小学教育专业精品教材
“互联网 + 教育”新形态一体化教材

概率基础

主编 程小红 刘长红

北京出版集团

概率基础

GAILÜ JICHU

主　编　程小红　刘长红

北京出版集团
北　京　出　版　社

图书在版编目（CIP）数据

概率基础 / 程小红，刘长红主编. -- 北京：北京出版社，2025. 6. -- ISBN 978-7-200-19455-5

Ⅰ. O211.9

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025PG6747 号

概率基础

GAILü JICHU

主　　编：程小红　刘长红
出　　版：北京出版集团
　　　　　北 京 出 版 社
地　　址：北京北三环中路 6 号
邮　　编：100120
网　　址：www.bph.com.cn
总 发 行：北京出版集团
经　　销：新华书店
印　　刷：定州启航印刷有限公司
版 印 次：2025 年 6 月第 1 版　2025 年 6 月第 1 次印刷
成品尺寸：185 毫米 ×260 毫米
印　　张：10
字　　数：159 千字
书　　号：ISBN 978-7-200-19455-5
定　　价：38.00 元

教材意见建议接收方式：010-58572341　邮箱：jiaocai@bphg.com.cn
如有印装质量问题，由本社负责调换
质量监督电话：010-82685218　010-58572341　010-58572393

目录

第 1 章　随机事件与概率

项目背景

本章重点介绍概率论的两个最基本的概念：随机事件及其概率．主要内容包括：随机事件的关系和运算、古典概率与几何概率、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、事件的独立性以及二项概率公式等．这些知识内容都是进一步学习概率论的基础．

项目目标

一、知识与能力目标

1. 了解确定性现象和随机现象、样本空间和随机事件等概念．
2. 理解概率的定义，如古典概率、几何概率、统计概率，以及概率的公理化定义．
3. 掌握事件的关系和运算规则、概率的性质，并且会应用概率性质进行概率的计算．
4. 掌握条件概率、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式和二项概率公式，并能灵活运用这些公式解决实际问题．
5. 理解事件的独立性概念，并能运用独立性概念解决实际问题．

二、过程与方法目标

1. 通过参与抛硬币试验获取数据，归纳试验结果，发现规律，真正做到在探索中学习，在探索中提高．
2. 通过课堂讨论、小组合作等教学活动，锻炼解决复杂数学问题的能力．
3. 历经从理论学习到实践应用的完整过程，加深对概率公式的理解和掌握，体会概率在日常生活和生产实践中的应用，提高学生的解决问题能力和数学素养．
4. 通过研讨和试验，让学生感悟和理解随机思想，能够正确解读随机试验结果，提升对生活中随机现象的认识．

三、情感态度与价值观目标

1. 激发学生对概率课程的兴趣和好奇心，培养学生主动探索未知领域的精神，增强学生的学习动机，使其认识到概率理论在现代数学及其应用中的重要性，从而更加积极地投入学习．
2. 通过构建概率模型，培养学生“做”数学的精神，体验“做”数学带来的成功的喜悦．
3. 介绍概率理论的发展历程和杰出数学家的事迹，弘扬科学精神．

引导案例

一名数学家等于十个师

在第二次世界大战中，盟军为了和德国作战，大量军需物品要穿过大西洋运送到各个战场．可是在 1943 年以前，负责运送物资的英美船队常常受到德国潜艇的袭击，损失惨重．当时英美两国限于实力，无力增派更多的护航舰，一时间德军的“潜艇战”搞得盟军焦头烂额，海上运输成了令人头疼的问题．

在进退两难之际，有位美国海军将领专门去请教了几名数学家．数学家运用概率论分析后发现，运输舰队与敌军潜艇相遇是一个随机事件，即船队是否被袭击，取决于航行过程中是否与敌潜艇相遇，而与敌潜艇相遇有可能发生，也有可能不发生．从数学角度来看这一问题，它具有一定的规律．

1. 一定数量的船只，编队规模越小，批次就越多；批次越多，与敌潜艇相遇的概率就越大．比如，5 位同学放学后各自回到自己的家里，老师要找其中任意一位同学，随便去哪一位同学家都行；但若这 5 位同学都集中在其中某一位同学家里，老师可能要找几家才能找到他们，一次找到的可能性只有 1/5，即 20%．

2. 一旦与敌潜艇相遇，船队的规模越小，每艘船被击中的可能性就越大．这是因为德军潜艇的数量与船队的数量相比总是少的，潜艇所载弹药有限，每次袭击，不论船队规模多大，击沉船只的数目基本相等．假如运输船的总量为 100 艘，按每队 20 艘船编队，就要编成 5 队；而按每队 10 艘船编队，就要编成 10 队．两种编队方式与敌潜艇相遇的可能性之比为 5∶10，即 1∶2．假设每次遭到敌潜艇袭击损失 5 艘运输船，那么，上述两种编队方式中每艘船被击中的可能性之比为 5/20∶5/10=1∶2．两者结合起来看，两种编队方式中每艘运输船与敌潜艇相遇并被击沉的可能性之比为 1∶4．这说明，100 艘运输船，编成 5 队比编成 10 队的危险性小．

美国海军接受了数学家的建议，改进了运输船由各个港口分散启航的做法，命令船队在指定海域集合，再集体通过危险海区，然后各自驶向预定港口．奇迹出现了，盟军船队遭袭击被击沉的概率由原来的 25% 降低为 1%，大大减少了损失，保证了战略物资的供应．

于是，美国军方宣称：一名优秀数学家的作用，超过十个师的兵力！

思考 通过阅读本案例，你是如何看待数学知识的魅力的？

1.1　随机事件

1.1.1　随机现象

概率论是一门专注于研究随机现象的学科．在自然界和人类社会里，普遍存在着两种现象：一种是确定性现象，即在一定条件下，完全可以预言其一定出现或者一定不出现的现象．例如，在标准大气压的条件下，将水加热到100ºC，水必然沸腾；用手向空中抛出的石子，必然下落；在没有受到外力作用时，物体始终保持原来的运动状态，等等，这些都是确定性现象．另一种是随机现象，即在一定条件下，可能出现多种不同的结果，而且事先并不能断定会出现哪种结果的现象．例如，新出生的婴儿，可能是男孩，也可能是女孩；投篮时，可能投中，也可能投不中；明天股票可能涨也可能跌，等等，这些现象都具有随机性，属于随机现象．

对于随机现象，是否有规律可循呢？就单次试验而言，没有什么规律可循，其出现的结果具有偶然性．但是，当经过大量重复试验时，就会发现试验结果呈现某种规律性．例如：

（1）抛掷一枚质量均匀的硬币，当抛掷次数很大时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占一半．表1–1中列出了历史上有名的抛硬币试验数据．

表1–1　历史上抛硬币试验中正面朝上的次数记录

试验者	抛硬币次数	正面朝上次数	正面朝上频率
蒲丰	4 048	2 048	0.506 9
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

（2）在对一个目标进行射击时，如果射击次数不多，弹孔分布看不出有什么规律性，但当射击次数非常多时，就可发现弹孔的分布呈现一定的规律，弹孔围绕目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的区域弹孔越密，越远离目标的地方弹孔越稀疏．

（3）密闭容器中，考虑某一瞬时的分子热运动情况．每个分子的状态难以确定，如速率，容器中每个分子的速率由于分子间频繁碰撞不断发生改变．但对大量的气体分子而言，分子速率的分布遵循一定规律，呈现出速率较大和较小的分子数量相对较少，而速率趋于中间值的分子数量较多的特点．

以上案例可以看到，随机现象表面看似没有规律，出现哪个结果无法预料，但当

我们进行大量重复试验时，它却会呈现出某种规律性．这种规律称为随机现象的统计规律性．而概率就是研究随机现象统计规律性的一门学科．可以说，概率论本质上是在不确定性中探寻确定性．

1.1.2　样本空间和随机事件

为了研究随机现象，需要对随机现象进行观察或者试验．下面是试验示例：

抛掷一枚硬币，观察硬币是否正面朝上；

从装有白球和黑球的口袋中摸出一个球，观察球的颜色；

投掷两枚骰子，观察两枚骰子的点数之和；

统计某个交通路口某个时间段内通过了多少辆汽车；

测试某个电子元器件的使用寿命．

上述试验具有以下特点：

（1）可重复：试验在相同条件下可重复进行；

（2）可观测：试验所有可能出现的结果是明确、可被观测的，而且结果不止一个；

（3）随机性：每次试验前无法确切预知会出现哪一个结果．

这样的试验称为随机试验，简称试验，通常用字母 E 来表示．

为了掌握随机现象的规律，首先要描述随机试验所有可能出现的结果．

随机试验的每一个可能结果称为样本点，也称作基本事件，用 ω 表示．由随机试验的所有样本点构成的集合称为样本空间，用 Ω 表示．

例 1.1　投掷一枚质量均匀的硬币，观察正反面出现的情况．可能结果有两个：正（正面向上），反（反面向上）．故样本空间

$$\Omega=\{\text{正},\text{反}\}\ .$$

例 1.2　抛掷一枚骰子，考察出现的点数．显然，试验的所有可能结果：1 点，2 点，…，6 点．因此，样本空间

$$\Omega=\{1,2,\cdots,6\}\ .$$

随机试验的样本空间可能是有限个，也可能是无限个．

例 1.3　考察某个网站在某个时间段内的单击数．这个试验的基本事件是一个非负整数，由于难以确定一个单击次数的上界，所以样本空间

$$\Omega=\{1,2,\cdots,k,\cdots\}\ .$$

再看例 1.2，集合 $A=\{2,4,6\}$ 表示掷出的是偶数点，我们称 A 是事件．显然，A 是样本空间 Ω 的子集．当掷出来的点数是偶数时，事件 A 就发生了，否则称 A 不发生．类似地，{ 掷出的点数大于 4 点 }$=\{5,6\}$，{ 掷出的点数不超过 4 点 }$=\{1,2,3,4\}$，这些也都是事件．

一般地，样本空间 Ω 的子集称为随机事件，简称事件，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示．随机事件 A 发生当且仅当 A 中的样本点出现．基本事件也是随机事件，它是一个单元素集合．由于样本空间 Ω 本身作为一个事件，每个样本点都属于它，因此，每次试验 Ω 都发生，Ω 称为必然事件；而空集 ϕ 作为一个事件，它不包含任何样本点，因此，不管任何试验，它都不会发生，因此称 ϕ 为不可能事件．必然事件和不可能事件是确定性事件，为了讨论方便，我们把它们看作特殊的随机事件．

1.1.3　事件的关系和运算

在概率论中，由于事件是用集合定义的，因此，事件的关系和运算也可以用集合之间的关系和运算来表示．

1. 事件的包含

若事件 A 是事件 B 的子集，则称事件 B 包含 A，或称事件 A 包含于事件 B，记作

$$B \supseteq A \text{ 或者 } A \subseteq B .$$

显然，这时事件 A 发生必然有事件 B 发生．

因此事件 B 包含事件 A 也常定义：若事件 A 发生必然有事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A．

例如，投掷一枚骰子，考察掷出的点数，设事件 B 表示“掷出的是偶数点”，事件 A 表示“掷出的是 2 点”，那么显然有 $A \subseteq B$．

2. 事件的相等

如果 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$．

3. 事件的积（或交）

由同时属于事件 A 和事件 B 的样本点所构成的集合，称为事件 A 与事件 B 的积（或交），记为 $A \cap B$ 或者 AB．

显然，当 $A \subseteq B$ 时，有 $AB = A$．对任意事件 A，都有 $A\Omega = A$，$A\phi = \phi$．

事件的积 AB 也是一个事件，它的发生意味着事件 A 与事件 B 同时发生，常称 AB 为 A 与 B 同时发生的事件．

在例 1.2 中，如果事件 B=“掷出的是偶数点”，事件 A=“掷出的是 2 点或者 3 点”，事件 C=“掷出的是 2 点或者 3 点”，那么 AB=“掷出的是 2 点”，$AC = \phi$．

一般地，

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n = A_1 A_2 \cdots A_n = \{A_1, A_2, \cdots, A_n \text{都发生}\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \{A_1, A_2, \cdots \text{都发生}\}.$$

4. 事件的互斥（互不相容）

若 $AB=\phi$，则称 A 与 B 互斥，或者互不相容.

A 与 B 互斥，表示 A 与 B 不能同时发生. 即若 A 发生，则 B 一定不发生；反之，B 若发生，则 A 一定不发生.

若 $A_1, A_2, \cdots$ 中任意两个都是互斥的，则称 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互斥或两两互不相容.

例 1.4 袋子里有 5 个球，其中 3 个是红色的，2 个是白色的，现在从中抽取 2 个球，令 $A=$“恰好抽到 1 个红球”，$B=$“没有抽到红球”，显然，A 与 B 是互斥的.

5. 事件的和（或并）

由至少属于 A 和 B 二者之一的所有样本点组成的集合，称为 A 与 B 的和（或并），记为 $A\cup B$ 或者 $A+B$.

$A\cup B$ 也是一个事件，它表示 A 和 B 中至少有一个发生. 因此，常称 $A\cup B$ 为 A 与 B 中至少有一个发生的事件.

例如，在例 1.4 中，$A\cup B$ =“至多抽到一个红球”.

一般地，

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n = \{A_1, A_2, \cdots, A_n \text{至少有一个发生}\},$$

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cdots = \{A_1, A_2, \cdots \text{至少有一个发生}\}.$$

6. 事件的对立

对于事件 A，称 $\overline{A}$ 为 A 的对立事件或逆事件. $\overline{A}$ 表示事件 A 不发生. 显然，在每次试验中 A 与 $\overline{A}$ 必须有一个发生，而且只能有一个发生.

在例 1.2 中，若 $B=$“掷出的是偶数点”，则 $\overline{B}$ =“掷出的是奇数点”.

7. 事件的差

由那些包含在 A 中而不在 B 中的样本点构成的集合，称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

显然，$A-B$ 表示 A 发生但 B 不发生. 此外，还存在这样的关系：$A-B=A-AB$.

如同讨论集合的关系与运算一样，讨论事件间的关系和运算时，常常借助文氏图（Venn 图）来帮助理解，如图 1-1 至图 1-6 所示.

首先用一方框代表必然事件 Ω，用画在 Ω 内的两个不同的图形表示事件 A，B，则：

$A\subseteq B$ 如图 1-1 所示；

$A\cup B$ 如图 1-2 阴影区域所示；

$A\cap B$ 如图 1-3 阴影区域所示；

$\overline{A}$ 如图 1–4 阴影区域所示;

$A-B$ 如图 1–5 阴影区域所示;

A,B 互不相容如图 1–6 所示.

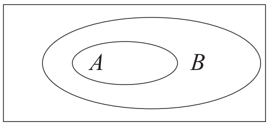

图 1–1

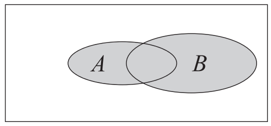

图 1–2

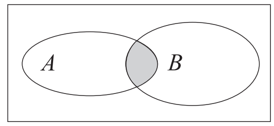

图 1–3

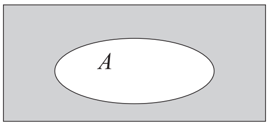

图 1–4

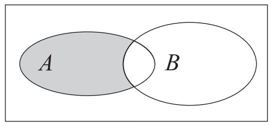

图 1–5

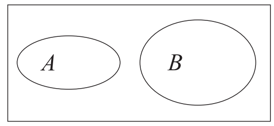

图 1–6

在概率论中，由于事件、事件的关系及运算与集合、集合的关系及运算是相似的，因此根据集合的运算性质，可推得事件的运算性质如下：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$;

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),(A\cap B)\cup C=(A\cup B)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对偶律在事件的运算中经常用到，且它可以推广到更多个事件的情形，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

用通俗的语言表述就是，多个事件的和的对立事件等于其对立事件的积，多个事件的积的对立事件等于其对立事件的和.

例 1.5　设 A,B,C 为任意三个事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) 只有事件 A 发生;

(2) 只有一个事件发生;

(3) 至少有一个事件发生;

(4) 至多有一个事件发生.

解　(1) $A\overline{B}\overline{C}$.

(2) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

(3) $A\cup B\cup C$.

(4) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

1.2 古典概率

古典概率，又称概率的古典定义，是概率理论发展历史中最早的概率定义．它具有很强的限制条件，仅适用于比较简单的情形．

若一个随机试验具有下面特点：

（1）试验的样本空间包含有限个样本点；

（2）试验中的每个样本点发生的可能性是均等的．

那么，我们就将此类随机试验划分为古典概率模型，简称古典概型．

定义 1.1　在古典概型范畴中，若样本空间 Ω 中的样本点数为 n，而事件 A 包含了其中的 k 个样本点，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}. \tag{1.1}$$

这里所计算得出的概率，称其为古典概率．

从定义 1.1 可以看出，古典概率 P 有以下性质：

（1）非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

（2）规范性：$P(\Omega)=1$；

（3）有限可加性：设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

古典概型要求每一个样本点发生的可能性相同．在实际生活中，人们会有这样的误区：在没有任何判断和论证的情况下，就假设各结果有相同的可能性，“试验只有两种可能结果，发生或不发生，所以可能性各为 50%”．此时该定义未经思考，往往会导致严重错误的结果．例如，一个人投篮时只有两个结果，所以投中的概率是 50%，但显然是不符合实际的，因为这样会得到篮球运动员和普通民众投篮命中率是一样的．

例 1.6　投掷两枚质量均匀的骰子，求点数之和是 7 的概率．

解　设事件 A 表示“点数之和是 7”．将两枚骰子掷出的结果以有序数对表示，显然，该试验共有 36 个可能出现的结果，而事件 A 包含了其中的 6 个可能结果．根据古典概率有

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

17 世纪，数学家莱布尼茨曾经认为点数之和是 11 和 12 的可能性相同，理由是 11 和 12 都仅有一种情况才可能出现．这里，莱布尼茨犯了一个错误，他没有把两枚骰子看成是不同的对象，所以认为 (6,5) 和 (5,6) 是同一个结果．

莱布尼茨

那么，如何避免类似的错误呢？首先，应该给每个对象做标记，而不是将它们设定为不可区分的．其次，通过计数计算概率时，要思考试验是否符合古典概型的条件．一旦确定了属于古典概型，那么计算事件 A 的概率就转化为一个计数问题．

例 1.7　从红、白、黑三个球中任取两个，求取到红球的概率．

解　设事件 A 表示“取到红球”．显然，试验的所有可能结果有 C_3^2 个，而事件 A 包含其中 2 个可能结果，所以事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{2}{\mathrm{C}_3^2}=\frac{2}{3}.$$

如果采用依次取球的方式，每次仅取 1 个，概率不会变化．此时，试验的所有可能结果有 $\mathrm{A}_3^2=6$ 个，事件 A 中包含了其中 4 个可能结果，所以概率仍然是 $\frac{2}{3}$．

例 1.8　工业生产中，往往采用抽样来检测产品质量，一般采用两种抽样方式：（1）有放回抽样；（2）无放回抽样．假设一批产品共 100 件，其中有 95 件正品和 5 件次品，按这两种抽样方式从这批产品中抽取 10 件样品，分别求取出的 10 件样品中恰有 2 件次品的概率．

解　（1）有放回抽样．

第一次抽取时有 100 种不同的取法；因为第一次取出的样品还要再放回这批产品中，所以第二次抽取时仍有 100 种不同的取法．以此类推，直到第 10 次抽取时仍有 100 种不同的取法．所以共有 100^{10} 种不同的取法．于是，样本点的总数为

$$N=100^{10}.$$

设事件 A_1 表示“有放回抽样，取出的 10 件样品中恰有 2 件次品”．如上所述，从 95 件正品中有放回地依次取出 8 件样品，有 95^8 种不同的取法；从 5 件次品中有放回地依次取出 2 件次品有 5^2 种不同的取法．又因为这 2 件次品可以在 10 次中的任何 2 次取，所以取次品的组合数为 C_{10}^2，所以，事件 A_1 总共有 $\mathrm{C}_{10}^2\times5^2\times95^8$ 种不同的取法．于是事件 A_1 包含的样本点数为

$$\mathrm{C}_{10}^2\times5^2\times95^8.$$

按照古典概率定义，事件 A_1 的概率为

$$P(A_1)=\frac{\mathrm{C}_{10}^2\times5^2\times95^8}{100^{10}}\approx0.074\,6.$$

（2）不放回抽样．

因为是不放回抽样，所以相当于从 100 件产品中任取 10 件进行无重复排列，所以共有 A_{100}^{10} 种不同的取法．

设事件 A_2 表示“不放回抽样，取出的 10 件产品中恰有 2 件次品”．从 95 件正品中

不放回地依次取出 8 件正品有 A_{95}^{8} 种不同的取法；从 5 件次品中不放回地依次取出 2 件次品，有 A_{5}^{2} 种不同的取法．又因为这 2 件次品可以在 10 次中的任何 2 次取得，所以有 C_{10}^{2} 种不同的情况，所以，共有 $\mathrm{C}_{10}^{2}\mathrm{A}_{95}^{8}\mathrm{A}_{5}^{2}$ 种不同的取法．于是，事件 A_2 包含的样本点数为

$$\mathrm{C}_{10}^{2}\mathrm{A}_{95}^{8}\mathrm{A}_{5}^{2}.$$

因此，事件 A_2 的概率为

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_{10}^{2}\mathrm{A}_{95}^{8}\mathrm{A}_{5}^{2}}{\mathrm{A}_{100}^{10}}\approx 0.070\,2.$$

可以看到，当总体数量很多，而我们只抽取少量样本时，有放回抽样和无放回抽样的概率相当近似．

例 1.9 设一批产品共 N 件，其中有 M 件次品，其余的产品均为正品．现在不放回地依次从中取一件产品，求第 k 次取到次品的概率．

解 设事件 A 表示“第 k 次取到次品”，该问题类似于 N 件产品按次序排成一列，求排在第 k 个位置的是次品的概率．

解法 1 将 N 件产品排成一列共有 $N!$ 种排法．若第 k 个位置是次品，那么就要从 M 件产品中选取一件放在该位置上，共有 M 种放法，再把剩下的 $N-1$ 件产品依次排在其余 $N-1$ 个位置上，共有 $(N-1)!$ 种排法．因此，事件 A 包含的样本点数为

$$M\times(N-1)!.$$

事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{M\times(N-1)!}{N!}=\frac{M}{N}.$$

解法 2 我们只考虑前 k 次产品的抽取情况，即从 N 件产品中取 k 件产品排成一列，共有 A_{N}^{k} 种排法．若第 k 个位置是次品，就要从 M 件产品中选取一件放在该位置上，共有 M 种放法，再从剩下的 $N-1$ 件产品中依次取 $k-1$ 件排在其余 $k-1$ 个位置上，有 A_{N-1}^{k-1} 种排法．因此，事件 A 中的样本点数为

$$M\times\mathrm{A}_{N-1}^{k-1}.$$

事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{M\times\mathrm{A}_{N-1}^{k-1}}{\mathrm{A}_{N}^{k}}=\frac{M}{N}.$$

解法 3 我们只考虑第 k 个位置上放什么产品，这 N 件产品都是可能的，有 M 件产品使该位置放置的是次品．事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{M}{N}.$$

值得注意的是，通过以上三种解法所求概率与 k 无关，这一结果表明无论第几次取产品，取出次品的概率都是一样的．也就是说，取出次品的概率与先后次序无关，实际上是日常抽签的基本模型．

例 1.10（分房问题） 假设有 n 个人，每个人都以同样的概率 $\frac{1}{N}(n\leqslant N)$ 被分配在 N 间房中的任意一间，求下列事件的概率：

（1）事件A:“某指定的n间房中各有一人”；

（2）事件B:“恰有n间房中各有一人”；

（3）事件C:“某指定的房间没有人”．

解　把第一个人分配到房间，有 N 种可能，把第二个人分配到房间，也有 N 种可能，…，把第 n 个人分配到房间，也有 N 种可能，所以把 n 个人分配到 N 间房中共有 N^n 种分配方法，即样本空间中的样本点数为 N^n．

（1）某指定的 n 间房中各有一人是把指定好的 n 间房分配给 n 个人，这相当于是 n 的一个全排列，故事件 A 包含的样本点数为 n！，于是

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

（2）恰有 n 间房中各有一人是没有指定好房间．所以首先要从 N 个房间中选取 n 个房间，共有 C_N^n 种取法，把 n 个人安排进这 n 个房间中有 $n!$ 种分配方法，故事件 B 的样本点数为 $\mathrm{C}_N^n\times n!$，即 A_N^n．故

$$P(B)=\frac{\mathrm{A}_N^n}{N^n}.$$

（3）某指定的房间没有人，说明所有人都分配到其他 $N-1$ 个房间，因此每个人分配到房间中去都有 $N-1$ 种可能，故事件 C 包含的样本点数为 $(N-1)^n$．于是，事件 C 的概率为

$$P(C)=\frac{(N-1)^n}{N^n}.$$

分房问题是相当广泛的一类问题，n 个球投放在 N 个盒子中，n 个人在 N 个车站下车，还有例 1.11 生日问题，都可以归结为这个类型．

例 1.11（生日问题） 某次集会有 n 个人参加 $(n\leqslant 365)$，求至少有 2 个人生日相同的概率．

解　设事件 A 表示至少有 2 个人生日相同，则 $\bar{A}$ 表示 n 个人生日各不相同．显然，样本空间中的样本点数是 365^n，$\bar{A}$ 中的样本点数为 A_{365}^n．故事件 $\bar{A}$ 的概率为

$$P(\bar{A})=\frac{\mathrm{A}_{365}^n}{365^n}.$$

根据对立事件概率的性质 $P(A)=1-P(\bar{A})$，

则事件 A 的概率为

$$P(A)=1-\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}.$$

经计算可得表 1–2。

表 1–2

n	20	30	40	50	60	70	80
$P(A)$	0.411	0.706	0.891	0.970	0.994	0.999	0.999 9

从表 1–2 中可以看出 30 人时至少有两人同生日的概率约为 0.7，40 人时概率接近 0.9，而 50 人时这一事件几乎为必然事件．这结果是一件很出人意料的事情．

有意思的是，如果预先指定某一天，随机选取 125 人，出现某人生日恰好是这一天的概率仅约为 30%，即便把人数扩大到 250 人，概率也约为 50%，与上述问题的概率形成很大反差．

例 1.12 从 5 双不同型号的鞋中任取 4 只，求 4 只中至少有一双的概率．

解 设 A 表示事件“4 只鞋子中至少有一双”．

解法 1 从 5 双鞋子也就是 10 只鞋子中取 4 只，共有 C_{10}^{4}种取法，故样本空间中样本点数为 C_{10}^{4}．事件 A 包含两种情况：一种是取到 2 双鞋，有 C_{5}^{2} 种取法；另一种情况是有 2 只成双和 2 只不成双，成双的样本点数是 C_{5}^{1}，不成双是从余下 4 双鞋子中取 2 双，再从 2 双中各取一只，样本点数是 $C_{4}^{2}\times2\times2$，这种情况下共有 $C_{5}^{1}\times C_{4}^{2}\times2\times2$ 个样本点．故事件 A 包含的样本点数为 $C_{5}^{2}+C_{5}^{1}\times C_{4}^{2}\times2\times2$．于是事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_{5}^{2}+C_{5}^{1}\times C_{4}^{2}\times2\times2}{C_{10}^{4}}=\frac{13}{21}.$$

在计算“4 只中至少有一双”的取法时，常有一种错误思路：先取出一双，有 C_{5}^{1} 种取法，然后余下两只随意取，即 C_{8}^{2} 种取法，这样计算其实把 4 只成两双的情况重复计算了，所以应该减去 C_{5}^{2}，即事件 A 包含的样本点数是 $C_{5}^{1}\times C_{8}^{2}-C_{5}^{2}=130$，经计算概率为 $\frac{13}{21}$．

解法 2 样本空间中样本点数是 C_{10}^{4}，$\bar{A}$ 表示“4 只鞋子都不成双”．4 只鞋子都不成双意味着从 5 双中取 4 双，再从 4 双中各取一只，每双有 2 种取法，4 双就有 $2\times2\times2\times2$ 种取法．所以 $\bar{A}$ 的取法有 $C_{5}^{4}\times2\times2\times2\times2\times2$．故事件 $\bar{A}$ 的概率为

$$P(\bar{A})=\frac{C_{5}^{4}\times2\times2\times2\times2}{C_{10}^{4}}=\frac{5\times6}{C_{10}^{4}}=\frac{8}{21}.$$

根据对立事件概率公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$，

可得

$$P(A)=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

解法 3　从 10 只鞋子中按顺序取 4 次，每次取 1 只，取后不放回，共有 A_{10}^{4} 种取法．$\overline{A}$ 表示“4 只鞋子都不成双”，也就是第一次取有 10 种取法，由于第二次取的不能和第一次取的鞋成双，所以第二次有 8 种取法；以此类推，第三次有 6 种取法，第四次有 4 种取法，所以 $\overline{A}$ 中的样本点数为 $10\times8\times6\times4$，事件 $\overline{A}$ 的概率为

$$P(\overline{A})=\frac{10\times8\times6\times4}{\mathrm{A}_{10}^{4}}=\frac{8}{21}.$$

事件 A 的概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

1.3　几何概率

古典概率的定义是在样本空间的基本事件具备有限性且等可能的情况下给出的，对于基本事件为无穷多个的情况，古典概率就不再适用．把有限个样本点推广到无限个样本点的情形，进而引入了几何概率．

定义 1.2（几何概率）　设有一个可度量区域 S(如直线区域、平面区域或空间区域)，向区域内任意掷一质点 M，且落在 S 内任何子区域 A 上的可能性与 A 的度量(如长度、面积等)成正比，而与 A 的位置和形状无关，则这个试验称为几何概型试验．并定义 M 落在 A 中的概率 $P(A)$ 为

$$P(A)=\frac{A\text{的度量}}{S\text{的度量}}. \tag{1.2}$$

式(1.2)确定的概率称为几何概率．

几何概率也具有古典概率的性质：

(1) 非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant1$；

(2) 规范性：$P(S)=1$；

(3) 有限可加性：设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

对于一个具体问题能否应用几何概率计算事件的概率，关键在于将问题几何化．具体来说，就是根据问题的情况，选取合适的参数，构建适当的坐标系．在此基础上，

将试验的每一结果对应于该坐标系中的一点，使得全体结果构成一个区域，且是可度量的.

在几何概型中，“等可能”这一概念应理解为每个试验结果落在某区域内的概率与该区域的度量成正比，而与区域的位置和形状无关.

例 1.13 某人午觉醒来，发觉表停了，他打开收音机，想听电台报时，设电台每整点报时一次，求此人等待时间短于 10 分钟的概率.

解 设 x 表示他准备开始听报时的时间，样本空间为

$$\Omega=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 60\}.$$

显然，x 等可能地落在 Ω 中．用 A 表示他等待的时间短于 10 分钟，则

$$A=\{x\,|\,50\leqslant x\leqslant 60\}.$$

于是

$$P(A)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}.$$

例 1.14 甲、乙两人约定在下午 6 时到 7 时之间在某处会面，并约定先到者应等候另一人一刻钟（15 分钟），过时即可离去．求两人会面的概率.

解 用 x 和 y 表示甲、乙两人到达约会地点的时间，则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x,y\leqslant 60\}.$$

依题意，样本点 (x,y) 等可能地落在 Ω 中．用 A 表示两人相遇，则

$$A=\{(x,y)\,|\,|x-y|\leqslant 15,(x,y)\in\Omega\}.$$

样本空间 Ω 和事件 A 代表的几何区域如图 1-7 所示，于是有

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

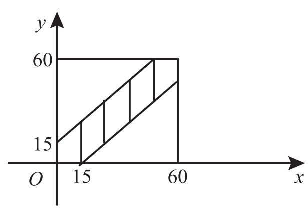

图 1–7

例 1.15［蒲丰投针问题（Buffon needle problem）］ 平面上画很多平行线，间距为 a．向此平面投掷长为 $l(l<a)$ 的针，求此针与任一平行线相交的概率.

解 以针的任一位置为样本点，它可以由两个数决定：针的中点与最接近的平行线之间的距离 x，针与平行线的交角 φ

蒲丰

（图 1–8）. 样本空间为

$$\Omega=\left\{(\varphi,x)\mid 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\right\}.$$

用 A 表示针与平行线相交，满足 $x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi$，则

$$A=\left\{(\varphi,x)\mid x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi,(\varphi,x)\in\Omega\right\}\text{（图 1–9）}.$$

所求概率为

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\pi\times\frac{a}{2}}=\frac{2l}{a\pi}.$$

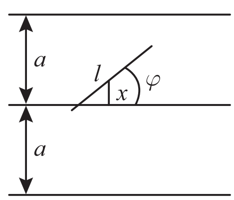

图 1–8

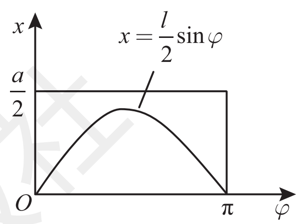

图 1–9

由于概率 P 可以用多次重复试验的频率来近似，由此得到 π 的近似值. 方法是重复投针 N 次，统计与平行线相交的次数 n，则 $P\approx\frac{n}{N}$. 又因 a 与 l 都可精确测量，故从 $\frac{2l}{a\pi}\approx\frac{n}{N}$，可解得 $\pi\approx\frac{2lN}{an}$. 历史上有不少学者做过这个试验，相关数据如表 1–3 所示. 做得最好的一位投掷了 3 408 次，计算得出 $\pi\approx3.141\,592\,9$，其精确度已经达到小数点后第六位.

表 1–3　历史上投针试验记录表

试验者	时间	针长	投掷次数	相交次数	π 的近似值
Wolf	1850	0.8	5 000	2 532	3.159 6
Smith	1855	0.6	3 204	1 218	3.155 4
De Morgan	1860	1.0	600	382	3.137
Fox	1884	0.75	1 030	489	3.159 5
Lazzerini	1901	0.83	3 408	1 808	3.141 592 9
Reina	1925	0.541 9	25 220	859	3.179 5

1.4 统计概率

古典概率和几何概率都是以等可能为基础的，具有很大的局限性．实际中有很多试验，它们的试验结果并不具备等可能性质．例如，一个人患肺癌的概率、一批产品的次品率、通过考试的概率……即便不知道精确数值到底是多少，但假定概率是“一半对一半”肯定是不正确的．此时，古典概率和几何概率就失去了使用价值．

本节要介绍的是适用于一般试验的统计概率，它的基础逻辑在于只要数据量足够大，一个随机事件发生的频率会无限接近概率．

定义 1.3 设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 n_A 次，则比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为随机事件 A 的频率，记作 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}. \tag{1.3}$$

由于在任意 n 次试验里，事件 A 发生的次数 n_A 具有偶然性，故对任意 n，频率 $f_n(A)$ 都具有不确定性．但当重复试验次数 n 足够多时，$f_n(A)$ 就呈现出明显的规律性——频率的稳定性．例如，在 1.1 节中的掷硬币试验，如果用 A 表示出现正面的事件，则在皮尔逊分别抛掷 12 000 和 24 000 次试验中，有

$$f_{12\,000}(A)=0.501\,6,$$

$$f_{24\,000}(A)=0.500\,5.$$

可见，当 n 数值很大时，硬币正面出现的频率 $f_n(A)$，趋近 $\frac{1}{2}$．

这样的例子不胜枚举，频率所呈现出的这种稳定性，说明了事件发生的可能性由一定的大小来衡量．当频率稳定于较大的数值时，相应事件发生的可能性较大；反之，就较小，从而频率所稳定的这个值就是相应的事件发生可能性大小的一个客观且定量的度量，我们称为相应事件的概率．

定义 1.4 在同样的条件下进行大量试验时，根据频率的稳定性原理，事件 A 的频率必然稳定在某一个确定的数值 p 的附近，则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=p. \tag{1.4}$$

由式（1.4）确定的概率，我们称为统计概率．

事件的频率具有如下性质：

（1）非负性：$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

（2）规范性：$f_n(\Omega)=1$；

（3）有限可加性：设 k 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是互不相容的，则

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=\frac{n_1+n_2+\cdots+n_k}{n}=\frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}+\cdots+\frac{n_k}{n}$$
$$=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

其中，$n_1,n_2,\cdots,n_k$ 分别是在 n 次试验中事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 发生的次数．

证　性质（1），（2）显然是成立的，现证性质（3）．

设在 n 次试验中，$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 发生的次数为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，由于 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的，故事件 $A_1+A_2+\cdots+A_k$ 发生的次数为 $n_1+n_2+\cdots+n_k$．从而得到

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=\frac{n_1+n_2+\cdots+n_k}{n}=\frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}+\cdots+\frac{n_k}{n}$$
$$=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

由频率的上述性质，统计概率也应当具有如下性质：

（1）非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

（2）规范性：$P(\Omega)=1$；

（3）有限可加性：设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

统计概率适用于一切类型的试验，它给出了确定事件概率的近似方法，即当试验次数 n 足够大时，可用 $f_n(A)$ 作为概率的近似值．在许多实际问题中，当事件的概率不易计算时，往往就是这样考虑的．例如，对于一枚动了手脚的硬币，想要知道每一面向上的概率，可以把这枚硬币抛掷足够多的次数．比如，抛掷了 1 000 次，正面向上出现了 600 次，概率就可以视为 $\dfrac{600}{1\,000}=\dfrac{3}{5}$．

1.5　概率的公理化定义

前文我们给出了古典概率、几何概率和统计概率这三种概率的定义方式．古典概率和几何概率适用范围具有较大的局限性，统计概率虽然直观且具有一般性，但在数学上却不严谨，如定义中的“n 很大”“附近”等表述就不是很确切．1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出了概率的公理化定义，使得概率的定义具有普遍性、严密性．所谓公理化定义就是把概率应满足的性质作为公理，以此来定义概率．古典概率、几何概率和统计概率三种定义方式虽然不同，但却具备相同的性质：（1）$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；（2）$P(\Omega)=1$；（3）设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的，则 $P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$．这说明这三条性质是概率的最基本性质．柯尔莫哥洛夫正是基于这三条性质给出了概率

柯尔莫哥洛夫

的公理化定义.

定义 1.5　设随机试验的样本空间为 Ω，如果对每一个事件 A（Ω 中的子集），都有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且满足以下公理：

公理 1
$$P(A) \geqslant 0\,; \tag{1.5}$$

公理 2
$$P(\Omega) = 1\,; \tag{1.6}$$

公理 3　设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不相容的，有
$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots\,, \tag{1.7}$$
则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由上述三条公理能够推导出 $P(A) \leqslant 1$，见下面性质 1；公理 3 称为概率的可列可加性，它包含着有限可加性，具体证明见性质 2．概率论的全部理论都是建立在上面的三条公理基础上的.

从概率的公理化定义可以看出，它实际上已经包括了前文概率的统计定义、古典定义和几何定义，并且摆脱了它们的局限性和模糊性．概率的公理化定义不仅适用于古典概率、几何概率等特殊情形，而且适用于更广泛的其他情形.

根据上述公理，不难推导出概率的一些基本性质：

性质 1
$$P(\varnothing) = 0\,. \tag{1.8}$$

证　由于样本空间 $\Omega = \Omega + \varnothing + \cdots$，依据公理 3，可得
$$P(\Omega) = P(\Omega + \varnothing + \cdots) = P(\Omega) + P(\varnothing) + \cdots\,,$$
因此
$$P(\varnothing) = 0\,.$$

性质 2　设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容的，则
$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)\,. \tag{1.9}$$

证　$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \varnothing + \cdots)$，

由公理 3 和性质 1 得
$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)\,. \end{aligned}$$

以下性质的证明均留作练习.

性质 3
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)\,. \tag{1.10}$$

性质 4
$$P(A - B) = P(A) - P(AB)\,. \tag{1.11}$$

特别地，若 $A \supseteq B$，则

（1）
$$P(A - B) = P(A) - P(B)\,. \tag{1.12}$$

（2）
$$P(A) \geqslant P(B)\,. \tag{1.13}$$

性质 5
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 . \tag{1.14}$$

性质 6
$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) . \tag{1.15}$$

性质 6 可以推广到任意有限个事件的并集情形.

推论　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为任意 n 个事件，记

$$p_k=\sum_{1 \leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k \leqslant n} P(A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_k}),$$

则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1} p_k . \tag{1.16}$$

如三个事件的情形：

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) .$$

例 1.16　已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(A \cup B)=0.9$．求:（1）$P(AB)$;（2）$P(\overline{A}\overline{B})$.

解　（1）因为 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，所以

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A \cup B)=0.5+0.6-0.9=0.2 .$$

（2）$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A \cup B})=1-P(A \cup B)=1-0.9=0.1$.

例 1.17　把班级内 n 个学生每人准备的一份礼物在班级内随机地分配，设事件 A 表示至少有一个学生拿到自己的礼物，求事件 A 的概率.

解　用 A_i 表示第 i 个人拿到自己的礼物，则有 $A=\bigcup_{i=1}^n A_i$，对于不同的 $i, j, k \cdots$，利用性质 6 的推论，则有

$$\begin{aligned}
P(A_i)&=\frac{(n-1)!}{n!}, \quad & p_1&=\mathrm{C}_n^1 P(A_1)=1, \\
P(A_i A_j)&=\frac{(n-2)!}{n!}, \quad & p_2&=\mathrm{C}_n^2 P(A_1 A_2)=\frac{1}{2!}, \\
P(A_i A_j A_k)&=\frac{(n-3)!}{n!}, \quad & p_3&=\mathrm{C}_n^3 P(A_1 A_2)=\frac{1}{3!}, \\
&\cdots\cdots \\
P(A_1 A_2 \cdots A_n)&=\frac{1}{n!}, \quad & p_n&=\mathrm{C}_n^n \frac{1}{n!}=\frac{1}{n!},
\end{aligned}$$

于是

$$P(A)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1} p_k=\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} .$$

由于 e^{-1} 的泰勒级数

$$\mathrm{e}^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!},$$

从而可以得到，当 n 很大时，有

$$P(A) \approx 1 - \mathrm{e}^{-1},$$

这个值大约为 0.63. 有意思的是，随着 n 的增长，这个概率没有趋于 0 或 1. 或许可以这样理解：我们把一个人拿到自己的礼物看作一个配对，随着 n 的增加，理论上可能配对成功的人数增加了，但是每个人拿到自己礼物的概率降低了，这样两种相互制衡的因素相互抵消，最终使概率接近 $1 - \mathrm{e}^{-1}$.

1.6 条件概率和乘法公式

1.6.1 条件概率

当获得试验结果的额外信息时，会影响到对不确定性的判断. 这些新的信息既可能增强原有判断，也可能对原有判断产生怀疑. 条件概率要解决的是如何根据新观察到的信息，调整我们原有的判断. 比如，事件 A 发生的概率为 $P(A)$，如果获知另一个事件 B 发生了，这时就要对事件 A 发生的可能性大小重新度量. 此时的概率就是条件概率，记作 $P(A|B)$，表示在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率. 先来看一个例子.

例 1.18　已知甲班共有学生 40 人，其中有 15 名女生；乙班共有学生 35 人，其中有 20 名女生. 现在从两个班总共 75 人中随机抽取 1 人，求：

(1) 这个人是甲班学生的概率；

(2) 这个人是女生的概率；

(3) 这个人是甲班女生的概率；

(4) 如果已知这个人是女生，那么她属于甲班学生的概率.

解　设事件 A 表示“这个人是甲班学生”，事件 B 表示“这个人是女生”，则有

(1) $P(A) = \dfrac{40}{75}$；

(2) $P(B) = \dfrac{35}{75}$；

(3) $P(AB) = \dfrac{15}{75}$；

(4) $P(A|B) = \dfrac{15}{35}$.

可见，$P(A|B) \neq P(A)$；同时，不难验证

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{15}{75}}{\frac{35}{75}}=\frac{15}{35}.$$

下面给出条件概率的定义.

定义 1.6 一般而言，若 $P(B)>0$，则把事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率称为条件概率，记作 $P(A|B)$，且有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.17}$$

对式(1.17)可以这样理解：在事件 B 发生的条件下，样本空间已不再是 Ω，而是缩减为 ΩB（Ω 的子集 B）；这时，事件 A 发生显然就是 A 与 B 同时发生（AB 发生），所以 $P(A|B)$ 与 $P(AB)$ 成正比，且比较系数为 $\frac{1}{P(B)}$，这是因为对于新的样本空间 ΩB 应有 $P(\Omega B|B)=1$.

条件概率也是概率的一种，并具有概率的一切性质. 例如，条件概率满足概率的三条基本性质：

(1) 非负性：$P(A|B)\geqslant 0$； (1.18)

(2) 规范性：$P(\Omega|B)=1$； (1.19)

(3) 可加性：设 n 个事件 $A_1,A_2\cdots,A_n,\cdots$ 是两两互不相容的，则有

$$P[(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)+\cdots+P(A_n|B)+\cdots. \tag{1.20}$$

由上述性质，很容易推出以下性质：

(1) $\mathrm{P}(\bar{A}|B)=1-P(A|B)$. (1.21)

(2) $P[(A-C)|B]=P(A|B)-P(C|B)$. (1.22)

特别地，若 $A\supseteq C$，则

$$P[(A-C)|B]=P(A|B)-P(C|B). \tag{1.23}$$

(3) $P[(A\cup C)|B]=P(A|B)+P(C|B)-P(AC|B)$. (1.24)

例 1.19 设在 10 个同一型号的元件中有 7 个一等品，从这些元件中不放回地连续取两次，每次取一个元件，求在第一次取得一等品的条件下，第二次也取得一等品的概率.

解 设 A_i 表示“第 i 次取得一等品”$(i=1,2)$，则因为第一次取出 1 个一等品后，剩下的 9 个元件中还有 6 个一等品，所以所求概率为

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{\frac{7\times 6}{10\times 9}}{\frac{7}{10}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

我们还可以用缩减后的样本空间计算概率．先算出事件 A_1 的样本点数为 $7\times9=63$，事件 A_1A_2 的样本点数为 $7\times6=42$，从而得 $P(A_2\,|\,A_1)=\dfrac{42}{63}=\dfrac{2}{3}$．

此外，我们还可以根据直观解释计算条件概率．在本题中，第一次抽到 1 个一等品后，还有 9 个元件，其中有 6 件一等品，因此可以直接得到 $P(A_2\,|\,A_1)=\dfrac{6}{9}$．

例 1.20 邻居家有两个孩子，我们来探讨以下两个概率：

(1) 其中一个是男孩，求另一个也是男孩的概率；

(2) 已知老大是男孩，求老二也是男孩的概率．

解 (1) 设 A 表示一个是男孩，B 表示另一个是男孩．显然，样本空间有四个基本结果，即

$$\Omega=\{(\text{男},\text{女}),(\text{男},\text{男}),(\text{女},\text{女}),(\text{女},\text{男})\}.$$

事件 A 由其中的三个结果（男，女）、（男，男）、（女，男）组成．因此

$$P(A)=\frac{3}{4}.$$

事件 AB 只包含一个结果：（男，男）．故

$$P(AB)=\frac{1}{4}.$$

根据式 (1.17)，有

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}.$$

我们也可以用缩减后的样本空间简化计算 $P(B\,|\,A)$：不必计算 $P(A)$ 和 $P(AB)$，直接计算 AB 和 A 中的基本结果的个数，相比即得 $\dfrac{1}{3}$．

(2) 设 C 表示“老大是男孩”，D 表示“老二是男孩”．显然有

$$P(D\,|\,C)=\frac{1}{2}.$$

这两个问题的结果不一样，有些违反我们的直觉．两个问题之间的差异在于问题 (1) 没有指定老大是男孩还是老二是男孩，而问题 (2) 是指定了老大是男孩．表述上的些许差别，导致概率完全不一样．概率中有很多类似违背直觉的问题，解决的办法就是要仔细分析问题，不要完全相信自己的直觉，通过动笔计算，也许很容易得出结论．

1.6.2 乘法公式

由条件概率公式可以得到下列公式：

设 A,B 为两个随机事件，若 $P(B)>0$，则事件 A 与 B 的积的概率为

$$P(AB)=P(B)P(A\,|\,B);\tag{1.25}$$

或者，若 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A). \tag{1.26}$$

式（1.25）和式（1.26）都称为概率乘法公式.

概率乘法公式还可以推广到更多个事件的情形：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个随机事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1.27}$$

例 1.21　设在 10 个同一型号的元件中有 7 个一等品，从这些元件中不放回地连续取三次，每次取一个元件，求：

（1）三次抽取都取得一等品的概率；

（2）三次抽取中至少有一次取得一等品的概率.

解　设 A_i 表示“第 i 次取得一等品”$(i=1,2,3)$，则按概率乘法公式得：

（1）$$\begin{aligned}P(A_1A_2A_3)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\\&=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\approx 0.292.\end{aligned}$$

（2）$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})\\&=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})\\&=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})\\&=1-\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\approx 0.992.\end{aligned}$$

与概率加法公式类似，对于复杂事件的概率计算，我们可以将其分解为简单随机事件的乘积，然后利用乘法公式计算．当然在这种情况下，对应的条件公式便于计算.

1.7　全概率公式与贝叶斯公式

条件概率公式经过变形就是乘法公式．基于条件概率，我们还可以得到概率论中两个重要定理，即全概率公式和贝叶斯公式.

1.7.1　全概率公式

定义 1.7　若事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 n 个两两互不相容的事件，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega,P(B_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一个完备事件组.

从直观的角度看，完备事件组就是对样本空间的一个划分，且划分的各部分不相交．特别值得一提的是，容易验证事件 B 和 $\overline{B}$ 构成一个完备事件组.

在此基础上，我们有下面的定理：

定理 1.1 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一个完备事件组，且 $P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$．则对于任一随机事件 A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i), \tag{1.28}$$

该式称为全概率公式．

证

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\Omega)=P\left[A\left(\sum_{i=1}^{n}B_i\right)\right]\\&=P\left[\sum_{i=1}^{n}(AB_i)\right]=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).\end{aligned}$$

全概率公式的实际意义在于，若导致事件 A 发生有多个原因或多个路径，且事件 B_i 为事件 A 发生的第 i 种原因或路径，则 $P(A)$ 是条件概率 $P(A\mid B_1),P(A\mid B_2),\cdots,P(A\mid B_n)$ 的加权平均值，其中对应的权重分别为 $P(B_1),P(B_2),\cdots,P(B_n)$．

例 1.22 某工厂有（1）、（2）、（3）三条生产线生产同一种产品，已知各条生产线的产量分别占该厂总产量的 25%,35%,40%；各条生产线的产品的次品率分别是 5%,4%,2%．将该工厂所有产品混合投放市场，某消费者购买该工厂的一件产品，求这件产品是次品的概率．

解 设事件 A 表示“消费者购得一件次品”，事件 B_i 表示“这件产品是第 i 条生产线的产品”$(i=1,2,3)$．显然，事件 B_1,B_2,B_3 构成一个完备事件组．根据已知条件可得

$$P(B_1)=0.25, P(B_2=0.35, P(B_3)=0.40;$$
$$P(A\mid B_1)=0.05, P(A\mid B_2)=0.04, P(A\mid B_3)=0.02.$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)\\&=0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.40\times0.02=0.034\,5.\end{aligned}$$

例 1.23 设一批产品共 N 件，其中有 M 件次品．每次从这批产品中任取 1 件产品，取出后不再放回，求第 2 次取出的产品是次品的概率．

这个问题前文已经讨论过一般情况，这里从条件概率的角度进行讨论．

解 设事件 B 表示“第一次取出的是次品”，则 $\overline{B}$ 表示“第一次取出的不是次品”，显然 B 和 $\overline{B}$ 构成一个完备事件组．

设事件 A 表示“第二次取出的是次品”，那么

$$P(B)=\frac{M}{N},P(\overline{B})=\frac{N-M}{N};$$

$$P(A\mid B)=\frac{M-1}{N-1},P(A\mid \overline{B})=\frac{M}{N-1}.$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})\\&=\frac{M}{N}\times\frac{M-1}{N-1}+\frac{N-M}{N}\times\frac{M}{N-1}\\&=\frac{M}{N}.\end{aligned}$$

由类似方法，我们可以讨论第三次、第四次抽取次品的概率情况.

例 1.24　对一些敏感问题的调查，被调查者往往不愿如实回答. 例如，调查某个学院大四学生期末考试是否有作弊行为，为了得到真实的作弊比例 p，调查人员会设计一个随机装置，如在一个盒子里放入比例分别为 p_0 和 $1-p_0$ 的红球和白球. 在他人看不到的情况下，被调查者从盒子中随机抽取一个球，如果抽到的是红球，就回答问题(1)；如果抽到的是白球，就回答问题(2).

问题(1)：我有作弊行为；

问题(2)：我没有作弊行为.

除了被调查者外没有人知道他回答的是哪个问题，且这两个问题的回答只有“是”或者“否”. 如果回答“是”的比例为 q，求 p 的值.

解　用 B 表示“回答是”，A 表示“回答问题(1)”. 根据题设有

$$P(A)=p_0,P(\overline{A})=1-p_0.$$

$$P(B\mid A)=p,P(B\mid \overline{A})=1-p.$$

利用全概率公式有

$$\begin{aligned}q=P(B)&=P(A)\times P(B\mid A)+P(\overline{A})\times P(B\mid \overline{A})\\&=p_0\times p+(1-p_0)\times(1-p).\end{aligned}$$

解得

$$p=\frac{q+p_0-1}{2p_0-1}.$$

由上式可知，$p_0\neq\frac{1}{2}$. 即红球和白球的比例不能是 1∶1. 在实际问题中 q 是未知的，则可用“回答是”的答案数 k 与总调查人数 n 的比 $\hat{q}$ 来估计 q，即 $\hat{q}=\frac{k}{n}$.

例如，上述问题中如果调查了 200 个学生，其中有 60 个回答“是”，且红球和白

球的比例分别是 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{1}{4}$．则

$$p_0=\frac{3}{4},\hat{q}=\frac{60}{200}=\frac{3}{10},$$

$$\hat{p}=\frac{\frac{3}{10}+\frac{3}{4}-1}{2\times\frac{3}{4}-1}=10\%.$$

1.7.2　贝叶斯公式

贝叶斯

在条件概率和全概率公式的基础上，我们可以推导下面的定理.

定理 1.2　设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 构成一完备事件组，且 $P(B_i)>0$，其中 $i=1,2,\cdots,n$．对于任意的事件 A，若 $P(A)>0$，则有

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},j=1,2,\cdots,n. \tag{1.29}$$

该式称为贝叶斯公式.

证　根据条件概率的定义及乘法公式有

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(B_jA)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{P(A)},$$

对 $P(A)$ 运用全概率公式并代入公式，即得

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}.$$

贝叶斯公式来源于英国哲学家托马斯·贝叶斯（Thomas Bayes）．全概率公式如果形象地看作是由“原因”到“结果”的推理，贝叶斯公式就是反过来，是由“结果”到“原因”的推理，因此，贝叶斯公式又称作“逆概率公式”．具体来讲，如果事件 A 的发生由许多原因导致，设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是造成事件 A 发生的原因，$P(A\mid B_j)$ 表示“原因” B_j 发生的条件下产生结果 A 的概率．而贝叶斯公式推出的是“结果”A 的发生，是由“原因” B_j 导致的概率 $P(B_j\mid A)$，由于它是在试验后确定的，称为后验概率，而原来的 $P(B_j)$ 称为先验概率.

贝叶斯公式看起来平淡无奇，不过是条件概率与全概率公式的简单推论．其之所以著名，在于其现实乃至哲理意义的解释上：先验概率 $P(B_1),P(B_2),\cdots,P(B_n)$ 是在没有进一步的信息情况下，人们对事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 发生可能性大小的认识，现在有了新的信息，即事件 A 发生了，此时，人们对 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 发生的可能性大小有了新的认识．贝叶斯公

式从数量上刻画这种认知的变化，此时概率变为后验概率 $P(B_1 \mid A), P(B_2 \mid A), \cdots, P(B_n \mid A)$.

例 1.25　假设有一枚均匀的硬币和一枚以概率 $\frac{3}{4}$ 正面朝上的不均匀硬币．随机选取一枚硬币连掷 3 次，结果发现 3 次都正面朝上．据此信息，我们来推断选取的硬币是均匀硬币的概率有多大？

解　设 A 表示“连掷 3 次硬币都正面朝上”，B 表示“选取的硬币是均匀的”，则

$$P(B)=\frac{1}{2}, P(\bar{B})=\frac{1}{2}.$$

$$P(A \mid B)=\frac{1}{8}, P(A \mid \bar{B})=\frac{27}{64}.$$

根据贝叶斯公式

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B)+P(\bar{B})P(A \mid \bar{B})} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{27}{64}} \approx 0.23. \end{aligned}$$

在没有任何信息情况下，一枚硬币是均匀的还是不均匀的概率均视为 $\frac{1}{2}$．而有了信息“连掷 3 次，发现 3 次都正面朝上”，硬币是不均匀的可能性得到明显增加．

例 1.26（肝癌诊断的甲胎蛋白检验法）　使用甲胎蛋白普查肝癌过程中，C 表示“被检验者患肝癌”，A 表示“甲胎蛋白检验结果为阳性”，则 $\bar{C}$ 表示“被检验者未患肝癌”，$\bar{A}$ 表示“甲胎蛋白检验结果为阴性”．由过去的资料知

$$P(A \mid C)=0.95, P(\bar{A} \mid \bar{C})=0.90,$$

又已知某地居民的肝癌发病率为 $P(C)=0.000\,4$，普查中若有一人被此检验法诊断为阳性反应，求此人真正患有肝癌的概率 $P(C|A)$.

解　这是已知“结果”(阳性反应)，推断“原因”(患肝癌)的问题，用贝叶斯公式，有

$$\begin{aligned} P(C \mid A) &= \frac{P(C)P(A \mid C)}{P(C)P(A \mid C)+P(\bar{C})P(\mathrm{A} \mid \bar{C})} \\ &= \frac{0.000\,4\times 0.95}{0.000\,4\times 0.95+(1-0.000\,4)\times(1-0.90)} \\ &\approx 0.003\,79. \end{aligned}$$

由此可以看到，当甲胎蛋白检验结果为阳性时，患有肝癌的概率扩大了近 10 倍．尽管如此，真正患有肝癌的可能性还是较小的，出现这样的结果是由于肝癌发病率比较低．所以，检验为阳性的人也不必过于紧张，同时也说明一种检测指标对疾病检测

结果的说明往往不够有力．因此，当怀疑患者患有某种疾病后，医院要对患者做多种指标的交叉检测，然后才能做出是否患有某种疾病的结论．

1.8 事件的独立性

1.8.1 两个事件的独立性

前文讲过条件概率，$P(A|B)$ 是指在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率．这个概率描述了当事件 B 发生后，给事件 A 的发生带来了新的信息，此时要重新对事件 A 发生的可能性做出判断．但是有一种情况，事件 B 的发生没有给事件 A 的发生带来任何影响，即

$$P(A|B)=P(A).$$

我们称这种特性为 B 对 A 独立．由 $P(A|B)=P(A)$，易得

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

我们用该式定义两个事件的独立性．

定义 1.8 若两事件 A,B 满足

$$P(AB)=P(A)P(B), \tag{1.30}$$

则称 A 与 B 相互独立．

这里没有用更为直观的 $P(A|B)=P(A)$ 定义独立性，原因在于该式需要 $P(B)>0$，即把概率为 0 的事件排除在独立性之外了．同时，采用式（1.30）来定义，也体现了 A 和 B 地位的对称．因此，A 独立于 B 也意味着 B 独立于 A，即 A 与 B 相互独立．

很明显，任意随机事件与不可能事件、必然事件都是独立的．又当 $P(B)>0$，A 与 B 相互独立等价于 $P(A|B)=P(A)$．

事件的独立性，通俗地讲，就是事件之间没有任何关联，相互之间没有任何影响．例如，甲、乙两人同时射击一目标，因为甲、乙两人的射击一般来讲是互不影响的，所以“甲命中目标”与“乙命中目标”两事件应理解为相互独立．又如，抛掷一枚质量均匀的硬币，无论第一次是“正面向上”还是“反面向上”，“第二次正面向上”的概率都为 $\frac{1}{2}$．即便前四次都是正面向上，对下一次正面向上发生的可能性也没有影响，概率仍然是 $\frac{1}{2}$．

在实际问题中，事件的独立性往往凭经验或借助直观的方法进行判断，而不需要通过定义验证．但对两个有关联的事件，即不是普通意义上的“互不影响”时的两个事件，直观上不容易判断它们是否相互独立，对这类事件的独立性判断，需要依靠统计资料进行分析，根据定义式来判断．

例 1.27　投掷两颗均匀的骰子，A 表示“点数和为 6”，B 表示“第一个骰子是 4 点”，判断 A 与 B 是否相互独立．

解　显然 AB 表示“第一个骰子是 4 点，第二个骰子是 2 点”，且有

$$P(AB)=\frac{1}{36},P(A)=\frac{5}{36},P(B)=\frac{1}{6};$$

很明显，$P(AB)\neq P(A)P(B)$，所以 A 与 B 不相互独立．

例 1.28　投掷两颗均匀的骰子，A 表示“点数和为 7”，B 表示“第一个骰子是 4 点”，判断 A 与 B 是否相互独立．

解　显然，AB 表示“第一个骰子是 4 点，第二个骰子是 3 点”，且有

$$P(AB)=\frac{1}{36},P(A)=\frac{1}{6},P(B)=\frac{1}{6};$$

很明显，$P(AB)=P(A)P(B)$，所以 A 与 B 相互独立．

以上两例的直观解释，留给读者自行思考．

关于两个事件的独立性，有下列的重要定理．

定理 1.3　若事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立．

证　因为 $A\overline{B}=A-AB$，由概率公式和独立性，有

$$\begin{aligned}P(A\overline{B})&=P(A)-P(AB)\\&=P(A)-P(A)P(B)\\&=P(A)[1-P(B)]\\&=P(A)P(\overline{B}).\end{aligned}$$

这表明 A 与 $\overline{B}$ 相互独立．利用 A 与 $\overline{B}$ 的对称性，可见 $\overline{A}$ 与 B 也相互独立．既然由 A 与 B 相互独立推导出 A 与 $\overline{B}$ 相互独立，同样由 $\overline{A}$ 与 B 相互独立也可推导出 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立．

例 1.29　有两门高射炮同时向一架敌机开炮，已知甲击中敌机的概率为 0.6，乙击中敌机的概率为 0.8，求敌机被击中的概率．

解　设 A 表示“甲击中敌机”，B 表示“乙击中敌机”，C 表示“敌机被击中”，根据题意，可以认为 A 与 B 独立，且 $C=A\cup B$．由于采用的概率公式不同，就产生下列几种解法．

解法 1　将 $A\cup B$ 分解为三个两两不相容的事件 AB、$A\overline{B}$、$\overline{A}B$ 之和，应用概率的

有限可加性，有

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A\cup B)\\&=P(AB\cup A\bar{B}\cup\bar{A}B)\\&=P(AB)+P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)\\&=P(A)P(B)+P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A}P(B)\\&=0.6\times0.8+0.6\times(1-0.8)\ +(1-0.6)\times0.8\\&=0.92.\end{aligned}$$

解法 2 由概率的一般加法公式以及 A 与 B 的独立性，得

$$\begin{aligned}P(C&=P(A\cup B)\\&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.6+0.8-0.6\times0.8=0.92.\end{aligned}$$

解法 3 根据对偶公式得

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A\cup B)\\&=1-P(\overline{A\cup B})\\&=1-P\left(\overline{AB}\right)\\&=1-P(\bar{A})P(\bar{B})\\&=1-(1-0.6)\ (1-0.8)\\&=0.92.\end{aligned}$$

比较上述三种解法，以解法 3 最为简便，它的特点是把求事件和的概率转化为求事件交的概率，这对独立事件和的概率计算特别有效.

前文讨论过事件的互不相容，那么互不相容的事件是否也一定是独立的呢？恰恰相反，事实上，若事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)>0,P(B)>0$，则 A 与 B 一定是不独立的. 因为，A 与 B 互不相容，则有 $P(AB)=0\neq P(A)P(B)$. 例如，把一枚质量均匀的硬币抛掷一次，A 表示“正面向上”，B 表示“反面向上”，显然，A 与 B 互不相容，同时 A 与 B 是不独立的.

1.8.2 一组事件的独立性

关于事件的独立性可推广到多个事件的情况.

定义 1.9 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，如果对其中任意 k 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$ $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \tag{1.31}$$

成立，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

式（1.31）实际上包含了下列各等式．

$$\begin{cases} P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2) \\ \cdots\cdots \\ P(A_{n-1}A_n)=P(A_{n-1})P(A_n) \\ P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ \cdots\cdots \\ P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)=P(A_{n-2})P(A_{n-1})P(A_n) \\ \cdots\cdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \end{cases}$$

从组合数的角度来看，这些等式的总数为 $\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n-1-n$ 个等式．

由定义 1.9 可知，如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 m 个 $(m<k)$ 事件也相互独立．

在多个事件相互独立的概念中，应特别注意，由两两相互独立性不能导出多个事件的“总体独立性”．

我们很容易把定理 1.4 推广到多个相互独立事件中．

定理 1.4　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $\overline{A_{i_1}},\overline{A_{i_2}},\cdots\overline{A_{i_m}},A_{i_{m+1}},\cdots,A_{i_n}$ 也相互独立，其中 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的任一排列，$1\leqslant m\leqslant n$．（证明略）

例 1.30　每次燃放烟花爆竹发生火警的概率为 0.000 01．假设某城市有 100 万人次放烟花，求该城市发生火警的概率．

解　设 A_i 表示“第 i 次没有发生火警”，B 表示“某城市没有发生火警”．则有

$$\begin{aligned} P(B)&=P(A_1A_2\cdots A_{1\,000\,000}) \\ &=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_{1\,000\,000}) \\ &=(1-0.000\,01)^{1\,000\,000} \\ &\approx 4.54\times 10^{-5}. \end{aligned}$$

从而

$$P(\overline{B})=1-P(B)\approx 1-4.54\times 10^{-5}\approx 1\,.$$

由此可见，燃放一次烟花爆竹发生火警的可能性很小，然而大量燃放时发生火警的可能性显著增加．这说明小概率事件尽管在一次试验中不大可能发生，然而在大量试验几乎必然发生．因此日常生活中不能轻视小概率事件．

1.8.3　二项概率公式

定义 1.10　将随机试验 E 重复进行 n 次，若各次试验的结果互不影响，即每次试验结果出现的概率都不依赖于其他各次试验的结果，那么这样的试验称为 n 重独立试验.

特别地，若在 n 重独立试验中，每次试验的结果只有两个：A 与 $\overline{A}$，且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=q(0<p<1,q=1-p)$．则这样的试验称为 n 重伯努利试验.

对于 n 重伯努利试验，我们需要计算事件 A 在 n 次独立试验中恰好发生 k 次的概率.

定理 1.5　在伯努利试验中，设事件 A 在各次试验中发生的概率 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=q(0<p<1,q=1-p)$．则在 n 次独立试验中恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n). \tag{1.32}$$

证　设事件 A_i 表示“事件 A 在第 i 次试验中发生”，则有

$$P(A_i)=p,P(\overline{A_i})=1-p=q(i=1,2,\cdots,n).$$

因为各次试验是相互独立的，所以事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的．事件 $A_{i_1}\cdots A_{i_k}\overline{A_{i_{k+1}}}\cdots\overline{A_{i_n}}$ 表示“n 次试验中，事件 A 在指定的 k 次试验中发生而在其余 $n-k$ 次试验中不发生”，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 为 $1,2,\cdots,n$ 中的 k 个数，$i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_n$ 是剩下的 $n-k$ 个数．事件 $A_{i_1}\cdots A_{i_k}\overline{A_{i_{k+1}}}\cdots\overline{A_{i_n}}$ 的概率为

$$\begin{aligned}P(A_{i_1}\cdots A_{i_k}\overline{A_{i_{k+1}}}\cdots\overline{A_{i_n}})&=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})P(\overline{A_{i_{k+1}}})\cdots P(\overline{A_{i_n}})\\&=\underbrace{p\cdots p}_{k\text{个}}\cdot\underbrace{q\cdots q}_{(n-k)\text{个}}=p^k q^{n-k}.\end{aligned}$$

由于事件 A 在 n 次试验中恰好发生 k 次共有 C_n^k 种不同的方式，每一种方式对应一个事件，易知这 C_n^k 个事件是互不相容的，所以根据概率的可加性即得

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

由于 $P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$ 的右端正好是 $(p+q)^n$ 的二项展开式中的第 $k+1$ 项，所以通常把这个公式称为二项概率公式.

例 1.31　把一枚质量均匀的硬币连续抛掷 10 次，求正面向上出现次数是 4 至 6 次的概率.

解　抛掷一次硬币就是一次试验，每次试验结果只有两种：正面向上和反面向上．因为各次试验相互独立，硬币抛掷 10 次就构成了 10 次独立试验．于是，我们可以用二项概率公式计算，得

$$\mathrm{C}_{10}^4\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\mathrm{C}_{10}^5\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\mathrm{C}_{10}^6\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\approx 0.656\,3.$$

由此可见，当抛掷 10 次硬币时，正面向上的频率介于 0.4 至 0.6 之间的概率不到七成．小学数学中，为了让小学生体会正面向上的概率为 0.5，常常让学生做抛硬币试验．但是，如果试验次数比较少，频率很有可能偏离概率比较大，因为试验次数越少，极端情况就越有可能发生．因此，在教学中，如果把硬币抛掷 100 次，正面向上次数介于 40 至 60 之间的概率约为 0.954 4，此时频率与概率的偏差相对较小．

习题 1

1. 某袋中装有编号 1,2,3,4,5 的球各一只，从中先后取出两只球，试写出该试验的样本空间，事件 A 表示“取出的球中最大号码为 4”，写出 A 所含的样本点．

2. 某厂要在职工中挑选一名厂长，记 A 表示“被选职工是大学生”，B 表示“被选职工是党员”，C 表示“被选职工是年轻人”，D 表示“被选职工是专业技术人员”．

（1）事件 $ABCD$ 及 $A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ 是什么意思？

（2）在什么情况下关系式 $C\subset D$ 成立？

3. 一个学生做了 n 道习题，以 A_i 表示他第 i 道题做对了这一事件 $(1\leqslant i\leqslant n)$，试用 A_i 表示下列事件．

（1）没有一道习题做错；

（2）至少有一道习题做错；

（3）恰有一道习题做错；

（4）至少有两道习题做正确．

4. 在一个元件盒中装有 50 块固体组件，其中有 25 块一等品、15 块二等品及 10 块次品，从中任取 10 块，问下列事件的概率有多大？

（1）恰有两件一等品，两件二等品；

（2）恰有两件一等品；

（3）没有次品．

5. 双色球彩票是从 1～33 中选 6+1．方案是从 1～33 号红球中摇出 6 个基本号码，再从 1～16 号绿球中摇出 1 个特别号码构成一注．若所选的 6 个基本号码和特别号码与摇出的 6 个基本号码和特别号码完全一致，则获得一等奖；若 6 个基本号码相同，特别号码不相同，则获得二等奖；若 6 个基本号码中有 5 个相同，同时特别号码也相同，则可获得三等奖．若获得高级奖，则不再获得低级奖，求获得一、二等奖的概率各是多少？

6. 分发一副 52 张的扑克牌（去掉大、小王）时，发第 14 张牌是 A 的概率是多少？第一个 A 正好出现在第 14 张的概率是多少？

7. 将 10 本书任意放在书架上，求其中指定的 3 本书靠在一起的概率.

8. 甲袋中有 3 只白球、7 只红球、15 只黑球；乙袋中有 10 只白球、6 只红球、9 只黑球. 现从两袋中各取一球，求两球颜色相同的概率.

9. 9 名学生中有 3 名女生，随机地分为甲、乙、丙 3 个组，且每组 3 人. 求下列事件的概率.

(1) 每个组有一名女生；

(2) 女生在同一组.

10. 从一副 52 张的扑克牌（去掉大、小王）中随机抽取 5 张，若两张牌的点数一样称为一个“对子”，求下列事件的概率.

(1) A 为“恰有 2 张 K”；

(2) B 为“恰有一个对子”.

11. 有 6 个人在一座 10 层大楼的底层进入电梯，设他们中的每一个人自第二层开始在每一层离开是等可能的，求 6 个人在不同层次离开的概率.

12. 同时投掷五个骰子，求下列事件的概率：

(1) 点数各不相同；

(2) 至少出现两个 6 点；

(3) 恰有两个点数相同；

(4) 某两个点数相同，另三个同是另一个点数；

(5) 点数总和等于 10.

13. 已知点 B 任意地落在长度为 l 的线段 OA 上，求线段 OB 和 BA 中较短的线段大于 $\frac{1}{3}$ 的概率.

14. 某公共汽车站每隔 10 分钟就有一辆汽车停靠，一位乘客到达汽车站的时间是任意的，求他等候时间不超过 3 分钟的概率.

15. 两艘轮船都要停靠同一泊位，它们可能在一昼夜的任意时间到达，设两船停靠泊位的时间分别需要 1 小时与 2 小时，求一艘轮船停靠泊位时，需要等待空出码头的概率.

16. 在 $[0,1]$ 内随机取两个数，求两数之和不超过 1 且积不小于 0.09 的概率.

17. 设 $P(A)=0.5, P(B)=0.7, P(A\cup B)=0.9$，试计算 $P(A-B)$ 和 $P(\bar{A}\cup\bar{B})$ 的值.

18. 设有事件 A,B 和 C. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，且 $P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A,B,C 中至少有一个发生的概率.

19. 设事件 A 与 B 互不相容，$P(A)=0.4, P(B)=0.3$，求 $P(\overline{A}\overline{B})$ 和 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

20. 设 $P(A)>0, P(B)>0$，将下列四个数

$$P(A), P(AB), P(A)+P(B), P(A\cup B)$$

按由小到大的顺序排列，用符号 $\leqslant$ 连接，并指出在什么情况下可能有等式成立.

21. 在一个住宅小区，有 60% 的住户订阅了当地的晨报，有 80% 的住户订阅了当地的晚报，有 50% 的住户既订阅了晨报又订阅了晚报. 从该小区随机选取一住户，求：

(1) 选取的住户至少订阅了其中一种报纸的概率；

(2) 选取的住户只订阅其中的一种报纸的概率；

(3) 选取的住户没有订阅这两种报纸的概率.

22. 一个班有战士 10 人，各人有一支属于自己同种型号的冲锋枪，若夜间紧急集合时每人从枪架上任意抓取一支冲锋枪，求至少有一人拿对自己的冲锋枪的概率.

23. 盒子中有 a 个黑球，b 个白球. 每次从中任取一个，取后放回，并再加入 c 个和所取球颜色相同的球. 求：

(1) 第一次取到黑球的概率；

(2) 第二次取到白球的概率；

(3) 第三次取到黑球的概率.

24. 一辆飞机场的交通车载有 25 名乘客，途经 9 个站，每名乘客都等可能在 9 个站中任意一站下车，交通车只有在乘客下车时才停车，求下列事件的概率.

(1) 交通车在第 i 站停车；

(2) 交通车在第 i 站和第 j 站至少有一站停车；

(3) 交通车在第 i 站和第 j 站都停车.

25. 求任取 13 张纸牌中包含同一花色的 A 与 K 的概率.

26. 某班级 n 个学生参加口试，考签共 N 张 $(N\leqslant n)$，每人抽过考签后立刻放回，求在考试结束之后，至少有一张考签没有被抽到的概率.

27. 考虑三个箱子，甲箱中有 2 个白球与 4 个红球，乙箱中有 8 个白球与 4 个红球，丙箱中有 1 个白球与 3 个红球，如果从每箱各取出一球，已知这 3 个球中正好有 2 个白球，问从甲箱中取出的是白球的概率是多少？

28. 某射击小组共有 20 名射手，其中一级射手 4 人，二级射手 8 人，三级射手 8 人；一、二、三级射手能通过选拔进入比赛的概率分别为 0.9,0.7,0.4. 求任选一名射手能通过选拔进入比赛的概率.

29. 有 A,B 两人，按下列规则掷骰子，如果出现 1 点，下一次还由同一人继续掷，如果出现其他点数，下一次由另一人掷. 第一次是 A 掷，求第 n（$n\geqslant 2$）次是 A 掷的概率.

30. 在数字通信中，信号是由数字 0 和 1 的长序列组成的．由于随机干扰，发送的信号 0 或 1 各有可能错误接收为 1 或 0．现假定发送信号为 0 和 1 的概率均为 1/2；又已知发送 0 时，接收为 0 和 1 的概率分别为 0.7 和 0.3；发送信号为 1 时，接收为 1 和 0 的概率分别为 0.90 和 0.1．求收到信号 0 时，发出的信号是 0（没有错误接收）的概率．

31. 盒中放有 12 个乒乓球，其中有 9 个是新的，第一次比赛时从中任取 3 个来用，比赛后仍放回盒中，第二次比赛时再从盒中任取 3 个．

（1）求第二次取出的球都是新球的概率；

（2）已知第二次取出的球都是新球，求第一次取到都是新球的概率．

32. 假设某项艾滋病血液检测的灵敏度（真患病的人检查为阳性）为 95%，而对没有患病的人这种检测的准确率为 99%．为能有效地控制、减缓艾滋病的传播，几年前有人建议对申请新婚登记的新婚夫妇进行这种血液检查．该计划提出后，征询专家意见，得到专家的强烈反对，计划没有被通过．请从概率的角度说明这个计划没有实施的理由．

33.（续上题）假如上题的普查对象为艾滋病高危人群，如每 10 个人中就有一个人带有艾滋病病毒，那么普查计划有实施的必要吗？

34. 三个解题能力一般的人单独解决问题的概率分别为 0.45,0.55,0.6，现在三个人各自独立地解决某一个难题，求这个难题被解决的概率．

35. 有 3 张形状完全相同但所涂颜色不同的卡片，第一张两面全是红色，第二张两面全是黑色，第三张一面是红色一面是黑色．现将这 3 张卡片充分混合后随机地取出一张，先发现一面是红色的，求另一面是黑色的概率．

36. 证明：若 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$，则 A 与 B 相互独立．

37. 设 A,B 相互独立，$P(A\cup B)=0.7, P(A)=0.4$，求 $P(B)$．

38. 甲、乙、丙三人向同一飞机射击，设击中的概率分别是 0.4,0.5,0.8．如果只有一人击中，则飞机被击落的概率是 0.2；如果有两人击中，则飞机被击落的概率是 0.6；如果三人都击中，则飞机一定被击落．求：

（1）飞机被击落的概率；

（2）已知飞机被击落，恰有两人击中飞机的概率．

39. 一批产品共 5 个，假定每个产品是合格品或次品是等可能的，为检查该批产品的质量，从中任取 2 个，发现都是合格品，试求该批产品中恰有 3 个合格品的概率．

40. 甲、乙两人比赛射击，每射击一次获胜者得 1 分，在一次射击中，甲获胜的概率为 p，乙获胜的概率为 $q(p+q=1)$，射击进行到有一人比对方多 2 分为止，多 2 分者获胜，求各人获胜的概率.

41.（巴拿赫火柴问题）某数学家经常在左边口袋放一盒火柴，在右边口袋也放一盒火柴，当他要用火柴的时候，就随机从一个口袋中取火柴. 假定最初每盒火柴恰巧有 N 根，试求数学家首次摸到空盒时而另一盒子恰好还有 $r(0\leqslant r\leqslant N)$ 根火柴的概率.