0(n,1-p)$ 中的 n 为测量数据的个数。而 p 为服从此分布的置信概率。一般取 p 为 0.95 和 0.99(至于在处理具体问题时究竟取哪个值则由实验者自己来决定)。我们将在表 1-3 中给出 p=0.95 和 0.99 时或 1−p=0.05 和 0.01 时，不同的 n 值所对应的 g_0 值。

表 1-3　$g_0(n,1-p)$ 值表

n \ $1-p$	0.05	0.01	n \ $1-p$	0.05	0.01
3	1.15	1.15	17	2.48	2.78
4	1.46	1.49	18	2.50	2.82
5	1.67	1.75	19	2.53	2.85
6	1.82	1.94	20	2.56	2.88
7	1.94	2.10	21	2.58	2.91
8	2.03	2.22	22	2.60	2.94
9	2.11	2.32	23	2.62	2.96
10	2.18	2.41	24	2.64	2.99

第二节　测量结果的评定和不确定度

测量的目的是不但要测量待测物理量的近似值，而且要对近似真实值的可靠性作出评定(即指出误差范围)，这就要求我们还必须掌握不确定度的有关概念。下面将结合对测量结果的评定对不确定度的概念、分类、合成等问题进行讨论。

一、不确定度的含义

在物理实验中，常常要对测量的结果作出综合的评定，采用不确定度的概念。不确定度是“误差可能数值的测量程度”，表征所得测量结果代表被测量的准确程度。也就是因测量误差存在而对被测量不能肯定的程度，因而是测量质量的表征，用不确定度对测量数据作出比较合理的评定。对一个物理实验的具体数据来说，不确定度是指测量值(近真值)附近的一个范围，测量值与真值之差(误差)可能落于其中，不确定度小，测量结果可信赖程度高；不确定度大，测量结果可信赖程度低。在实验和测量工作中，不确定度一词近似于不确知，不明确，不可靠，有质疑，是作为估计而言的；因为误差是未知的，不可能用指出误差的方法去说明可信赖程度，而只能用误差的某种可能的数值去说明可信赖程度，所以不确定度更能表示测量结果的性质和测量的质量。用不确定度评定实验结果的误差，其中包含了各种来源不同的误差对结果的影响，而它们的计算又反映了这些误差所服从的分布规律，这是更准确地表述了测量结果的可靠程度，因而有必要采用不确定度的概念。

二、测量结果的表示和合成不确定度

在做物理实验时，要求表示出测量的最终结果。在这个结果中既要包含待测量的近似真实值 $\bar{x}$，又要包含测量结果的不确定度 $u_{\bar{x}}$，还要反映出物理量的单位。因此，要写成物理含意深刻的标准表达形式，即

$$x = \bar{x} \pm u_{\bar{x}}\ (\text{单位})$$

式中 x 为待测量；$\bar{x}$ 是测量的近似真实值，$u_{\bar{x}}$ 是合成不确定度，一般保留一位有效数字。这种表达形式反应了三个基本要素：测量值、合成不确定度和单位。

在物理实验中，直接测量时若不需要对被测量进行系统误差的修正，一般就取多次测量的算术平均值 $\bar{x}$ 作为近似真实值；若在实验中有时只需测一次或只能测一次，该次测量值就为被测量的近似真实值。如果要求对被测量进行一定系统误差的修正，通常是将一定系统误差(即绝对值和符号都确定的可估计出的误差分量)从算术平均值 $\bar{x}$ 或一次测量值中减去，从而求得被修正后的直接测量结果的近似真实值。例如，用螺旋测微器来测量长度时，从被测量结果中减去螺旋测微器的零误差。在间接测量中，$\bar{x}$ 即为被测量的计算值。

在测量结果的标准表达式中，给出了一个范围 $\left(\bar{x} - u_{\bar{x}}\right) \sim \left(\bar{x} + u_{\bar{x}}\right)$，它表示待测量的真值在 $\left(\bar{x} - u_{\bar{x}}\right) \sim \left(\bar{x} + u_{\bar{x}}\right)$ 范围之间的概率为 68.3%，不要误认为真值一定就会落在 $\left(\bar{x} - u_{\bar{x}}\right) \sim \left(\bar{x} + u_{\bar{x}}\right)$ 之间。认为误差在 $-u_{\bar{x}} \sim +u_{\bar{x}}$ 之间是错误的。

在上述的标准式中，近似真实值、合成不确定度、单位三个要素缺一不可，否则就不能全面表达测量结果。同时，近似真实值 $\bar{x}$ 的末尾数应该与不确定度的所在位数对齐，近似真实值 $\bar{x}$ 与不确定度 $u_{\bar{x}}$ 的数量级、单位要相同。在开始实验中，测量结果的正确表示是一个难点，要引起重视，从开始就注意纠正，培养良好的实验习惯，才能逐步克服难点，正确书写测量结果的标准形式。

在不确定度的合成问题中，主要是从系统误差和随机误差等方面进行综合考虑的，提出了统计不确定度和非统计不确定度的概念。合成不确定度 $u_{\bar{x}}$ 是由不确定度的两类分量(A 类和 B 类)求“方和根”计算而得。为使问题简化，本书只讨论简单情况下(即 A 类、B 类分量保持各自独立变化，互不相关)的合成不确定度。

A 类不确定度(统计不确定度)用 $(u_{\mathrm{A}})_{\bar{x}}$ 表示，B 类不确定度(非统计不确定度)用 $(u_{\mathrm{B}})_{\bar{x}}$ 表示，合成不确定度为：

$$u_{\bar{x}} = \sqrt{(u_{\mathrm{A}})_{\bar{x}}^2 + (u_{\mathrm{B}})_{\bar{x}}^2}$$

三、合成不确定度的两类分量

物理实验中的不确定度，一般主要来源于测量方法、测量人员、环境波动、测量对象变化等等。计算不确定度是将可修正的系统误差修正后，将各种来源的误差按计算方法分为两类，即用统计方法计算的不确定度(A 类)和非统计方法计算的不确定度(B 类)。

A 类　统计不确定度，是指可以采用统计方法(即具有随机误差性质)计算的不确定度，如测量读数具有分散性，测量时温度波动影响等等。这类统计不确定度通常认为它是服从正态分布规律，因此可以像计算标准偏差那样，用“贝塞尔公式”计算被测量的 A 类不确定度。A 类不确定度 $(u_{\mathrm{A}})_{\bar{x}}$ 为：

$$(u_A)_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{（n-1）n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}{(n-1)n}}$$

式中 i=1，2，3，…，n，表示测量次数。

在计算 A 类不确定度时，也可以用最大偏差法、极差法、最小二乘法等，本书只采用“贝塞尔公式法”，并且着重讨论读数分散对应的不确定度。用“贝塞尔公式”计算 A 类不确定度，可以用函数计算器直接读取，十分方便。

B 类　非统计不确定度，是指用非统计方法求出或评定的不确定度，如实验室中的测量仪器不准确，量具磨损老化等等。评定 B 类不确定度常用估计方法，要估计适当，需要确定分布规律，同时要参照标准，更需要估计者的实践经验、学识水平等。因此，往往是意见纷纭，争论颇多。本书对 B 类不确定度的估计同样只作简化处理。仪器不准确的程度主要用仪器误差来表示，所以因仪器不准确对应的 B 类不确定度为

$$(u_B)_{\bar{x}} = \frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}$$

$\Delta_{仪}$为仪器误差或仪器的基本误差，或允许误差，或显示数值误差。一般的仪器说明书中都会注明仪器误差，是制造厂或计量检定部门给定的。物理实验教学中，由实验仪器决定。对于单次测量的不确定度一般是以最大误差进行估计，以下分两种情况处理。

已知仪器准确度时，这时以其准确度作为误差大小。如一个量程 150mA，准确度 0.2 级的电流表，测一次电流，读数为 131.2mA。为估计其误差，则按准确度 0.2 级可算出最大绝对误差为 0.3mA，因而该次测量的结果可写成 I=(131.2±0.3)mA。又如用物理天平称量某个物体的质量，当天平平衡时砝码为 P=145.02 克，让游码在天平横梁上偏离平衡位置一个刻度(相当于 0.05 克)，天平指针偏过 1.8 分度，则该天平这时的灵敏度为(1.8÷0.05)分度/克，其感量为 0.03 克/分度，就是该天平测量物体质量时的准确度，测量结果可写成 P=(145.02±0.03)克。

未知仪器准确度时，这时单次测量误差的估计，应根据所用仪器的精密度、仪器灵敏度、测试者感觉器官的分辨能力以及观测时的环境条件等因素具体考虑，以使估计误差的大小尽可能符合实际情况。一般说，最大读数误差对连续读数的仪器可取仪器最小刻度值的一半，而无法进行估计的非连续读数的仪器，如数字式仪表，则取其最末位数的一个最小单位。

四、直接测量的不确定度

在对直接测量的不确定度的合成问题中，对 A 类不确定度主要讨论在多次等精度测量条件下，读数分散对应的不确定度，并且用“贝塞尔公式”计算 A 类不确定度。对 B 类不确定度，主要讨论仪器不准确对应的不确定度，将测量结果写成标准形式。因此，实验结果的获得，应包括待测量近似真实值，A、B 两类不确定度以及合成不确定度的计算。增加重复测量次数对于减小平均值的标准误差，提高测量的精密度有利。但是应注意到当次数增大时，平均值的标准误差减小渐为缓慢，当次数大于 10 时平均值的减小

便不明显了。通常取测量次数为 5～10 为宜。下面通过两个例子加以说明。

[例 1] 采用感量为 0.1g 的物理天平称量某物体的质量，其读数值为 35.41g，求物体质量的测量结果。

解：采用物理天平称物体的质量，重复测量读数值往往相同，故一般只须进行单次测量即可。单次测量的读数即为近似真实值，m=35.41g。

物理天平的“示值误差”通常取感量的一半，并且作为仪器误差，即

$$(u_{\mathrm{B}})_{\bar{m}} = \Delta_{仪} = 0.05(\mathrm{g})$$

测量结果为

$$m=35.41\pm0.05(\mathrm{g})$$

在例 1 中，因为是单次测量(n=1)，合成不确定度：

$$u_{\bar{m}} = \sqrt{(u_{\mathrm{A}})_{\bar{m}}^{\ 2} + (u_{\mathrm{B}})_{\bar{m}}^{\ 2}} = \sqrt{S_{\bar{m}}^{\ 2} + (u_{\mathrm{B}})_{\bar{m}}^{\ 2}}$$

式中的 $S_{\bar{m}} = 0$，所以单次测量的合成不确定度等于非统计不确定度。但是这个结论并不表明单次测量的 A 类不确定度就小，因为 n =1 时，S_x 发散，其随机分布特征是客观存在的，测量次数 n 越大，置信概率就越高，因而测量的平均值就越接近真值。

[例 2] 用螺旋测微器测量小钢球的直径，五次的测量值分别为

$$d(\mathrm{mm})=11.922,11.923,11.922,11.922,11.922$$

螺旋测微器的最小分度数值为 0.01mm，试写出测量结果的标准式。

解：(1)求直径 d 的算术平均值

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{5} d_i = \frac{1}{5}\left(11.922 + 11.923 + 11.922 + 11.922 + 11.922\right) = 11.922$$

(2) 计算 B 类不确定度

螺旋测微器的仪器误差为 $\Delta_{仪}$=0.005(mm)

$$(u_{\mathrm{B}})_{\bar{d}} = \Delta_{仪} = 0.005\mathrm{mm}$$

(3) 计算 A 类不确定度

$$(u_A)_{\bar{d}} = S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{5}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{(n-1)n}} = \sqrt{\frac{\left(11.922-11.922\right)^2 + \left(11.923-11.922\right)^2 + \cdots}{(5-1)\times 5}} = 0.00025$$

(4) 合成不确定度

$$u_{\bar{d}} = \sqrt{(u_{\mathrm{A}})_{\bar{d}}^{\ 2} + (u_{\mathrm{B}})_{\bar{d}}^{\ 2}} = \sqrt{0.00025^2 + 0.005^2}$$

式中，由于 0.0005＜1/3×0.005，故可略去 $(u_{\mathrm{A}})_{\bar{d}}$，于是：

$$u_{\bar{d}} = 0.005(\mathrm{mm})$$

(5) 测量结果为

$$d = \bar{d} \pm u_{\bar{d}} = 11.922 \pm 0.005\left(\mathrm{mm}\right)$$

从上例中可以看出，当有些不确定度分量的数值很小时，相对而言可以略去不计。在计算合成不确定度中求“方和根”时，若某一平方值小于另一平方值的 1/9，则这一项就可以略去不计。这一结论叫做微小误差准则。在进行数据处理时，利用微小误差准则可减少不必要的计算。不确定度的计算结果，一般应保留一位有效数字，多余的位数按有效数字的修约原则进行取舍。评价测量结果，有时候需要引入相对不确定度的概念。相对不确定度定义为：

$$E=\frac{u_{\overline{x}}}{\overline{x}}\times 100\%$$

E 的结果一般应取 2 位有效数字。此外，有时候还需要将测量结果的近似真实值 $\overline{x}$ 与公认值 $x_{公}$ 进行比较，得到测量结果的百分偏差 B。百分偏差定义为：

$$B=\frac{\left|\overline{x}-x_{公}\right|}{x_{公}}\times 100\%$$

百分偏差其结果一般应取 2 位有效数字。

测量不确定度表达涉及深广的知识领域和误差理论问题，大大超出了本课程的教学范围。同时，有关它的概念、理论和应用规范还在不断地发展和完善。因此，我们在教学中也在进行摸索，以期在保证科学性的前提下，尽量把方法简化，为初学者易于接受。教学重点放在建立必要的概念，有一个初步的基础。以后在工作需要时，可以参考有关文献继续深入学习。

五、间接测量结果的合成不确定度

间接测量的近似真实值和合成不确定度是由直接测量结果通过函数式计算出来的，既然直接测量有误差，那么间接测量也必有误差，这就是误差的传递。由直接测量值及其误差来计算间接测量值的误差之间的关系式称为误差的传递公式。设间接测量的函数式为

$$N=F(x，y，z，\cdots)$$

N 为间接测量的量，它有 K 个直接测量的物理量 $x, y, z, \cdots$，各直接观测量的测量结果分别为

$$x=\overline{x}\pm u_x$$

$$y=\overline{y}\pm u_y$$

$$z=\overline{z}\pm u_z$$

……

(1) 若将各个直接测量的近似真实值 $\overline{x}$ 代入函数表达式中，即可得到间接测量的近似真实值

$$\overline{N}=F\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\cdots\right)$$

(2) 求间接测量的合成不确定度，由于不确定度均为微小量，相似于数学中的微小增量，对函数式 $N=F(x, y, z, \cdots)$求全微分，即得

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots$$

式中，$\mathrm{d}N$，$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，$\cdots$ 均为微小量，代表各变量的微小变化，$\mathrm{d}N$ 的变化由各自变量的变化决定，$\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z},\cdots$ 为函数对自变量的偏导数，记为 $\frac{\partial F}{\partial A_K}$。将上面全微分式中的微分符号 d 改写为不确定度符号 u，并将微分式中的各项求“方和根”，即为间接测量的合成不确定度

$$u_N=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}u_x\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}u_y\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}u_z\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial A_K}u_{AK}\right)^2} \tag{4}$$

式中，K 为直接测量量的个数，A 代表 x，y，z，$\cdots$ 各个自变量(直接观测量)。

上式表明，间接测量的函数式确定后，测出它所包含的直接观测量的结果，将各个直接观测量的不确定度 u_{AK} 乘函数对各变量(直测量)的偏导数 $\left(\frac{\partial F}{\partial A_K}u_{AK}\right)$，求“方和根”，即 $\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial A_K}u_{AK}\right)^2}$ 就是间接测量结果的不确定度。

间接测量的函数表达式为积和商(或含和差的积商形式)的形式时，为了使运算简便起见，可以先将函数式两边同时取自然对数，然后再求全微分。即

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\frac{\partial \ln F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \ln F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial \ln F}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots$$

同样改写微分符号为不确定度符号，再求其“方和根”，即为间接测量的相对不确定度 E_N，即

$$E_N=\frac{u_N}{\overline{N}}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln F}{\partial x}u_x\right)^2+\left(\frac{\partial \ln F}{\partial y}u_y\right)^2+\left(\frac{\partial \ln F}{\partial z}u_z\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial \ln F}{\partial A_K}u_{AK}\right)^2} \tag{5}$$

已知 E_N、$\overline{N}$，由(5)式可以求出合成不确定度

$$u_N=\overline{N}\cdot E_N \tag{6}$$

常用函数不确定度传递和合成公式如表 1-4。

这样计算间接测量的统计不确定度时，特别对函数表达式很复杂的情况，尤其显示出它的优越性。今后在计算间接测量的不确定度时，对函数表达式仅为“和差”形式，可以直接利用(4)式，求出间接测量的合成不确定度 u_N，若函数表达式为积和商(或积商和差混合)等较为复杂的形式，可直接采用(5)式，先求出相对不确定度，再求出合成不确定度 u_N。应注意的是所有直接测量所用置信概率必须相同，置信概率为 68%，传递后的置信概率不变，用高置信概率也相同。

表 1-4　常用函数不确定度传递和合成公式

函数表达式	不确定度传递公式
$\omega = x \pm y$	$u_{\bar{\omega}} = \sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2}$
$\omega = xy$	$\dfrac{u_{\bar{\omega}}}{\omega} = \sqrt{\left(\dfrac{u_x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{u_y}{y}\right)^2}$
$\omega = \dfrac{x}{y}$	$\dfrac{u_{\bar{\omega}}}{\omega} = \sqrt{\left(\dfrac{u_x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{u_y}{y}\right)^2}$
$\omega = \dfrac{x^k y^m}{z^n}$	$\dfrac{u_{\bar{\omega}}}{\omega} = \sqrt{k^2\left(\dfrac{u_x}{x}\right)^2 + m^2\left(\dfrac{u_y}{y}\right)^2 + n^2\left(\dfrac{u_z}{z}\right)^2}$
$\omega = kx$	$u_{\bar{\omega}} = ku_x; \dfrac{u_{\bar{\omega}}}{\omega} = \dfrac{u_x}{x}$
$\omega = \sqrt[k]{x}$	$\dfrac{u_{\bar{\omega}}}{\omega} = \dfrac{u_x}{kx}$
$\omega = \sin x$	$u_{\bar{\omega}} = u_x \cos x$
$\omega = \ln x$	$u_{\bar{\omega}} = \dfrac{u_x}{x}$

[例 3] 已知电阻 R_1=50.2±0.5(Ω)， R_2=149.8±0.5(Ω)，求它们串联的电阻 R 和合成不确定度 u_R 。

解：串联电阻的阻值为

$$R = R_1 + R_2 = 50.2+149.8=200.0(\Omega)$$

合成不确定度

$$u_R = \sqrt{\sum_1^2\left(\frac{\partial R}{\partial R_i}u_{R_i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_1}u_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}u_2\right)^2}$$
$$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = 0.7(\Omega)$$

相对不确定度

$$E_R = \frac{u_R}{R} = \frac{0.7}{200.0} \times 100\% = 0.35\%$$

测量结果为

$$R=200.0 \pm 0.7(\Omega)$$

在例 3 中，由于 $\dfrac{\partial R}{\partial R_1} = 1$，$\dfrac{\partial R}{\partial R_2} = 1$，$R$ 的总合成不确定度为各个直接观测量的不确定度平方求和后再开方。

间接测量的不确定度计算结果一般应保留一位有效数字，相对不确定度一般应保留 2 位有效数字。

[例 4] 测量金属环的内径 D_1=2.880±0.004(cm)，外径 D_2=3.600±0.004(cm)，厚度

h=2.575±0.004(cm)。试求环的体积 V 和测量结果。

解：环体积公式为

$$V=\frac{\pi}{4}h(D_2^2-D_1^2)$$

(1) 环体积的近似真实值为

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{4}h(D_2^2-D_1^2)\\&=\frac{3.1416}{4}\times 2.575\times(3.600^2-2.880^2)=9.436(\text{cm}^3)\end{aligned}$$

(2) 首先将环体积公式两边同时取自然对数后，再求全微分

$$\ln V=\ln\left(\frac{\pi}{4}\right)+\ln h+\ln(D_2^2-D_1^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=0+\frac{\mathrm{d}h}{h}+\frac{2D_2\mathrm{d}D_2-2D_1\mathrm{d}D_1}{D_2^2-D_1^2}$$

则相对不确定度为

$$\begin{aligned}E_V&=\frac{u_V}{V}=\sqrt{\left(\frac{u_h}{h}\right)^2+\left(\frac{2D_2u_{D_2}}{D_2^2-D_1^2}\right)^2+\left(\frac{-2D_1u_{D_1}}{D_2^2-D_1^2}\right)^2}\\&=\left[\left(\frac{0.004}{2.575}\right)^2+\left(\frac{2\times 3.600\times 0.004}{3.600^2-2.880^2}\right)^2+\left(\frac{-2\times 2.880\times 0.004}{3.600^2-2.880^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&=0.0081=0.81\%\end{aligned}$$

(3) 总合成不确定度为

$$u_V=V\cdot E_V=9.436\times 0.0081=0.08(\text{cm}^3)$$

(4) 环体积的测量结果为

$$V=9.44\pm 0.08\,(\text{cm}^3)$$

V 的标准式中，$V=9.436(\text{cm}^3)$ 应与不确定度的位数取齐，因此将小数点后的第三位数 6，按照数字修约原则进到百分位，故为 $9.44\,(\text{cm}^3)$ 。

间接测量结果的误差，常用两种方法来估计：算术合成(最大误差法)和几何合成(标准误差法)。误差的算术合成将各误差取绝对值相加，是从最不利的情况考虑，误差合成的结果是间接测量的最大误差，因此是比较粗略的，但计算较为简单，它常用于误差分析、实验设计或粗略的误差计算中；上面例子采用几何合成的方法，计算较麻烦，但误差的几何合成较为合理。

第三节　有效数字及其运算法则

物理实验中经常要记录很多测量数据，这些数据应当是能反映出被测量实际大小的全部数字，即有效数字。但是在实验观测、读数、运算与最后得出的结果中，哪些是能

反映被测量实际大小的数字应予以保留，哪些不应当保留，这就与有效数字及其运算法则有关。前面已经指出，测量不可能得到被测量的真实值，只能是近似值。实验数据的记录反映了近似值的大小，并且在某种程度上表明了误差。因此，有效数字是对测量结果的一种准确表示，它应当是有意义的数字，而不允许无意义的数字存在。如果把测量结果写成 54.2817±0.05(cm)是错误的，由不确定度 0.05(cm)可以得知，数据的第二位小数 0.08 已不可靠，把它后面的数字也写出来没有多大意义，正确的写法应当是：54.28±0.05(cm)。测量结果的正确表示，对初学者来说是一个难点，必须加以重视，多次强调，才能逐步形成正确表示测量结果的良好习惯。

一、有效数字的概念

任何一个物理量，其测量的结果既然都或多或少的有误差，那么一个物理量的数值就不应当无止境地写下去，写多了没有实际意义，写少了又不能比较真实的表达物理量。因此，一个物理量的数值和数学上的某一个数就有着不同的意义，这就引入了一个有效数字的概念。若用最小分度值为 1mm 的米尺测量物体的长度，读数值为 5.63cm。其中 5 和 6 这两个数字是从米尺的刻度上准确读出的，可以认为是准确的，叫做可靠数字。末位数字 3 是在米尺最小分度值的下一位上估计出来的，是不准确的，叫做欠准数。虽然是欠准可疑，但不是无中生有，而是有根有据有意义的，显然有一位欠准数字，就使测量值更接近真实值，更能反映客观实际。因此，测量值应当保留到这一位是合理的，即使估计数是 0，也不能舍去。测量结果应当而且也只能保留一位欠准数字，故测量数据的有效数字定义为几位可靠数字加上一位欠准数字，有效数字的个数叫做有效数字的位数，如上述的 5.63cm 称为三位有效数字。

有效数字的位数与十进制单位的变换无关，即与小数点的位置无关。因此，用以表示小数点位置的 0 不是有效数字。当 0 不是用作表示小数点位置时，0 和其他数字具有同等地位，都是有效数字。显然，在有效数字的位数确定时，第一个不为零的数字左面的零不能算有效数字的位数，而第一个不为零的数字右面的零一定要算做有效数字的位数。如 0.0135m 是三位有效数字，0.0135m 和 1.35cm 及 13.5mm 三者是等效的，只不过是分别采用了米、厘米和毫米作为长度的表示单位；1.030m 是四位有效数字。从有效数字的另一面也可以看出测量用具的最小刻度值，如 0.0135m 是用最小刻度为毫米的尺子测量的，而 1.030m 是用最小刻度为厘米的尺子测量的。因此，正确掌握有效数字的概念对物理实验来说是十分必要的。

二、直接测量的有效数字记录

物理实验中通常仪器上显示的数字均为有效数字(包括最后一位估计读数)都应读出，并记录下来。仪器上显示的最后一位数字是 0 时，此 0 也要读出并记录。对于有分度式的仪表，读数要根据人眼的分辨能力读到最小分度的十分之几。在记录直接测量的有效数字时，常用一种称为标准式的写法，就是任何数值都只写出有效数字，而数量级则用 10 的 n 次幂的形式去表示。

1. 根据有效数字的规定，测量值的最末一位一定是欠准确数字，这一位应与仪器误

差的位数对齐，仪器误差在哪一位发生，测量数据的欠准位就记录到哪一位，不能多记，也不能少记，即使估计数字是 0，也必须写上，否则与有效数字的规定不相符。例如，用米尺测量物体长为 52.4 mm 与 52.40 mm 是不同的两个测量值，也是属于不同仪器测量的两个值，误差也不相同，不能将它们等同看待，从这两个值可以看出测量前者的仪器精密度低，测量后者的仪器精密度高出一个数量级。

2. 根据有效数字的规定，凡是仪器上读出的数值，有效数字中间与末尾的 0，均应算作有效位数。例如，6.003 cm，4.100 cm 均是四位有效数字；在记录数据中，有时因定位需要，而在小数点后添加 0，这不应算作有效位数，如 0.0486 m 是三位有效数字而不是四位有效数字，有效数字中的 0 有时算做有效数字，有时不能算做有效数字，这对初学者也是一个难点。

3. 根据有效数字的规定，在十进制单位换算中，其测量数据的有效位数不变，如 4.51cm 若以米或毫米为单位，可以表示成 0.0451m 或 45.1mm，这两个数仍然是三位有效数字。为了避免单位换算中位数很多时写一长串，或计数时出现错位，常采用科学表达式，通常是在小数点前保留一位整数，用 10^n 表示，如 4.51×10^2m，4.51×10^4cm 等，这样既简单明了，又便于计算和确定有效数字的位数。

4. 根据有效数字的规定对有效数字进行记录时，直接测量结果的有效位数的多少，取决于被测物本身的大小和所使用的仪器精度，对同一个被测物，高精度的仪器，测量的有效位数多，低精度的仪器，测量的有效位数少。例如，长度约为 3.7cm 的物体，若用最小分度值为 1mm 的米尺测量，其数据为 3.70cm，若用螺旋测微器测量(最小分度值为 0.01mm)，其测量值为 3.7000cm，显然螺旋测微器的精度较米尺高很多，所以测量结果的位数也多；被测物是较小的物体，测量结果的有效位数也少。对一个实际测量值，正确应用有效数字的规定进行记录，就可以从测量值的有效数字记录中看出测量仪器的精度。因此，有效数字的记录位数和测量仪器有关。

三、有效数字的运算法则

在进行有效数字计算时，参加运算的分量可能很多。各分量数值的大小及有效数字的位数也不相同，而且在运算过程中，有效数字的位数会越乘越多，除不尽时有效数字的位数也无止境。即便是使用计算器，也会遇到中间数的取位问题以及如何更简捷的问题。测量结果的有效数字，只能允许保留一位欠准确数字，直接测量是如此，间接测量的计算结果也是如此。根据这一原则，为了达到：①不因计算而引进误差，影响结果；②尽量简捷，不作徒劳的运算。简化有效数字的运算，约定下列规则：

1. 加法或减法运算。

$$478.\underline{2}+3.46\underline{2}=481.\underline{662}=481.\underline{7}$$

$$49.2\underline{7}-3.\underline{4}=45.\underline{87}=45.\underline{9}$$

大量计算表明，若干个数进行加法或减法运算，其和或者差的结果的欠准确数字的位置与参与运算各个量中的欠准确数字的位置最高者相同。由此得出结论，几个数进行加法或减法运算时，可先将多余数修约，将应保留的欠准确数字的位数多保留一位进行

运算，最后结果按保留一位欠准确数字进行取舍。这样可以减少繁杂的数字计算。

推论(1)　若干个直接测量值进行加法或减法计算时，选用精度相同的仪器最为合理。

2. 乘法和除法运算。

$$834.\underline{5}\times 23.\underline{9}=199\underline{44}.\underline{55}=1.9\underline{9}\times 10^{4}$$

$$2569.\underline{4}\div 19.\underline{5}=13\underline{1}.\underline{7641}\cdots=13\underline{2}$$

由此得出结论：用有效数字进行乘法或除法运算时，乘积或商的结果的有效数字的位数与参与运算的各个量中有效数字的位数最少者相同。

推论(2)　测量的若干个量，若是进行乘法除法运算，应按照有效位数相同的原则来选择不同精度的仪器。

3. 乘方和开方运算。

$$(7.32\underline{5})^2=53.6\underline{6}$$

$$\sqrt{32.\underline{8}}=5.7\underline{3}$$

由此可见，乘方和开方运算的有效数字的位数与其底数的有效数字的位数相同。

4. 自然数 1，2，3，4，…不是测量而得，不存在欠准确数字。因此，可以视为无穷多位有效数字的位数，书写也不必写出后面的 0，如 D=2R，D 的位数仅由直测量 R 的位数决定。

5. 无理常数π，$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, …的位数也可以看成很多位有效数字。例如 L=2πR，若测量值 $R=2.35\times10^{-1}$(m) 时，π应取为 3.142。则

$$L=2\times3.142\times2.35\times10^{-2}=1.48\times10^{-1}(\text{m})$$

6. 有效数字的修约。根据有效数字的运算规则，为使计算简化，在不影响最后结果应保留有效数字的位数(或欠准确数字的位置)的前提下，可以在运算前、后对数据进行修约，其修约原则是“四舍六入五看右左”，五看右左即为五时则看五后面若为非零的数则入、若为零则往左看拟留数的末位数为奇数则入为偶数则舍，这一说法可以简述为五看右左。中间运算过程较结果要多保留一位有效数字。

第四节　数 据 处 理

物理实验中测量得到的许多数据需要处理后才能表示测量的最终结果。用简明而严格的方法把实验数据所代表的事物内在规律性提炼出来就是数据处理。数据处理是指从获得数据起到得出结果为止的加工过程。数据处理包括记录、整理、计算、分析、拟合等多种处理方法，本节主要介绍列表法、作图法、图解法、逐差法、最小二乘法和微机法。

一、列表法

列表法是记录数据的基本方法。欲使实验结果一目了然，避免混乱和丢失数据，便

于查对，列表法是记录的最好方法。将数据中的自变量、因变量的各个数值一一对应排列出来，简单明了地表示出有关物理量之间的关系；检查测量结果是否合理，及时发现问题；有助于找出有关量之间的联系和建立经验公式，这就是列表法的优点。设计记录表格要求：

1. 列表简要明了，利于记录、运算处理数据和检查处理结果，便于一目了然地看出有关量之间的关系。

2. 列表要标明符号所代表的物理量的意义。表中各栏中的物理量都要用符号标明，并写出数据所代表物理量的单位及量值的数量级要交代清楚。单位写在符号标题栏，不要重复记在各个数值上。

3. 列表的形式不限，根据具体情况，决定列出哪些项目。有些个别与其他项目联系不大的数可以不列入表内。列入表中的除原始数据外，计算过程中的一些中间结果和最后结果也可以列入表中。

4. 表格记录的测量值和测量偏差，应正确反映所用仪器的精度，即正确反映测量结果的有效数字。一般记录表格还有序号和名称。

例如：要求测量圆柱体的体积，圆柱体高 H 和直径 D 的记录如下表 1-5。

表 1-5　测量圆柱体的体积数据记录表

测量次数i	H_i(mm)	ΔH_i(mm)	D_i(mm)	ΔD_i(mm)
1	35.32	−0.006	8.135	0.0003
2	35.30	−0.026	8.137	0.0023
3	35.32	−0.006	8.136	0.0013
4	35.34	0.014	8.133	−0.0017
5	35.30	−0.026	8.132	−0.0027
6	35.34	0.014	8.135	0.0003
7	35.38	0.054	8.134	−0.0007
8	35.30	−0.026	8.136	0.0013
9	35.34	0.014	8.135	0.0003
10	35.32	−0.006	8.134	−0.0007
平　均	35.326		8.1347	

说明：ΔH_i 是测量值 H_i 的偏差，ΔD_i 是测量值 D_i 的偏差；测 H_i 是用精度为 0.02mm 的游标卡尺，仪器误差为 $\Delta_{仪}$=0.02mm ；测 D_i 是用精度为 0.01mm 的螺旋测微器，其仪器误差 $\Delta_{仪}$=0.005mm。

由表中所列数据，可计算出高、直径和圆柱体体积测量结果(近真值和合成不确定度)：

$$H=35.33\pm0.02(\text{mm})$$

$$D=8.135\pm0.005(\text{mm})$$

$$V=(1.836\pm0.003)\times10^3(\text{mm}^3)$$

二、作图法

用作图法处理实验数据是数据处理的常用方法之一，它能直观地显示物理量之间的对应关系，揭示物理量之间的联系。作图法是在现有的坐标纸上用图形描述各物理量之间的关系，将实验数据用几何图形表示出来，这就叫做作图法。作图法的优点是直观、形象，便于比较研究实验结果，求出某些物理量，建立关系式等。为了能够清楚地反映出物理现象的变化规律，并能比较准确地确定有关物理量的量值或求出有关常数，在作图时要注意以下几点：

1. 作图一定要用坐标纸。当决定了作图的参量以后，根据函数关系选用直角坐标纸、单对数坐标纸、双对数坐标纸、极坐标纸等，本书主要采用直角坐标纸。

2. 坐标纸的大小及坐标轴的比例。应当根据所测得的有效数字和结果的需要来确定，原则上数据中的可靠数字在图中应当标出。数据中的欠准数在图中应当是估计的，要适当选择 X 轴和 Y 轴的比例和坐标比例，使所绘制的图形充分占用图纸空间，不要缩在一边或一角；坐标轴比例的选取一般间隔 1，2，5，10 等。这便于读数或计算，除特殊需要外，数值的起点一般不必从零开始，X 轴和 Y 轴的比例可以采用不同的比例，使作出的图形大体上能充满整个坐标纸，图形布局美观、合理。

3. 标明坐标轴。对直角坐标系，一般是自变量为横轴，因变量为纵轴，采用粗实线描出坐标轴，并用箭头表示出方向，注明所示物理量的名称、单位。坐标轴上表明所用测量仪器的最小分度值，并要注意有效位数。

4. 描点。根据测量数据，用直尺和笔尖使其函数对应的实验点准确地落在相应的位置，一张图纸上画上几条实验曲线时，每条图线应用不同的标记如“×”“o”“△”等符号标出，以免混淆。

5. 连线。根据不同函数关系对应的实验数据点分布，把点连成直线或光滑的曲线或折线，连线必须用直尺或曲线板，如校准曲线中的数据点必须连成折线。由于每个实验数据都有一定的误差，所以将实验数据点连成直线或光滑曲线时，绘制的图线不一定通过所有的点，而是使数据点均匀分布在图线的两侧，尽可能使直线两侧所有点到直线的距离之和最小并且接近相等，有个别偏离很大的点应当应用“异常数据的剔除”中介绍的方法进行分析后决定是否舍去，原始数据点应保留在图中。在确信两物理量之间的关系是线性的，或所绘的实验点都在某一直线附近时，将实验点连成一直线。

6. 写图名。作完图后，在图纸下方或空白的明显位置处，写上图的名称、作者和作图日期，有时还要附上简单的说明，如实验条件等，使读者一目了然。作图时，一般将纵轴代表的物理量写在前面，横轴代表的物理量写在后面，中间用“—”联接。

7. 最后将图纸贴在实验报告的适当位置，便于教师批阅实验报告。

三、图解法

在物理实验中，实验图线作出以后，可以由图线求出经验公式。图解法就是根据实验数据作好的图线，用解析法找出相应的函数形式。实验中经常遇到的图线是直线、抛物线、双曲线、指数曲线、对数曲线。特别是当图线是直线时，采用此方法更为方便。

1. 由实验图线建立经验公式的一般步骤

(1) 根据解析几何知识判断图线的类型；
(2) 由图线的类型判断公式的可能特点；
(3) 利用半对数、对数或倒数坐标纸，把原曲线改为直线；
(4) 确定常数，建立起经验公式的形式，并用实验数据来检验所得公式的准确程度。

2. 用直线图解法求直线的方程

如果作出的实验图线是一条直线，则经验公式应为直线方程

$$y=kx+b$$

要建立此方程，必须由实验数据直接求出 k 和 b，一般有两种方法。

(1) 斜率截距法

在图线上选取两点 $P_1(x_1,y_1)$和 $P_2(x_2,y_2)$，其坐标值最好是整数值。用特定的符号表示所取的点，与实验点相区别。一般不要取原实验点。所取的两点在实验范围内应尽量彼此分开一些，以减小误差。由解析几何知识，在上述直线方程中， k 为直线的斜率，b 为直线的截距。k 可以根据两点的坐标求出：

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

其截距 b 为 x=0 时 y 的值；若原实验中所绘制的图形并未给出 x=0 段直线，可将直线用虚线延长交 y 轴，量出截距。如果起点不为零，也可以由式：

$$b=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$$

求出截距，求出斜率和截距的数值代入方程中就可以得到经验公式。

(2) 端值求解法

在实验图线的直线两端取两点(但不能取原始数据点)，分别得出它的坐标为(x_1,y_1)和(x_2,y_2)，将坐标数值代入可得

$$\begin{cases} y_1=kx_1+b \\ y_2=kx_2+b \end{cases}$$

联立两个方程求解得 k 和 b。

经验公式得出之后还要进行校验，校验的方法是：对于一个测量值 x_i，由经验公式可写出一个 y_i 值，由实验测出一个 y'_i 值，其偏差 $\delta=y'_i-y_i$，若各个偏差之和$\sum(y'_i-y_i)$趋于零，则经验公式就是正确的。

在实验问题中，有的实验并不需要建立经验公式，而仅需要求出 k 和 b 即可。

[例 1] 金属导体的电阻随着温度变化的测量值为表 1-6 所示，试求经验公式 $R=f(T)$和电阻温度系数。

表 1-6　金属电阻温度系数测量数据记录表

T(℃)	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
R(μΩ)	76.30	77.80	79.75	80.80	82.35	83.90	85.10

根据所测数据绘出 R—T 图，如图 1-1 所示。

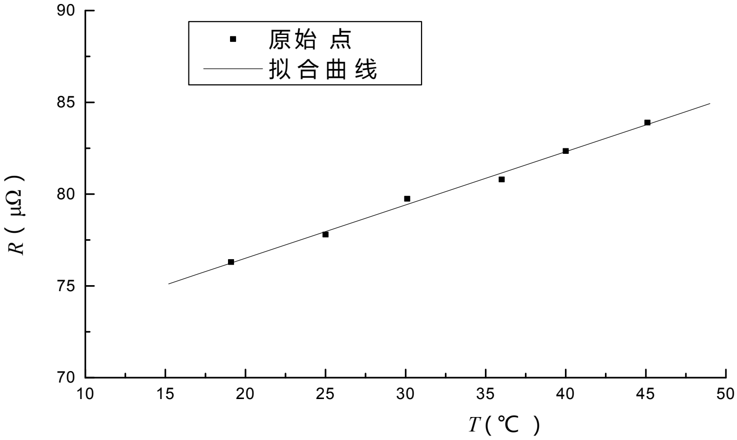

图 1-1　某金属丝电阻—温度曲线

拟合直线的斜率和截距：

$$k = 0.296 \quad (\mu\Omega/℃)$$

$$b=70.69(\mu\Omega)$$

于是得经验公式：

$$R=70.69+0.296T$$

3. 曲线改直，曲线方程的建立

在实验工作中，许多物理量之间的关系并不都是线性的，由曲线图直接建立经验公式一般是比较困难的，但仍可通过适当的变换而成为线性关系，即把曲线变换成直线，再利用建立直线方程的办法来解决问题。这种方法叫做曲线改直。作这样的变换不仅是由于直线容易描绘，更重要的是直线的斜率和截距所包含的物理内涵是我们所需要的。例如：

(1) $y=ax^b$，式中 a，b 为常量，可变换成 $\lg y=b\lg x+\lg a$，$\lg y$ 为 $\lg x$ 的线性函数，斜率为 b，截距为 $\lg a$。

(2) $y=ab^x$，式中 a，b 中为常量，可变换成 $\lg y=(\lg b)x+\lg a$，$\lg y$ 为 x 的线性函数，斜率为 $\lg b$，截距为 $\lg a$。

(3) $PV=$C，式中 C 为常量，要变换成 $P=$C$(1/V)$，P 是 $1/V$ 的线性函数，斜率为 C。

(4) $y^2=2px$，式中 p 为常量，$y=\pm\sqrt{2p}\,x^{1/2}$，y 是 $x^{1/2}$ 的线性函数，斜率为$\pm\sqrt{2p}$。

(5) $y=x/(a+bx)$，式中 a、b 为常量，可变换成 $1/y=a(1/x)+b$，$1/y$ 为 $1/x$ 的线性函数，斜率为 a，截距为 b。

(6) $s=v_0t+at^2/2$，式中 v_0，a 为常量，可变换成 $s/t=(a/2)t+v_0$，s/t 为 t 的线性函数，斜率为 $a/2$，截距为 v_0。

[例 2] 单摆的周期 T 随摆长 L 而变，绘出 T—L 实验曲线为抛物线型如图 1-2 所示。若作 T^2—L 图则为一直线型，如图 1-3 所示。

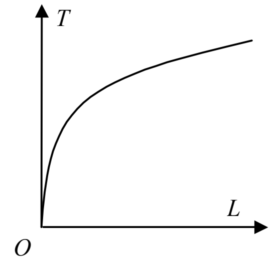

图 1-2　T—L 曲线

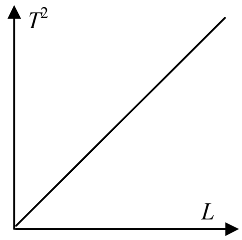

图 1-3　T^2—L 曲线

斜率

$$k=\frac{T^2}{L}=\frac{4\pi^2}{g}$$

由此可写出单摆的周期公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

四、用逐差法处理实验数据

逐差法常用于处理自变量等间距变化的数据组。逐差法计算简便，特别是在检查数据时，可以随测随查，能及时发现数据差错和数据的变化规律。

逐差法是把实验测量的数据列成表格进行逐次相减，或者等间隔相减。为了说明这种方法，我们使用“弹簧伸长与受力关系的实验数据”，说明弹簧伸长与所加砝码重量关系。同时还可以看出 $L_5-L_4=13.0\text{mm}$，较其他相减的结果偏小，这很可能是因为，减砝码读数普遍比增砝码读数偏大，从 L_0 至 L_4 的结果都是增重和减重的平均值，因而抵消了一部分系统误差。而 L_5 是一次测量值，增减砝码之间的差异在这个值上没有被抵消。

表 1-7　弹簧伸长与受力关系实验数据记录及处理表

砝码质量/(mg)	弹簧位置/(mm)	逐次相减/(mm)	等间隔相减/(mm)
0	L_0=59.7	L_1-L_0=14.3	L_3-L_0=42.7
200	L_1=59.7	L_2-L_1=14.3	
400	L_2=59.7	L_3-L_2=14.1	L_4-L_1=42.4
600	L_3=59.7	L_4-L_3=14.0	

续表

砝码质量/(mg)	弹簧位置/(mm)	逐次相减/(mm)	等间隔相减/(mm)
800	L_4=59.7	L_5-L_4=13.0	L_5-L_2=41.1
1000	L_5=59.7		

利用所测数据求弹簧的弹性系数。通常的方法是把实验数据分成两组，一组是 L_0、L_1、L_2，另一组是 L_3、L_4、L_5，然后求其等间隔的差值。对于本例相当于求出三个对应与 600mg 砝码重量的伸长量 $l_1=L_3-L_0$、$l_2=L_4-L_1$、$l_3=L_5-L_2$ 得到三个独立值后取平均值

$$\bar{l}=\frac{l_1+l_2+l_3}{3}=42.1\text{mm}$$

由于用这个平均值求弹性系数，相当于利用数据点连了三条直线，分别求出每条直线的斜率，再取其倒数，即

$$k=\frac{F}{l}=\frac{600\times9.81\times10^{-6}}{42.1\times10^{-3}}=0.140\text{N/m}$$

所得到的弹性系数的不确定度可按以下方法计算：由于力 F 的不确定度可以不考虑，主要考虑弹簧的伸长长度，所以弹性系数的不确定度可以考虑以下两个方面。

1. A 类不确定度

$$(u_{\text{A}})_{\bar{l}}=T_{0.683}\cdot S_{\bar{l}}$$

$$S_{\bar{l}}=\sqrt{\frac{(l_1-\bar{l})^2+(l_2-\bar{l})^2+(l_3-\bar{l})^2}{3(3-1)}}=0.49\text{mm}$$

查表 1-1 可得，3 次测量时，$T_{0.683}$=1.32，于是 $(u_{\text{A}})_{\bar{l}}=1.32\times0.49=0.65\text{mm}$

2. B 类不确定度

根据 0.1mm 的游标卡尺，示值误差极限为 Δ=0.1mm，所以：$(u_{\text{B}})_{\bar{l}}=\dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}=\dfrac{0.1}{\sqrt{3}}\text{mm}$ 总的不确定度为：$u_{\bar{l}}=\sqrt{(u_{\text{A}})_{\bar{l}}^{\ 2}+(u_{\text{B}})_{\bar{l}}^{\ 2}}=0.66\text{mm}$ 根据不确定度传递关系：

$$\frac{u_k}{k}=\frac{u_{\bar{l}}}{\bar{l}}=\frac{0.66}{42.1}=1.6\%$$

$$u_k=k\times1.6\%=0.140\times1.6\%=0.003\text{N/m}$$

$$k=(0.140\pm0.003)\text{N/m}\quad（置信概率P=68.3\%）$$

五、用最小二乘法求经验方程

作图法虽然在数据处理中是一个很便利的方法，但在图线的绘制上往往带有较大的任意性，所得的结果也常常因人而异，而且很难对它作进一步的误差分析。为了克服这些缺点，在数理统计中研究了直线的拟合问题，常用一种以最小二乘法为基础的实验数

据处理方法。由于某些曲线型的函数可以通过适当的数学变换而改写成直线方程，这一方法也适用于某些曲线型的规律。下面就数据处理中的最小二乘法原理作简单介绍。

求经验公式可以从实验的数据求经验方程，这称为方程的回归问题。方程的回归首先要确定函数的形式，一般要根据理论的推断或从实验数据变化的趋势而推测出来，如果推断出物理量 y 和 x 之间的关系是线性关系，则函数的形式可写为 $y=B_0+B_1x$，如果推断出是指数关系，则写为 $y=C_1e^{C_2x}+C_3$

如果不能清楚地判断出函数的形式，则可用多项式来表示：

$$y=B_0+B_1x_1+B_2x_2+\cdots+B_nx_n$$

式中，$B_0, B_1, \cdots, B_n, C_1, C_2, C_3$ 等均为参数。可以认为，方程的回归问题就是用实验的数据来求出方程的待定参数。

用最小二乘法处理实验数据，可以求出上述待定参数。设 y 是变量 x_1，x_2，$\cdots$ 的函数，有 m 个待定参数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$，即

$$y=f(C_1, C_2, \cdots, C_m; x_1, x_2, \cdots)$$

对各个自变量 x_1，x_2，$\cdots$和对应的因变量 y 作 n 次观测得$(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, y_i)(i=1, 2, \cdots, n)$。

于是 y 的观测值 y_i 与由方程所得计算值 y_0 的偏差为$(y_i-y_{0i})(i=1, 2, \cdots n)$。

所谓最小二乘法，就是要求上面的 n 个偏差在平方和最小的意义下，使得函数 $y=f(C_1, C_2, \cdots, C_m; x_1, x_2, \cdots)$与观测值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 最佳拟合，也就是参数应使

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-f(C_1,C_2,\cdots,C_m;x_1,x_2,\cdots)\right]^2=\text{最小值}$$

由微分学的求极值方法可知，C_1，C_2，$\cdots$，C_m 应满足下列方程组

$$\frac{\partial Q}{\partial C_i}=0 \qquad (i=1,2,3\cdots,n)$$

下面从一个最简单的情况来看怎样用最小二乘法确定参数。设已知函数形式是

$$y=a+bx$$

这是个一元线性回归方程，由实验测得自变量 x 与因变量 y 的数据是

$$x=x_1，x_2，\cdots，x_n$$

$$y=y_1，y_2，\cdots，y_n$$

由最小二乘法，a、b 应使

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(a+bx_i)\right]^2=\text{最小值}$$

Q 对 a 和 b 求偏微商应等于零，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial a}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i-(a+bx_i)\right]=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i-(a+bx_i)\right]x_i=0\end{cases}$$

由上式得

$$\overline{y}-a-b\overline{x}=0$$

$$\overline{xy}-a\overline{x}-b\overline{x^2}=0$$

式中，$\overline{x}$ 表示 x 的平均值，即 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ；$\overline{y}$ 表示 y 的平均值，即 $\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ ；$\overline{x^2}$ 表示 x^2 的平均值，即 $\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ ；$\overline{xy}$ 表示 xy 的平均值，即 $\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ 。

解方程得

$$b=\frac{\overline{x}\,\overline{y}-\overline{xy}}{\overline{x}^2-\overline{x^2}}$$

$$a=\overline{y}-b\overline{x}$$

必须指出，实验中只有当 x 和 y 之间存在线性关系时，拟合的直线才有意义。在待定参数确定以后，为了判断所得的结果是否有意义，在数学上引进一个叫相关系数的量。通过计算一下相关系数 r 的大小，才能确定所拟合的直线是否有意义。对于一元线性回归，r 定义为

$$r=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2}-\overline{x}^2)(\overline{y^2}-\overline{y}^2)}}$$

可以证明，$|r|$ 的值是在 0 和 1 之间。$|r|$ 越接近于 1，说明实验数据能密集在求得的直线的近旁，用线性函数进行回归比较合理。相反，如果 $|r|$ 值远小于 1 而接近于零，说明实验数据对求得的直线很分散，即用线性回归不妥当，必须用其他函数重新试探。至于 $|r|$ 的起码值(当 $|r|$ 大于起码值，回归的线性方程才有意义)，与实验观测次数 n 和置信度有关，可查阅有关手册，我们所做的实验应该大于 0.9。

非线性回归是一个很复杂的问题。并无一定的解法。但是通常遇到的非线性问题多数能够化为线性问题。

已知函数形式为

$$y=C_1e^{C_2x}$$

两边取对数得　　　　　$\ln y=\ln C_1+C_2x$

令 $\ln y=z$，$\ln C_1=A$，$C_2=B$，则上式变为

$$z=A+Bx$$

这样就将非线性回归问题转化成为一个一元线性回归问题。

上面介绍了用最小二乘法求经验公式中的常数 k 和 b 的方法，用这种方法计算出来的 k 和 b 是“最佳的”，但并不是没有误差。它们的不确定度估算比较复杂，这里就不作介绍了。

六、用计算机(origin 软件)处理实验数据

若采用可编程序的计算器或者微机来处理就要方便一些，它们不仅可以完成计算工作。而且还可以打印出全部结果，绘制出拟合图线。

现以测量热敏电阻的阻值 R_T 随着温度变化的关系为例，其函数关系为

$$R_T = ae^{\frac{b}{T}}$$

其中 a、b 为待定常数，T 为热力学温度，为了能变换成直线形式，将两边取对数得：

$$\ln R_T=\ln a+b/T$$

并作变换，令 $y=\ln R_T$，$A=\ln a$，$B=b$，$x=1/T$，可以得出直线方程为 $y=A+Bx$ 。实验时测得热敏电阻在不同温度下的阻值，以变量 x，y 分别为横纵坐标作图，若 $y—x$ 图线为直线，就证明 R_T 与 T 的理论关系正确。现将实验测量数据和变量变换数值列于下表 1-8。

表 1-8　热敏电阻的阻值和温度关系

序号	T_c(℃)	T(K)	R_T(Ω)	$x=\frac{1}{T_i}10^{-3}(\mathrm{K}^{-1})$	$y=\ln R_T$
1	27.0	300.0	3427	3.333	8.139
2	29.7	302.7	3127	3.304	8.048
3	32.2	305.2	2824	3.277	7.946
4	36.2	309.2	2498	3.234	7.823
5	38.2	311.2	2261	3.215	7.724
6	42.2	315.2	2000	3.173	7.601
7	44.5	317.5	1826	3.150	7.510
8	48.0	321.0	1634	3.115	7.399
9	53.5	326.5	1353	3.063	7.210
10	57.5	330.5	1193	3.026	7.084

对表中提供的 $1/T_i$ 和 $\ln R_T$ 数据，用最小二乘法拟合处理，按上述袖珍计算器运算步骤操作，可得

直线斜率：$B=3.448\times10^3$(K)；

直线截距：$A=-3.473$(Ω)；

相关系数：$r=0.9996$。

由上面相关系数值可知 $\ln R_T—1/T$ 的关系中直线性很好，这说明热敏电阻阻值 R_T 和 $1/T$ 为严格的指数关系。

在现代实验技术中，随着实验条件的不断改善，微机的应用也越来越多，不仅应用与仪器设备中提高精度、采集数据、模拟实验等，还可以在数据处理中发挥重要作用。应用微机进行数据处理的方法称为微机法。微机法的优点是速度快、精度高，将实验数

据输入装有相应软件的微机中就能显示数据处理的结果，直观性强，减轻人们处理数据的工作量。同时也能提高人们应用微机处理数据的能力。例如在一些平均值、相对误差、绝对误差、标准误差、线性回归、数据统计等方面的数值计算，常用函数计算，定积分计算，拟合曲线，作图等方面都可以考虑使用微机来处理。在具体问题中可以应用现有的软件，也可以结合具体实验练习编写一些简单实用的小程序或开发一些实用性强的小课件来满足实验中数据处理的需要。随着计算机的不断普及，计算在实验教学中的地位不断提高，灵活应用计算机在实验教学中的优点，是今后实验教学中不可忽视的一个问题，应当先从数据处理入手，逐步加强计算机在实验教学中的具体应用，为以后应用计算机进行科学实验奠定一个基础。

练习题

1. 指出下列各量是几位有效数字，测量所选用的仪器与其精度是多少？

(1) 63.74 cm;　(2) 0.302 cm;　(3) 0.0100 cm ;

(4) 1.0000 kg ;　(5) 0.025 cm;　(6) 1.35 ℃ ;

(7) 12.6 s ;　(8)0.2030 s;　(9) 1.530×10^{-3} m。

2.试用有效数字运算法则计算出下列结果。

(1) 107.50−2.5；　(2) 273.5÷0.1；　(3) 1.50÷0.500－2.97；

(4) $\dfrac{8.0421}{6.038-6.034}+30.9$；　(5) $\dfrac{50.0\times(18.30-16.3)}{(103-3.0)\times(1.00+0.001)}$

(6) $V=\pi d^2 h/4$，　已知 h=0.005 m，$d=13.984\times10^{-3}$(m)，计算 V。

3. 改正下列错误，写出正确答案。

(1) L=0.01040(km)的有效数字是五位；

(2) $d=12.435\pm0.02$(cm)；

(3) $h=27.3\times10^{4}\pm2000$(km)。

4. 单位变换。

(1) 将 $L=4.25\pm0.05$(cm)的单位变换成μm，mm，m，km 。

(2) 将 $m=1.750\pm0.001$(kg)的单位变换成 g，mg，t 。

5. 已知周期 $T=1.2566\pm0.0001$(s)，计算角频率 ω 的测量结果，写出标准式。

附录Ⅰ　教学中常用仪器误差限$\Delta_{仪}$

约定正确使用仪器时选取的$\Delta_{仪}$值

米尺	$\Delta_{仪}$=0.5mm
游标卡尺(20、50 分度)	$\Delta_{仪}$=最小分度值(0.05mm 或 0.02mm)
千分尺	$\Delta_{仪}$=0.004mm 或 0.005mm
分光计	$\Delta_{仪}$=最小分度值(1′或 30″)
读数显微镜	$\Delta_{仪}$=0.005mm
各类数字式仪表	$\Delta_{仪}$=仪器最小读数

续表

记时器(1s、0.1s、0.01s)	$\Delta_{仪}$=仪器最小分度(1s、0.1s、0.01s)
物理天平(0.1g)	$\Delta_{仪}$=0.05g
电桥(QJ23 型)	$\Delta_{仪}=K\%\cdot R$(K 是准确度或级别，R 为示值)
电位差计(UJ33 型)	$\Delta_{仪}=K\%\cdot v$(K 是准确度或级别，v 为示值)
转柄电阻箱	$\Delta_{仪}=K\%\cdot R$(K 是准确度或级别，R 为示值)
电表	$\Delta_{仪}=K\%\cdot M$(K 是准确度或级别，M 为示值)
	$\Delta_{仪}$是根据实验际情况由实验室给出示值误差限

附录Ⅱ　数字修约的国家标准 GB1:1

在 1981 年的国家标准 GB1:1 中，对需要修约的各种测量、计算的数值，已有明确的规定：

1. 原文“在拟舍弃的数字中，若左边第一个数字小于 5(不包括 5)时，则舍去，即所拟保留的末位数字不变”。例如：在 3605643 数字中拟舍去 43 时，4<5，则应为 36056，我们简称为“四舍”。

2. 原文“在拟舍弃的数字中，若左边第一个数字大于 5(不包括 5)时，则进一，即所拟保留的末位数字加一”。例如：在 3605623 数字中拟舍去 623 时，6>5，则应为 3606，我们简称为“六入”。

3. 原文“在拟舍弃的数字中，若左边第一个数字等于 5，其右边数字并非全部为零时，则进一，即所拟保留的末位数字加一”。例如：在 3605123 数字中拟舍去 5123 时，5=5，其右边的数字为非零的数，则应为 361，我们简称为“五看右”。

4 原文“在拟舍弃的数字中，若左边第一个数字等于 5，其右边数字皆为零时，所拟保留的末位数字若为奇数则进一，若为偶数(包括 0)则不进”。例如：在 36050 数字中拟舍去 50 时，5=5，其右边的数字皆为零，而拟保留的末位数字为偶数(含 0)时则不进，故此时应为 360，简称为“五看右左”。

上述规定可概述为：舍弃数字中最左边一位数为小于四(含四)舍、为大于六(含六)入、为五时则看五后若为非零的数则入、若为零则往左看拟留的数的末位数为奇数则入为偶数则舍。可简述为“四舍六入五看右左”。

可见，采取惯用的“四舍五入”法进行数字修约，既粗糙又不符合国标的科学规定。类似的不严谨，甚至是错误的提法和作法有“大于五入，小于五舍，等于 5 保留位凑偶”；尾数“小于 5 舍，大于 5 入，等于 5 则把尾数凑成偶数”；“若舍去部分的数值，大于所保留的末位 0.5，则末位加 1，若舍去部分的数值，小于所保留的末位 0.5，则末位不变……”等。还要指出，在修约最后结果的不确定度时，为确保其可信性，还往往根据实际情况执行“宁大勿小”原则。

第五节　怎样撰写物理实验报告

物理实验除了使学生受到系统的科学实验方法和实验技能的训练外，通过书写实验报告，还要培养学生将来从事工程技术开发和科学研究的论文书写基础。因此，实验报

告是实验课学习的重要组成部分，绝不是抄写记录和计算结果，而是要思索，在思索中提高科学的素养，增强独立进行实验的能力，希望同学们能认真对待。

实验报告的基本内容包含以下七个方面的内容：(1)实验目的；(2) 实验仪器设备；(3) 实验原理；(4)实验内容(简单步骤)；(5) 原始实验数据及处理；(6)结果与分析讨论；(7)实验后的总结。

现就物理实验报告的具体写作要点作一些介绍，供同学们参考。

一、实验目的

不同的实验有不同的训练目的，通常如讲义所述。但在具体实验过程中，有些内容未曾进行，或改变了实验内容。因此，不能完全照书本上抄，应按课堂要求并结合自己的体会来写。

如：金属杨氏弹性模量的测量。

实验目的

1. 掌握尺读望远镜的调节方法，能分析视差产生的原因并消除视差；
2. 掌握用光杠杆测量长度微小变化量的原理，正确选择长度测量工具；
3. 学会不同测量次数时的不确定度估算方法，分析各直接测量对实验结果影响大小；
4. 练习用逐差法和作图法处理数据。

二、实验仪器设备

在科学实验中，仪器设备是根据实验原理的要求来配置的，书写时应记录：仪器的名称、型号、规格和数量(根据实验时实际情况如实记录，没有用到的不写，更不能照抄教材)；在科学实验中往往还要记录仪器的生产厂家、出厂日期和出厂编号，以便在核查实验结果时提供可靠依据；电磁学实验中普通连接导线不必记录，或写上导线若干即可。但特殊的连接电缆必须注明。

如：用电位差计校准毫安表。

实验仪器设备

HD1718-B 型直流稳压电源(0-30V/2A)，UJ31a 型直流电位差计(0.1 级、量程 230mV)，BX7D-1/2 型滑线变阻器(550Ω、0.6A)，C65 型毫安表(1.5 级、量程 2-10-50-100mA)，ZX93 直流电阻器，ZX21 旋转式电阻箱，UT51 数字万用表，导线若干。

三、实验原理

实验原理是科学实验的基本依据。实验设计是否合理，实验所依据的测量公式是否严密可靠，实验采用什么规格的仪器，要求精度如何？应在原理中交代清楚。

1. 必须有简明扼要的语言文字叙述。通常教材可能过于详细，目的是便于学生阅读和理解。书写报告时不能完全照书本上抄，应该用自己的语言进行归纳阐述。文字务必清晰、通顺。

2. 所用的公式及其来源，简要的推导过程。

3. 为阐述原理而必要的原理图或实验装置示意图。如图不止一张，应依次编号，安插在相应的文字附近。

如：滑线变阻器的分压与限流特性。

实验原理

滑线变阻器在电路中的连接不同，可构成分压器和限流器。

1. 分压特性研究

实验电路如图 1-4。滑动头将滑线电阻 R_0 分成 R_1 和 R_2 两部分，R_L 为负载电阻。电路总电阻为：

$$R = R_2 + \frac{R_1 R_L}{R_1 + R_L}$$

故总电流为

$$I = \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{R_2 + \dfrac{R_1 R_L}{R_1 + R_L}}$$

U_0 为电源的端电压，不是电源的电动势 E 。负载电阻 R_L 上的压降为

$$U = I\frac{R_1 R_L}{R_1 + R_L} = \frac{R_1 R_L U_0}{R_0 R_1 + R_0 R_L - R_1^2} = \frac{\dfrac{R_1}{R_0} \times \dfrac{R_L}{R_0} \times U_0}{\dfrac{R_1}{R_0} + \dfrac{R_L}{R_0} - \left(\dfrac{R_1}{R_0}\right)^2}$$

令 $K = \dfrac{R_L}{R_0}$ 、$X = \dfrac{R_1}{R_0}$ ，K 是负载电阻 R_L 相对于滑线电阻 R_0 阻值大小的参数；X 是滑线电阻 R_0 的滑动头相对于低电位端的位置参数。则上式可改写为

$$\frac{U}{U_0} = \frac{KX}{K + X - X^2}$$

在给定负载 R_L 和滑线电阻 R_0 的情况下， K 为某一定值，则分压比 U/U_0 与滑线电阻 R_0 滑动头位置参数 X 有关，它们的函数关系曲线如图 1-5。

本实验是通过实际测量来检验 U/U_0 的函数关系曲线是否与理论曲线相吻合，并探讨分压电路的有关规律。

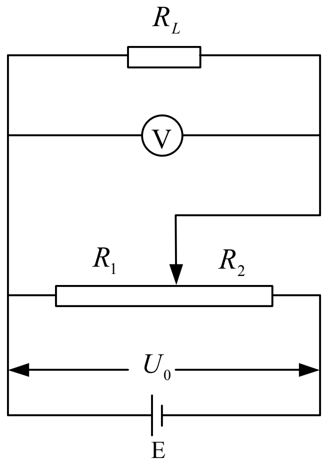

图 1-4　分压电路

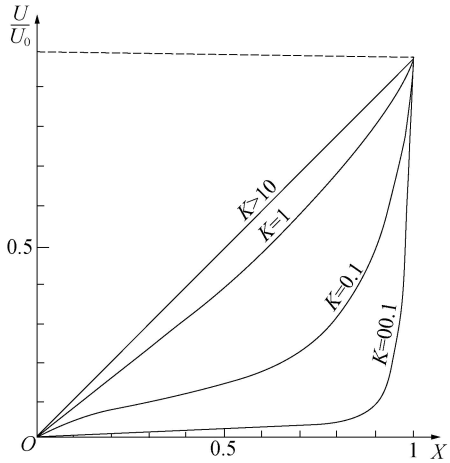

图 1-5　分压特性曲线

2. 限流特性研究

实验电路如图 1-6。此时流过负载 R_L 的电流为

$$I = \frac{U_0}{R_2 + R_L}$$

令 $I_0 = \dfrac{U_0}{R_L}$，则

$$\frac{I}{I_0} = \frac{K}{1 + K - X}$$

K 、X 定义同前。对于不同的参数 K ，电路的限流比 I/I_0 与滑线电阻 R_0 滑动头位置参数 X 有关，它们的函数关系曲线如图 1-7。

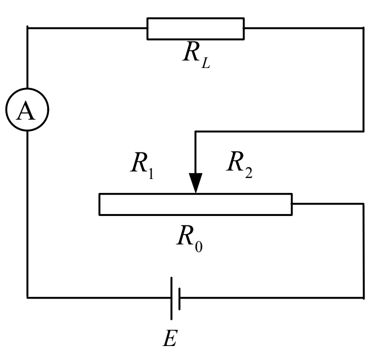

图 1-6　限流电路

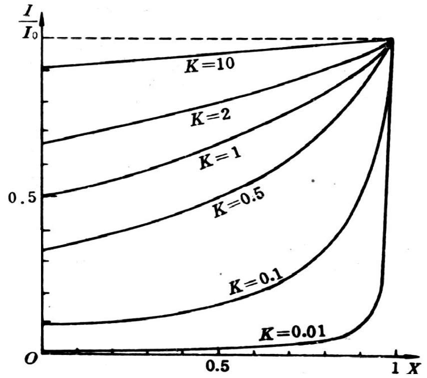

图 1-7　限流特性曲线

本实验是通过具体测量来了解它们的关系曲线及限流电路的基本特征。

四、实验内容及原始数据

概括性地写出实验的主要内容或步骤，特别是关键性的步骤和注意事项。根据测量所得如实记录原始数据，多次测量或数据较多时一定要对数据进行列表，特别注意有效数字的正确，指出各物理量的单位，必要时要注明实验或测量条件。

如：　固体密度测量。

实验内容及原始数据

1. 用游标卡尺测量铜环内、外径，用螺旋测微计测量厚度(见表 1-9)。

表 1-9　测量铜环的几何尺寸

螺旋测微计零位读数 0.003 (mm)

n		1	2	3	4	5	6	7
外径 D(mm)		29.96	29.94	29.98	29.94	29.96	29.92	29.96
内径 d(mm)		10.02	10.04	10.00	10.02	10.06	10.04	10.08
厚 h	测量值 (mm)	9.647	9.649	9.648	9.644	9.646	9.646	9.645
	修正值 (mm)	9.644	9.646	9.645	9.641	9.643	9.643	9.642

2. 用矿山天平测量铜环质量(见表 1-10)

表 1-10　测量铜环的质量

$W = 53.97$ g

指针折回点读数	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
零　点 α	17.9	6.5	17.5	7.0	17.2
停　点 β	15.0	6.0	14.8	6.1	14.4
停　点 γ	12.1	5.8	11.9	6.1	11.6

五、数据处理及结论

1. 对于需要进行数值计算而得出实验结果的，测量所得的原始数据必须如实代入计算公式，不能在公式后立即写出结果；
2. 对结果需进行不确定度分析(个别不确定度估算较为困难的实验除外)；
3. 写出实验结果的表达式(测量值、不确定度、单位及置信度，置信度为 0.683 时可不必说明)，实验结果的有效数字必须正确；
4. 若所测量的物理量有标准值或标称值，则应与实验结果比较，求相对误差；
5. 需要作图时，图需附在报告中。

如：固体密度测量。

数据处理及结论

$$\overline{D}=\frac{1}{7}(29.96+29.94+\cdots+29.96)=29.95(\mathrm{mm})$$

$$S_D=\sqrt{\frac{\sum(D_i-\overline{D})^2}{7-1}}=\sqrt{\frac{(29.96-29.95)^2+\cdots+(29.96-29.95)^2}{6}}=0.019(\mathrm{mm})$$

$$U_D=\sqrt{S_D^2+\Delta_{仪}^2}=\sqrt{0.019^2+0.02^2}=0.03(\mathrm{mm})$$

$$\therefore\quad D=29.95\pm0.03(\mathrm{mm})$$

$$\overline{d}=\frac{1}{7}(10.02+10.04+\cdots+10.08)=10.04(\mathrm{mm})$$

$$S_d=\sqrt{\frac{\sum(d_i-\overline{d})^2}{7-1}}=\sqrt{\frac{(10.02-10.04)^2+\cdots+(10.08-10.04)^2}{6}}=0.027(\mathrm{mm})$$

$$U_d=\sqrt{S_d^2+\Delta_{仪}^2}=\sqrt{0.027^2+0.02^2}=0.04(\mathrm{mm})$$

$$\therefore\quad d=10.04\pm0.04(\mathrm{mm})$$

$$\overline{h}=\frac{1}{7}(9.644+9.646+\cdots+9.642)=9.643(\mathrm{mm})$$

$$S_h=\sqrt{\frac{\sum(h_i-\overline{h})^2}{7-1}}=\sqrt{\frac{(9.644-9.643)^2+\cdots+(9.642-9.643)^2}{6}}=0.0016(\mathrm{mm})$$

$$U_h=\sqrt{S_h^2+\Delta_{仪}^2}=\sqrt{0.0016^2+0.004^2}=0.005(\mathrm{mm})$$

$$\therefore\quad h=9.643\pm0.005(\mathrm{mm})$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{17.9+17.5+17.2}{3}+\frac{6.5+7.0}{2}\right)=12.1$$

$$\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{15.0+14.8+14.4}{3}+\frac{6.0+6.1}{2}\right)=10.4$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{12.1+11.9+11.6}{3}+\frac{5.8+6.1}{2}\right)=8.9$$

$$\delta=\frac{|\beta-\gamma|}{10}=\frac{10.4-8.9}{10}=0.15\text{，}\quad m=W+\frac{\alpha-\beta}{1000\delta}=53.97+\frac{12.1-10.4}{1000\times0.15}=53.98(\mathrm{g})$$

$$U_m=\Delta_{仪}=0.05(\mathrm{g})$$

$$\therefore\quad m=53.98\pm0.05(\mathrm{g})$$

$$\rho=\frac{4m}{\pi(D^2-d^2)h}=\frac{4\times53.98\times10^{-3}}{\pi(29.95^2-10.04^2)\times9.643\times10^{-9}}=8.952\times10^3(\mathrm{kg/m^3})$$

$$E_\rho=\frac{U_\rho}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{U_m}{m}\right)^2+\left(\frac{2DU_D}{D^2-d^2}\right)^2+\left(\frac{2dU_d}{D^2-d^2}\right)^2+\left(\frac{U_h}{h}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{0.05}{53.98}\right)^2+\left(\frac{2\times29.95\times0.03}{29.95^2-10.04^2}\right)^2+\left(\frac{2\times10.04\times0.04}{29.95^2-10.04^2}\right)^2+\left(\frac{0.005}{9.643}\right)^2}$$

$$=0.27\%$$

$$U_\rho=\rho E_\rho=8.952\times10^3\times0.27\%=0.024\times10^3(\mathrm{kg/m^3})$$

$\therefore \quad \rho = (8.952 \pm 0.024) \times 10^3 (\mathrm{kg/m^3})$

经查表，$20°\mathrm{C}$ 时铜的密度为 $8.960 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，实验结果的相对误差为

$$E = \frac{|8.952 - 8.960|}{8.960} \times 100\% = 0.09\%$$

六、结果的分析讨论

一份好的实验报告，除了有准确的测量记录和正确的数据处理、结论外，还应该对结果作出合理的分析讨论，从中找到被研究事物的运动规律，并且判断自己的实验或研究工作是否可信或有所发现。

一份只有数据记录和结果计算的报告，其实只完成了测试操作人员的测试记录工作。至于数据结果的好坏，实验过程还存在哪些问题，还要在哪些方面进一步研究和完善等等，都需要我们去思考、分析和判断，从而提高理论联系实际、综合能力和创新能力。

1. 首先应对实验结果作出合理判断

如果仪器运行正常，步骤正确、操作无误，那就应该相信自己的测量结果是正确或基本正确的。

对某物理量经过多次测量所得结果差异不大时，也可判断自己的测量结果正确。

如果被测物理量有标准值(理论值、标称值、公认值或前人已有的测量结果)，应与之比较，求出差异。差异较大时应分析误差的原因：

(1) 仪器是否正常？是否经过校准？

(2) 实验原理是否完善？近视程度如何？

(3) 实验环境是否合乎要求？

(4) 实验操作是否得当？

(5) 数据处理方法是否准确无误？

2. 分析实验中出现的奇异现象

如果出现偏离较大甚至很大的数据点或数据群，则应认真分析偏离原因，考虑是否将其剔除还是找出新规律。

无规则偏离时，主要考虑实验环境的突变、仪器接触不良、操作者失误等。

规则偏离时，主要考虑环境条件(温度、湿度、电源等)的变异、样品的差异(纯度、缺陷、几何尺寸不均等)。

如果能找出新的数据规律，则应考虑是否应该否定前人的结论。只有这样，才能在科学研究中有所创新。但要切实做到“肯定有据、否定有理”。

3. 对思考题作出回答

问题可能有好几个，但不一定要面面俱到一一作答。选择一两个自己有深刻体会的问题，用自己已掌握的理论知识和实践经验说深透些。

如：滑线变阻器的分压与限流特性。

实验结果的分析和讨论

1. 本实验所得曲线与原理曲线相似，故可认为实验是基本成功的。

2. 当$K = R_L / R_0 \approx 1$时，分压和限流特性曲线都接近线性，但不是一条直线。若要求其呈一条直线，唯有$R_L = \infty$，即负载开路。

K值越小，曲线弯曲得越厉害，当$K \approx 0$时，曲线几乎呈直角弯曲。

3. 实验结果表明，测量值比理论计算值高，尤其在小负载($K = 0.0238$)情况下更为突出。这可能由于：

(1) 负载电阻R_L精度不高，误差达5%以上；

(2) 滑线电阻的滑动头位置不准确，触头不是精密点接触，可能同时跨越几圈电阻线；

(3) 电表的内阻带来的影响；

(4) 电源的稳定度不高，等等。

4. $K \approx 1$时，曲线$V / V_0 \propto X$和$I / I_0 \propto X$近乎线性，这在电子线路中有广泛应用。例如，前者作为音频放大器的音量调节，音量随电位器中心触头的位置在近乎线性地增减；后者多在电路中作偏流电阻使用。

5. 除非特殊应用，一般不采用$K << 1$的电路设计。

七、实验总结

对本实验的成功和不足进行总结，以利于实验水平的提高。