《高等数学》参考答案

第一章　练习题和基础训练

练习题 1.1

1.(1) $x^2-2\geqslant 0$，∴ 定义域为 $\{x \mid x\geqslant\sqrt{2}$ 或 $x\leqslant-\sqrt{2}\}$；

(2) 由题意知 $\begin{cases}x+3\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 从而解得 $x\neq 0$ 且 $x\geqslant-3$，

故所求定义域为 $\{x \mid x\geqslant-3$ 且 $x\neq 0\}$；

(3) 由题意知 $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 从而解得 $x\neq 0$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 1$，

故所求定义域为 $\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0\}$；

(4) $\begin{cases}\lg(2x-1)\neq 0,\\ 2x-1>0,\end{cases}$ 解得定义域为 $\left\{x \mid x>\dfrac{1}{2}\text{ 且 } x\neq 1\right\}$；

(5) $\begin{cases}\ln(3x-2)\geqslant 0,\\ 3x-2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln(3x-2)\geqslant\ln 1,\\ 3x-2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-2\geqslant 1,\\ x>\dfrac{2}{3},\end{cases}$ 解得定义域为 $\{x \mid x\geqslant 1\}$；

(6) 由 $y=\arcsin\mu$，$\mu\in[-1,1]$，可知 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$，

故所求定义域为 $\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$.

2.将 $x=0$，$x=-x$ 分别代入原式可得：

$f(0)=4$，$f(-x)=-x^3+2x+4$.

3.将 $x=0$，$x=1$，$x=-2$ 分别代入原式，

可得 $f(0)=1$，$f(1)=\dfrac{1}{3}$，$f(-2)=-\dfrac{1}{3}$.

当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(a)$ 不存在；

当 $a\neq-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(a)=\dfrac{1}{2a+1}$.

4.$f[f(x)]=\dfrac{x}{1-2x}$.

练习题 1.2

1.(1) 偶函数；(2) 偶函数；(3) 奇函数；(4) 奇函数.

2. 此函数关于 $x=\frac{3}{2}$ 对称，任取 $x_1<x_2<\frac{3}{2}$，即 $x_1+x_2<3$，

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-3x_1+2-(x_2^2-3x_2+2)$$
$$=(x_1-x_2)(x_1+x_2-3)>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ 单调递减，同理可得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 单调递增.

3. 由此函数的性质可得 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以此函数无界.

4. (1) $T=2\pi$；

(2) $y=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$，$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

(3) $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

练习题 1.3

1. (1) $\mathbf{R}$； (2) $\begin{cases}\lg x>0,\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lg x>\lg 1,\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1,\\ x>0,\end{cases}$ 故所求定义域为 $\{x\mid x>1\}$.

2. (1) $y=\tan 2x$； (2) $y=\mathrm{e}^{\sin(x^2+1)}$.

3. (1) $y=u^{10}$，$u=3x+2$； (2) $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$；

(3) $y=10^u$，$u=-x$； (4) $y=2^u$，$u=x^2$；

(5) $y=\log_2 u$，$u=x^2+1$； (6) $y=\sin u$，$u=5x$；

(7) $y=\sin u$，$u=x^5$； (8) $y=u^5$，$u=\sin x$；

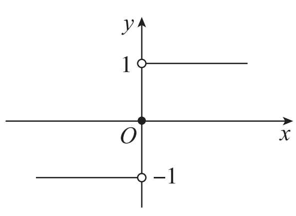
(9) $y=\lg u$，$u=\lg v$，$v=\lg x$； (10) $y=\arcsin u$，$u=\frac{x}{2}$.

4. (1) 由 $y=2x+1$ 可得 $x=\frac{y-1}{2}$，故其反函数为 $y=\frac{x-1}{2}(x\in\mathbf{R})$；

(2) 由 $y=x^3+2$ 可得 $x=\sqrt[3]{y-2}$，故其反函数为 $y=\sqrt[3]{x-2}(x\in\mathbf{R})$.

练习题 1.4

1. 作此函数图像如下：



由此可知此函数定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\{-1,0,1\}$.

2. $\because\left|\frac{1}{2}\right|\leqslant 1$，$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $\because 1<\left|\frac{3}{2}\right|\leqslant 2$，$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right)=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

3. $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\frac{1}{2},\varphi(-3)=0.$

4. $\because 0\leqslant\frac{1}{2}\leqslant 1,\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}.$

当 $0<\frac{1}{t}\leqslant 1$ 时,$f\left(\frac{1}{t}\right)=2\sqrt{\frac{1}{t}}$;

当$\frac{1}{t}>1$ 时,$f\left(\frac{1}{t}\right)=1+\frac{1}{t}.$

此函数定义域为$[0,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$.

5. 由题意可知:$f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$,

令 $x>0$ 时,$-x<0,f(-x)=1-(-x)=1+x=f(x)$;

令 $x<0$ 时,$-x>0,f(-x)=1+(-x)=1-x=f(x)$,

所以当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$f(-x)=f(x)$,

$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数.

6. 设 x 表示新开设的营业点的数目,R 表示该公司每日的总收入,则现有的营业点的数目为 $40+x$,每个营业点的平均日收入为 $10\ 000-200x$,该公司每日总收入为 $R=(10\ 000-200x)(40+x)$.

练习题 1.5

1. t 年后的人口为 $y=10.3(1+2\%)^t$,2000 年底(18 年)的人口为 $y=10.3\times 1.02^{18}=14.71$ 亿.

设人口基数为 p,人口增长率为 r,则 t 年后人口 y 为

$$y=p(1+r\%)^t.$$

2. 设售价上涨 x 元,获得的利润 y 元,由题意知

$$\begin{aligned}y&=(50+x-40)\cdot(50-x)\\&=-(x-20)^2+900(0<x<50,x\in\mathbf{N}^*),\end{aligned}$$

当 $x=20$ 时,$y_{\max}=900$ 元.

基础训练

一、1. B; 2. A; 3. A; 4. C.

二、1. 6; 2. x; 3. x^6+1; 4. $16x+7$; 5. x^2+1; 6. $\frac{1}{1-x}$.

三、1. $x\in[-1,2]$; 2. $x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$; 3. $\{x\mid x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})\}$; 4. $x\in(2,4)$.

四、$f(0)=0,f(-1)=-\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3},f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}.$

五、1. $y=u^3,u=4x+3$;

2. $y=3^u,u=v^2,v=\cos(2x+1)$;

3. $y=u^2,u=\arcsin v,v=\omega^{\frac{1}{2}},\omega=1-x^2$;

4. $y=\ln u, u=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

六、奇函数.

七、1. 单调递减； 2. 单调递减.

八、1. 周期函数 $T=\dfrac{\pi}{2}$； 2. 周期函数 $T=2\pi$.

第二章　练习题和基础训练

练习题 2.1

1. (1) 存在，$a_n=10$，当 $n\to\infty$，$a_n\to 10$；

(2) 存在，$a_n=\dfrac{n+2}{n+1}$，当 $n\to\infty$，$a_n\to 1$；

(3) 存在，$a_n=1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^n$，当 $n\to\infty$，$a_n\to 1$；

(4) 不存在，在奇数项中，当 $n\to\infty$，$a_n\to 0$，
在偶数项中，当 $n\to\infty$，$a_n\to 1$；

(5) 存在，在奇数项中，当 $n\to\infty$，$a_n\to 0$，
在偶数项中，当 $n\to\infty$，$a_n\to 0$.

2. (1) 极限为 0；

(2) 极限为 0；

(3) 极限为 1；

(4) 极限为 1；

(5) 当 n 无限增大时，$1+(-1)^n$ 无休止地反复取 0 和 2 两个数，而不会无限接近于任何一个确定的常数，故该数列当 $n\to\infty$ 时没有极限；

(6) 数列 $\{(-1)^n n\}$ 即为 $-1,2,-3,4,-5,\cdots$，故该数列当 $n\to\infty$ 时没有极限；

(7) 极限为 2.

3. 该数列的奇子数列为 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 没有极限，偶子数列为 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$ 极限为 0，所以该数列的极限不存在.

练习题 2.2

1. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $\varphi(x)=\dfrac{x}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在；

$\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=1$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=1$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$，$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$，∴ $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}$ 中，当 $x\to\infty$，$\dfrac{1}{1+x^2}\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$.

4. 左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，左极限不等于右极限，所以此函数在 $x\to 0$ 时极限不存在.

5. 根据极限四则运算：

$\lim\limits_{x\to 5}(2x+1)=\lim\limits_{x\to 5}2x+\lim\limits_{x\to 5}1=2\times 5+1=11$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.

7. 由题意得 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ 不存在.

8. $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=4$，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=9$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在.

练习题 2.3

1. (1) ×；(2) √；(3) ×；(4) ×.

2. (1) 无穷小量；(2) 无穷大量；(3) 无穷小量；(4) 无穷小量；(5) 无穷大量；(6) 无穷小量.

3. (1) $x\to\infty$ 时，函数是无穷小量；$x\to -8$ 时，函数是无穷大量；

(2) $x\to\infty$ 时，函数是无穷小量；$x\to 0$ 时，函数是无穷大量.

4. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

5. ∞.

6. ∞.

7. ∵ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2}{x^2-2x}=0$，∴ x^3-x^2 比 x^2-2x 高阶无穷小.

练习题 2.4

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=2-0+0=2$；

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{4-2}{4-1}=\dfrac{2}{3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(4x^2-2x+1)}{x(3x+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{1}{2}$；

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h+x)(x+h-x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2x+h)h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=1\times 2=2$；

(7) 0，利用无穷小的运算性质(有界函数与无穷小的乘积为无穷小)；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{7x}=\dfrac{5}{7}$；

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5}=e^{5}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}}=[\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{-x}}]^{-3}=e^{-3}$；

(12)9； (13)∞； (14) $\dfrac{6}{7}$； (15)0.

基础训练

一、1. B； 2. A； 3. C； 4. A.

二、1. -9； 2. 2； 3. 0； 4. $\dfrac{1}{2}$； 5. 0； 6. ∞； 7. -2； 8. 2； 9. 0； 10. 6；

11. $\dfrac{7}{3}$； 12. e^2； 13. e； 14. $e^{-\frac{1}{2}}$.

三、1. (1) ×，如果函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量；

(2) ×，如果函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，对应的函数值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大量；

(3) ×，自变量在同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷小量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量；

(4) ×，自变量在同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量.

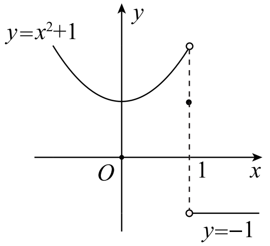
2. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，

∵ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，∴ 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

3. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-1)=-1$，

∵ $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$，∴ 当 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

图像如下：



第三章　练习题和基础训练

练习题 3.1

1. 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2. (1) 无穷间断点；　(2) 可去间断点.

3. (1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{1}{36}$，所以当 $a=\dfrac{1}{36}$ 时函数连续；

   (2) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+x)=a$，$f(0)=a$，

   所以当 $a=1$ 时函数连续.

4. (1) $x=-2$ 为间断点，且为第二类无穷间断点；

   (2) $x=0$ 为间断点，且为第一类可去间断点. 补充定义 $y=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

练习题 3.2

1. (1) 连续区间为 $(-\infty,2)$，$\lim\limits_{x\to -8}f(x)=f(-8)=\lg 10=1$；

   (2) 连续区间为 $[4,6]$，$\lim\limits_{x\to 5}f(x)=f(5)=2$.

2. (1) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$，

   当 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 的极限不存在；

   (2) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续；

   (3) 函数的连续区间 $(0,1]\cup(1,3]$；

   (4) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$，$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

3. (1) $\lim\limits_{a\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2a)^3=\left(\sin 2\times\dfrac{\pi}{4}\right)^3=1^3=1$；

   (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+\arctan x)=0+\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$；

   (3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-4-x}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=\dfrac{4}{2}$

   $=2$；

   (4) $\sqrt{5}$.

4. $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义.

   $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=0$，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

5. 令 $f(x)=x^5-3x-1$, $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续,并且 $f(1)=-3<0$, $f(2)=25>0$,

根据零点定理,在 $(1,2)$ 内至少存在一点 c,使

$f(c)=c^5-3c-1=0$,即 $c^5-3c=1$.

所以方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

基础训练

一、1. B; 2. D; 3. D; 4. D; 5. A.

二、1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{-1}{\cos x+\sin x}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2. 当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}\to 0$. 令 $u=\dfrac{1}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{u}=1$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)=\ln 1=0$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right)=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right)\right]=\ln 1=0$;

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x+1)^x-\ln x^x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]=\ln e=1$.

三、1. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2+x)=2$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

2. $f(x)=x^4-3x^2+7x-10$,因为它在闭区间 $[1,2]$ 上连续,并且 $f(1)=-5<0$, $f(2)=8>0$,所以根据零点定理得:

函数 $f(x)=x^4-3x^2+7x-10$ 在 $(1,2)$ 内至少有一点 $\xi(1<\xi<2)$ 使得 $f(\xi)=0$,即

$$\xi^4-3\xi^2+7\xi-10=0(1<\xi<2).$$

此等式说明曲线 $y=x^4-3x^2+7x-10$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点.

3. 设 $f(x)=x^3-3x-1$,因为它在闭区间 $[1,2]$ 上连续,并且 $f(1)=-3<0$, $f(2)=1>0$,所以根据零点定理得:函数 $f(x)=x^3-3x-1$ 在 $(1,2)$ 内至少有一点 $\xi(1<\xi<2)$ 使得 $f(\xi)=0$,即

$$\xi^3-3\xi=1(1<\xi<2).$$

此等式说明方程 $x^3-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

4. 设 $f(x)=x\cdot 2^x-1$,因为它在闭区间 $[0,1]$ 上连续,并且 $f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0$,所以根据零点定理得:函数 $f(x)=x\cdot 2^x-1$ 在 $(0,1)$ 内至少有一点 $\xi(0<\xi<1)$ 使得 $f(\xi)=0$,即

$$\xi\cdot 2^{\xi}=1(0<\xi<1).$$

此等式说明方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

5. 设 $f(x)=x-a\sin x-b(a>0,b>0)$,因为它在闭区间 $[0,a+b]$ 上连续,并且 $f(0)=-b<0,f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]>0$,所以根据零点定理得:函数 $f(x)=x-a\sin x-b$ 在 $(0,a+b)$ 内至少有一点 $\xi(0<\xi<a+b)$ 使得 $f(\xi)=0$,即

$$\xi=a\sin\xi+b(0<\xi<a+b).$$

此等式说明方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

第四章　练习题和基础训练

练习题 4.1

1. C.

2. B.

3. (1)$1.6x^{0.6}$; (2)$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; (3)$\frac{17}{5}x^{\frac{12}{5}}$; (4)$-2x^{-3}$.

4. (1)0; (2)$\frac{1}{3\ln a}$.

5. (1)$-f'(x_0)$; (2)$2f'(x_0)$.

6. $y'=2x-1$,$\therefore k_{切}=y'|_{x=1}=2\times1-1=1,k_{法}=-1$.

所以切线方程为 $y-2=1(x-1)$,即 $y=x+1$;

法线方程为 $y-2=-1(x-1)$,即 $y=-x+3$.

7. (1) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导但连续,理由如下:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{x-1}=1,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-x^2+2x-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(1-x)=0,$$

$f'_-(1)\neq f'_+(1)$,$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$,

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1=f(1)$,

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

(2) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导但连续,理由如下:

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}\text{ 不存在},$$

$\therefore f(x)$ 在 0 处不可导.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$,$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(3) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且连续，理由如下：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，可导必定连续.

练习题 4.2

1. (1) $y'=10x^9-10^x\ln 10$；　(2) $y'=e^x+xe^x$；

　(3) $y'=\tan x\ln x+x\sec^2 x\ln x+\tan x$；　(4) $y'=\sec^2 x-\csc^2 x$.

2. (1) $y'=-42x-2$；　(2) $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$；

　(3) $y'=ex^{e-1}-e^x$；　(4) $y'=3x^2\ln x+x^2$.

3. (1) $y'=\cos x+\sin x$，∴ $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，$y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

　(2) $f'(x)=\dfrac{3}{(5-x)^2}+\dfrac{2x}{5}$，∴ $f'(0)=\dfrac{3}{25}$，$f'(2)=\dfrac{17}{15}$.

练习题 4.3

(1) $y'=-20(1-2x)^9$；　(2) $y'=12\sin 6x\cos 6x$；

(3) $y'=\dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x}$；　(4) $y'=3\sin(4-3x)$；

(5) $y'=\arctan x+x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{1+x^2}=\arctan x$；

(6) $y'=-6xe^{-3x^2}$；

(7) $y'=\dfrac{-6x\sin(10+3x^2)}{\cos(10+3x^2)}$；　(8) $y'=\dfrac{\sqrt{\tan x}}{2\sin x\cos x}$；

(9) $y'=\dfrac{3}{(5-x)^2}+\dfrac{2x}{5}$；　(10) $y'=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{1}{1+e^x}$.

练习题 4.4

1. $y''=-2-12x^2$，$y'''=-24x$.

2. $y'''=120(x+10)^3$，$y'''\big|_{x=2}=120\times 12^3=207\ 360$.

3. (1) $y'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$，$y''=2xe^{x^2}+4xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}$.

　(2) $y'=3e^{3x-2}$，$y''=9e^{3x-2}$.

　(3) $y'=5x^4+12x^2+2$，$y''=20x^3+24x$.

　(4) $y'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=1+\ln x$，$y''=\dfrac{1}{x}$.

4. $y=e^x\sin x$，$y'=e^x\sin x+e^x\cos x$，$y''=2e^x\cos x$，∴ $y''-2y'+2y=0$.

练习题 4.5

1. (1) 对函数两边直接取对数，有

$$\ln y=\ln x^{2x}=2x\ln x,$$

等式两边分别对 x 求导(注意 y 是 x 的函数),有

$$(\ln y)'=(2x\ln x)',\frac{y'}{y}=2(1+\ln x).$$

于是 $y'=2y(1+\ln x)=2x^{2x}(1+\ln x)$.

(2) 对函数两边直接取对数,有

$$\ln y=\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=x\ln\frac{x}{1+x}=x[\ln x-\ln(1+x)],$$

等式两边分别对 x 求导(注意 y 是 x 的函数),有 $(\ln y)'=\{x[\ln x-\ln(1+x)]\}',\frac{y'}{y}=[\ln x-\ln(1+x)]+x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)=\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}$,

于是 $y'=y\left(\frac{1}{1+x}+\ln\frac{x}{1+x}\right)=\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}\left(\frac{1}{1+x}+\ln\frac{x}{1+x}\right)$.

2.(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(b\sin^3\varphi)'}{(a\cos^3\varphi)'}=\frac{3b\sin^2\varphi\cos\varphi}{-3a\cos^2\varphi\sin\varphi}=-\frac{b}{a}\tan\varphi$;

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(t-t^3)'}{(1-t^2)'}=\frac{1-3t^2}{-2t}$.

3.(1) 这里 y 和 y^3 可看成是 x 的复合函数,将方程两边对 x 求导得

$$3x^2+3y^2y'-3a(y+xy')=0,$$

所以 $y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$;

(2) 这里 y^2 可看成是 x 的复合函数,将方程两边对 x 求导得

$$2x+2y\cdot y'=0,$$

所以 $y'=-\frac{x}{y}$.

练习题 4.6

1.(1) $y'=-\frac{1}{x^2},y'|_{x=1}=\left(-\frac{1}{x^2}\right)|_{x=1}=-1,\mathrm{d}y|_{x=1}=y'|_{x=1}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x$;

(2) $y'=\frac{1}{x},y'|_{x=1}=\frac{1}{x}|_{x=1}=1,\mathrm{d}y|_{x=1}=y'|_{x=1}\mathrm{d}x=\mathrm{d}x$;

(3) $y'=-\sin x,y'|_{x=0}=(-\sin x)|_{x=0}=0,\mathrm{d}y|_{x=0}=y'|_{x=0}\mathrm{d}x=0$;

(4) $y'=2\cos 2x,y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=2\cos 2x|_{x=\frac{\pi}{4}}=0,\mathrm{d}y|_{x=\frac{\pi}{4}}=y'|_{x=\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=0$.

2.(1) $\mathrm{d}y=-2nx(1-x^2)^{n-1}\mathrm{d}x$;　(2) $\mathrm{d}y=6x\mathrm{d}x$;　(3) $\mathrm{d}y=(1-2x)\mathrm{d}x$.

3.(1) $2x$;　(2) $\frac{3}{2}x^2$;　(3) $\sin t$;　(4) $-\frac{\cos\omega x}{\omega}$;　(5) $\ln(1+x)$;　(6) $-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}$;

(7) $2\sqrt{x}$;　(8) $\frac{\tan 3x}{3}$.

基础训练

一、1. A;　2. A;　3. B;　4. D;　5. D;　6. B,A;　7. B.

二、1. √；　2. ×；　3. √.

三、1. $2f'(x_0)$；　2. $-1,1$；　3. 0；　4. $3+3e^3$.

四、1. $y'=\log_2 x+x\cdot\dfrac{1}{x\ln 2}=\log_2 x+\dfrac{1}{\ln 2}$；

2. $y'=\dfrac{1}{\tan x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$.

五、1. $y'=e^x\sin x+e^x\cos x$，$y''=e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-e^x\sin x=2e^x\cos x$；

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(t-\arctan t)'}{[\ln(1+t^2)]'}=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t^2}{2t}=\dfrac{t}{2}$.

第五章　练习题和基础训练

练习题 5.1

1. 函数 $f(x)$ 在区间$[-2,2]$上连续，在$(-2,2)$内可导，

又 $f(-2)=f(2)=\dfrac{1}{5}$，故 $f(x)$ 在$[-2,2]$上满足罗尔定理条件，

由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in[-2,2]$ 使得 $f'(\xi)=0$，

又因为 $f'(\xi)=\dfrac{-2\xi}{(1+\xi^2)^2}=0$，$\therefore \xi=0\in[-2,2]$，

因此罗尔定理对函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间$[-2,2]$上是正确的.

2. 函数 $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，

故 $f(x)$ 在$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理条件，从而至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使

$f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{-2-(-2)}{1}=0$，

又 $f'(\xi)=12\xi^2-10\xi+1=0$ 可知 $\xi=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$，

因此拉格朗日中值定理对函数 $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间$[0,1]$上是正确的.

3. 函数 $f(x)$ 分别在$[1,2]$，$[2,3]$，$[3,4]$上连续，分别在$(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$内可导，且

$$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$$

由罗尔定理知至少存在 $\xi_1\in(1,2)$，$\xi_2\in(2,3)$，$\xi_3\in(3,4)$ 使

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$$

即方程 $f'(x)=0$ 至少有三个实根，又方程 $f'(x)=0$ 为三次方程，故它至多有三个实根，因此方程 $f'(x)=0$ 有且仅有三个实根，它们分别位于区间$(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$内.

练习题 5.2

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x}{1}=\cos a$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sec^2 x\tan x}{\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos^3 x}=2$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x\ln x+x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1}{\ln x+2}=\dfrac{1}{2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)}=e^0=1$；

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0.$

基础训练

一、1. A； 2. C； 3. D； 4. D； 5. C； 6. B； 7. D； 8. A.

二、1. $(0,2)$； 2. $-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{2}$； 3. $(-1,0),(0,+\infty)$； 4. -8； 5. 驻点.

三、1. ×； 2. √； 3. ×； 4. ×； 5. √.

四、1. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1}{2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)=0$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos 3x}{2}=\dfrac{3}{2}.$

2. $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$，因为函数在点 x_1 和 x_2 处有极值，

所以 1,2 为方程 $\dfrac{a}{x}+2bx+1=0$ 的根，代入得 $a=-\dfrac{2}{3}$，$b=-\dfrac{1}{6}$，

$$f''(x)=-\frac{a}{x^2}+2b=\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}.$$

又 $f''(1)=\dfrac{1}{3}>0$，所以在 $x=1$ 取极小值，

$f''(2)=-\dfrac{1}{6}<0$，所以在 $x=2$ 取极大值.

3. $y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$，

$y''=-e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=e^{-x}(x-2)$,

令 $y''=0$ 得 $x=2$.

当 $-\infty<x<2$ 时,$y''<0$,因此曲线在$(-\infty,2]$上是凸的,

当 $2<x<+\infty$ 时,$y''>0$,因此曲线在$(2,+\infty)$上是凹的,

故点$\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$为拐点.

4. 设半圆的半径为 r,则窗户的截面面积为

$$s=\frac{\pi r^2}{2}+\frac{c-2r-\pi r}{2}\cdot 2r,$$

$$s'=c-\pi r-4r,令\ s'=0,$$

则 $r=\dfrac{c}{\pi+4}$ 时,窗户的截面面积最大.

5. 设生产 x 台电视机,才能使利润最大,则利润 $L(x)$ 为:

$L(x)=R(x)-C(x)=400x-\dfrac{2}{100}x^2-5\ 000-250x+\dfrac{1}{100}x^2=-\dfrac{1}{100}x^2+150x-5\ 000$,

则 $L'(x)=-\dfrac{2}{100}x+150$,

令 $L'(x)=0$,即 $-\dfrac{2}{100}x+150=0$,解得驻点 $x=7\ 500$. 所以当生产 7 500 台电视机时才能获利最大.

第六章　练习题和基础训练

练习题 6.1

1. (1) $\dfrac{x^3}{3}+C$; (2) $2x$; (3) $\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{2}x+C$; (4) $-\sin 2x$.

2. 设曲线方程为 $y=f(x)$,则点(x,y)处的切线斜率为 $f'(x)$,由条件得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$,因此 $f(x)$ 为$\dfrac{1}{x}$的一个原函数,故有 $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$,又根据条件曲线过点$(e^2,3)$,有 $f(e^2)=3$ 解得 $C=1$,即得所求曲线方程为 $y=\ln|x|+1$.

练习题 6.2

(1) $\displaystyle\int x^7 dx=\frac{x^8}{8}+C$;

(2) $\displaystyle\int 3x dx=\frac{3}{2}x^2+C$;

(3) $\displaystyle\int\frac{(x-3)^2}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{3}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}+9x^{-\frac{1}{2}})dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx-6\int x^{\frac{1}{2}}dx+9\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

$-4x^{\frac{3}{2}}+18x^{\frac{1}{2}}+C$;

(4) $\int(2^x+e^x)dx=\int 2^x dx+\int e^x dx=\dfrac{2^x}{\ln 2}+e^x+C$;

(5) $\int \dfrac{e^x}{10^x}dx=\int\left(\dfrac{e}{10}\right)^x dx=\dfrac{\left(\dfrac{e}{10}\right)^x}{\ln\left(\dfrac{e}{10}\right)}+C=\dfrac{\dfrac{e^x}{10^x}}{1-\ln 10}+C=\dfrac{e^x}{10^x(1-\ln 10)}+C$;

(6) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int \dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C.$

练习题 6.3

1\. (1) $-\dfrac{1}{2}$; (2) $\dfrac{1}{2}$; (3) 2; (4) -2; (5) -1; (6) $-\dfrac{1}{3}$; (7) $-\dfrac{1}{3}$; (8) $\dfrac{1}{2}$.

2\. (1) $\int\cos 4x dx=\dfrac{1}{4}\int\cos 4x d(4x)\xlongequal{4x=u}\dfrac{1}{4}\int\cos u du=\dfrac{1}{4}\sin u+C\xlongequal{u=4x}$

$\dfrac{1}{4}\sin 4x+C$;

(2) $\int(x^2-3x+2)^3(2x-3)dx=\int(x^2-3x+2)^3 d(x^2-3x+2)\xlongequal{x^2-3x+2=u}\int u^3 du=$

$\dfrac{u^4}{4}+C\xlongequal{u=x^2-3x+2}\dfrac{1}{4}(x^2-3x+2)^4+C$;

(3) $\int(2x-1)^5 dx=\dfrac{1}{2}\int(2x-1)^5 d(2x-1)\xlongequal{2x-1=u}\dfrac{1}{2}\int u^5 du=\dfrac{1}{12}u^6+C$

$\xlongequal{u=2x-1}\dfrac{1}{12}(2x-1)^6+C$;

(4) $\int\dfrac{dx}{1-2x}=-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{1-2x}d(1-2x)\xlongequal{1-2x=u}-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{u}du=-\dfrac{1}{2}\ln|u|+C$

$\xlongequal{u=1-2x}-\dfrac{1}{2}\ln|1-2x|+C$;

(5) $\int\dfrac{dx}{x\ln^2 x}=\int\dfrac{1}{\ln^2 x}d(\ln x)\xlongequal{\ln x=u}\int\dfrac{1}{u^2}du=-\dfrac{1}{u}+C\xlongequal{u=\ln x}-\dfrac{1}{\ln x}+C$;

(6) $\int x^2\sin(3x^3)dx=\dfrac{1}{9}\int\sin(3x^3)d(3x^3)\xlongequal{3x^3=u}\dfrac{1}{9}\int\sin u du=-\dfrac{1}{9}\cos u+C$

$\xlongequal{u=3x^3}-\dfrac{1}{9}\cos(3x^3)+C$;

(7) $\int e^{\sin x}\cos x dx=\int e^{\sin x}d(\sin x)\xlongequal{\sin x=u}\int e^u du=e^u+C\xlongequal{u=\sin x}e^{\sin x}+C$;

(8) $\int\dfrac{dx}{\cos^2(a-bx)}=-\dfrac{1}{b}\int\dfrac{d(a-bx)}{\cos^2(a-bx)}=-\dfrac{1}{b}\int\sec^2(a-bx)d(a-bx)$

$\xlongequal{a-bx=u}-\dfrac{1}{b}\int\sec^2 u du=-\dfrac{1}{b}\tan u+C\xlongequal{u=a-bx}-\dfrac{1}{b}\tan(a-bx)+C$;

(9) 令 $x=\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$,则 $\sqrt{1-x^2}=\cos t$, $dx=\cos t dt$,

$\int\dfrac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\dfrac{2\sin t-1}{\cos t}\cdot\cos t dt=\int(2\sin t-1)dt=2\int\sin t dt-\int dt=$

$-2\cos t-t+C=-2\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+C$；

(10) $\int\frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)\xlongequal{\frac{x}{2}=u}\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=$

$\frac{1}{2}\arctan u+C\xlongequal{u=\frac{x}{2}}\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$；

(11) 设 $x=t^6$，则$\sqrt{x}=t^3$，$\sqrt[3]{x}=t^2$，$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$. 所以

$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=6\int\frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=2t^3-3t^2+6t-$

$6\ln(1+t)+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$；

(12) 令 $t=\sqrt{x}$，即 $x=t^2$，从而 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{1+t}2t\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2-1+1}{t+1}\mathrm{d}t=2\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)+C=t^2-2t+2\ln(t+1)+C.$$

练习题 6.4

1. (1) $\int\ln(x^2+1)\mathrm{d}x=x\ln(x^2+1)-\int x\mathrm{d}\ln(x^2+1)=x\ln(x^2+1)-\int\frac{2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=$

$x\ln(x^2+1)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\mathrm{d}x=x\ln(x^2+1)-2\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=x\ln(x^2+$

$1)-2x+2\arctan x+C$；

(2) $\int\arctan x\mathrm{d}x=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)}$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$；

(3) $\int\ln^2x\mathrm{d}x=x\ln^2x-\int2\ln x\mathrm{d}x=x\ln^2x-2x\ln x+\int2\mathrm{d}x$

$=x\ln^2x-2x\ln x+2x+C$；

(4) $\int x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=2\int x\mathrm{d}\left(\sin\frac{x}{2}\right)=2x\sin\frac{x}{2}-2\int\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$；

(5) $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln(x-1)\mathrm{d}(x^2-1)=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int(x+$

$1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C$；

(6) $\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\left[\frac{1}{x}\ln x-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right]=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C.$

2. 因为$\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数，所以 $f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=\int x\mathrm{d}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right)=\frac{x\cos x-\sin x}{x}-\int\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\mathrm{d}x=$

$\cos x - \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + C = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C.$

基础训练

一、1. $f(x)$； 2. $3e^x$； 3. $2\tan x - \cot x + C$； 4. $-\frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - 3x^2 + x + C$；

5. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$； 6. $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + C$； 7. $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$；

8. $\frac{(5e)^x}{\ln 5 + 1}$； 9. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$； 10. $-\frac{1}{2}$； 11. $x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$；

12. $\frac{1}{2}\sin 2x + C$； 13. $2e^{2x}$； 14. $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + 3$.

二、1. C； 2. A； 3. A； 4. D； 5. C； 6. A； 7. C； 8. A； 9. D.

三、1. $\int \frac{dx}{\cos^2(2-3x)} = -\frac{1}{3}\int \sec^2(2-3x)d(2-3x) = -\frac{1}{3}\tan(2-3x) + C$；

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}} = -\frac{1}{3}\int (2-3x)^{-\frac{1}{3}}d(2-3x) = -\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}} + C$；

3. $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx = \int\left(3x^2 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x^3 + \arctan x + C$；

4. $\int \frac{1}{1-\cos 2x}dx = \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \csc^2 x dx = -\frac{1}{2}\cot x + C$；

5. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\int \arcsin x d\frac{1}{x} = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$,

令 $x = \sin t$,则 $dx = \cos t dt$,从而

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin t\cos t} = \int \csc t dt = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\cos t}{\sin t}\right| + C =$

$\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$,

故$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$；

6. $\int \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2) \xlongequal{令\sqrt{1+x^2}=t} \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt^2 =$

$\frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t}dt = \int \frac{t+1-1}{1+t}dt = \int\left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = t - \ln(1+t) + C = \sqrt{1+x^2} -$

$\ln(1+\sqrt{1+x^2}) + C$；

7. 令 $u = \sqrt{1+e^x}$,则 $x = \ln(u^2-1)$ 得

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2du}{u^2-1} = \ln\frac{u-1}{u+1} + C = \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$；

8. $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+2x+3)' - 3}{x^2+2x+3}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - 3\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C;$$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+2^2}}dx = \ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}|+C$（积分表的使用）；

10. $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x+\sin x-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x| + C;$$

11. $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int \sqrt{x}\ln x dx$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int \sqrt{x}dx\right)$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x + \frac{8}{9}\int \sqrt{x}dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x + \frac{16}{27}x^{\frac{3}{2}} + C;$$

12. $\int x\ln(9+x^2)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(9+x^2) - \int \frac{x^3}{9+x^2}dx$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(9+x^2) - \int\left(x - \frac{9x}{9+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(9+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}\int \frac{1}{9+x^2}d(x^2+9)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(9+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}\ln(9+x^2) + C.$$

四、$v(t) = \int(3t^2 - \sin t)dt = t^3 + \cos t + C_1$，

因为 $v(0) = 2$，所以 $C_1 = 1$，即 $v(t) = t^3 + \cos t + 1$，

$$s(t) = \int(t^3 + \cos t + 1)dt = \frac{t^4}{4} + \sin t + t + C_2,$$

又因为 $s(0) = 1$，所以 $C_2 = 1$，即 $s(t) = \frac{t^4}{4} + \sin t + t + 1$.

五、设 $F(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，

$$\int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

第七章　练习题和基础训练

练习题 7.1

1.(1) 根据定积分的几何意义，定积分$\int_0^1 2x\mathrm{d}x$表示由直线 $y=2x$、$x=1$ 及 x 轴围成的图形的面积，该图形是三角形，底边长为 1，高为 2，因此面积为 1，即$\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1$.

(2) 由于函数 $y=\sin x$ 在区间$[0,\pi]$上非负，在区间$[-\pi,0]$上非正，根据定积分的几何意义，定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$表示曲线 $y=\sin x(x\in[0,\pi])$ 与 x 轴所围成的图形 D_1 的面积减去曲线 $y=\sin x(x\in[-\pi,0])$ 与 x 轴所围成的图形 D_2 的面积. 显然图形 D_1 与 D_2 的面积是相等的，因此有$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$.

2.(1) 在区间$[1,4]$上，$2\leqslant x^2+1\leqslant 17$. 因此有

$$6=\int_1^4 2\mathrm{d}x\leqslant\int_1^4(x^2+1)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^4 17\mathrm{d}x=51.$$

(2) 因为在$[0,1]$上，$1=\mathrm{e}^0\leqslant\mathrm{e}^{x^2}\leqslant\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$，且函数 e^{x^2} 不恒等于 1 和 e，所以有 $1=\int_0^1\mathrm{d}x<\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x<\int_0^1\mathrm{e}\mathrm{d}x=\mathrm{e}$.

(3) 因为在$[1,2]$上，$\frac{2}{5}\leqslant\frac{x}{x^2+1}\leqslant\frac{1}{2}$，因此有 $\frac{2}{5}=\int_1^2\frac{2}{5}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

3.(1) 在区间$[0,1]$上 $x^2\geqslant x^3$，因此$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 比$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$ 大.

(2) 在区间$[0,1]$上，$x^2\leqslant x$，所以 $\mathrm{e}^{x^2}\leqslant\mathrm{e}^x$ 且除了 $x=0$，$x=1$ 外，处处有 $\mathrm{e}^{x^2}<\mathrm{e}^x$，因此$\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 比$\int_0^1\mathrm{e}^{x\,2}\mathrm{d}x$ 大.

(3) 由于当 $x>0$ 时 $\ln(x+1)<x$，故此时有 $x+1<\mathrm{e}^x$，因此$\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 比$\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x$ 大.

(4) 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上，$\sin x\leqslant x$，且除 $x=0$ 外处处有 $\sin x<x$，因此$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x$ 比$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$ 大.

练习题 7.2

1. $y'=\sin x$，因此 $y'(0)=0$，$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. (1) $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = xf(x)$;

(2) $\frac{d}{dx}\sin(\int_0^{x^2} f(t)dt) = 2xf(x)\cos(\int_0^{x^2} f(t)dt)$;

(3) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^3}dt = 2x\sqrt{1+x^6}$;

(4) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)$

$$= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$

3. (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = 1$;

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2} = \frac{1}{2}$.

4. (1) $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = \frac{21}{8}$;

(2) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx = \int_4^9 (\sqrt{x}+x)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\right]_4^9 = \frac{271}{6}$;

(3) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (x+1)dx + \int_1^2 2x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{37}{6}$;

(4) $\int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2$;

(5) $\int_{-4}^{-2} 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{-4}^{-2} = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right) = \frac{3}{16\ln 2}$.

练习题 7.3

1. (1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)d\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = 0$;

(2) $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = \int_{-2}^{1} \frac{d(11+5x)}{5(11+5x)^3} = \left[-\frac{1}{10(11+5x)^2}\right]_{-2}^{1} = \frac{51}{512}$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d(\cos\varphi) = \left[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$;

(4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2u)du = \frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$;

(5) $\int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}d\left(-\frac{t^2}{2}\right) = [-e^{-\frac{t^2}{2}}]_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$;

(6) $\int_0^{\sqrt{2}a} \frac{xdx}{\sqrt{3a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}a} \frac{d(3a^2-x^2)}{\sqrt{3a^2-x^2}} = -[\sqrt{3a^2-x^2}]_0^{\sqrt{2}a} = (\sqrt{3}-1)a$;

(7) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \xlongequal{x=e^u} \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{1+u}} = [2\sqrt{1+u}]_0^2 = 2\sqrt{3}-2$.

2. (1) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}) = -[x\mathrm{e}^{-x}]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + [-\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$;

(2) $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{2}\mathrm{d}(x^2) = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$;

(3) $$\begin{aligned}\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan x\mathrm{d}(x^2)\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \arctan x]_0^1\\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2};\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int_1^4 2\ln x\mathrm{d}\sqrt{x} = [2\sqrt{x}\ln x]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 8\ln 2 - [4\sqrt{x}]_1^4\\ &= 4(2\ln 2 - 1);\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} x\,\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x + x\cos 2x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}x^2\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} x\mathrm{d}(\sin 2x)\\ &= \pi^2 + \left(\frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x\right)\Big|_0^{2\pi}\\ &= \pi^2;\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}(-\cos 2x) = -\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4};\end{aligned}$$

(7) $$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})\\ &= \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{2x}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\sin x\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}[\mathrm{e}^{2x}\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 2)$.

3. (1) 由于被积函数为奇函数，因此 $\int_{-\pi}^{\pi} x^4\sin x\mathrm{d}x = 0$；

(2) 由于被积函数为偶函数，因此

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\arctan x|\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{3}}\arctan x\mathrm{d}x = 2\left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{1}{2}\ln 4.$$

练习题 7.4

1. (1) $S=\int_1^2\left(y-\dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\left(\dfrac{y^2}{2}-\ln y\right)\Big|_1^2=\dfrac{3}{2}-\ln 2$；

(2) $S=-\int_{0.1}^{1}\lg x\mathrm{d}x+\int_1^{10}\lg x\mathrm{d}x=(-x\lg x+x\lg \mathrm{e})\Big|_{0.1}^{1}+(x\lg x-x\lg \mathrm{e})\Big|_1^{10}=$

$9.9-8.1\lg \mathrm{e}$；

(3) $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x$

$=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\sin\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=4.$

2. (1) $V_x=\int_1^4\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^4 x\mathrm{d}x=\pi\cdot\dfrac{x^2}{2}\Big|_1^4=\dfrac{15}{2}\pi$，

$V_y=\int_1^4 2\pi x f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4 2\pi x\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\pi\cdot\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_1^4=\dfrac{124}{5}\pi$；

(2) $V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi[(\cos x)^2-(\sin x)^2]\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[(\sin x)^2-(\cos x)^2]\mathrm{d}x=1.$

3. 取 r 为积分变量 $r\in[a,b]$，取任一小区间 $[r,r+\mathrm{d}r]$，功元素 $\mathrm{d}w=\dfrac{kq}{r^2}\mathrm{d}r$，所求功为

$$w=\int_a^b\frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r=kq\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_a^b=kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

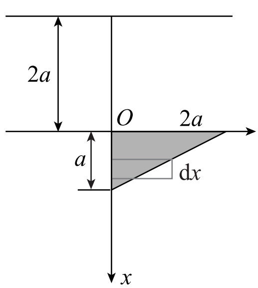
4. 假如钉子钉入木板的深度为 x cm，则木板对铁钉的阻力 $F(x)=kx$，第一次锤击时所做的功 $W_1=\int_0^1 kx\mathrm{d}x=\dfrac{k}{2}$.

设 n 次击入的总深度为 h cm，n 次锤击所做的总功：

$W_n=\int_0^h kx\mathrm{d}x=\dfrac{kh^2}{2}$，

而每次锤击所做的功相等 $W_n=nW_1\Rightarrow\dfrac{kh^2}{2}=n\cdot\dfrac{k}{2}$，所以 n 次击入的总深度 $h=\sqrt{n}$，第 n 次击入的深度 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

5. 建立坐标系如下图：

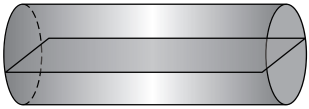


面积微元 $2(a-x)\mathrm{d}x$，

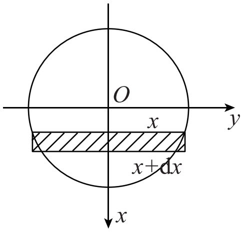
$\mathrm{d}p=\rho g\cdot(x+2a)\cdot 2(a-x)\mathrm{d}x$，

$$P = \int_0^a 2\rho g(x+2a)(a-x)\mathrm{d}x = \frac{7}{3}\rho g a^3.$$

6. 建立坐标系如下图：



(a)



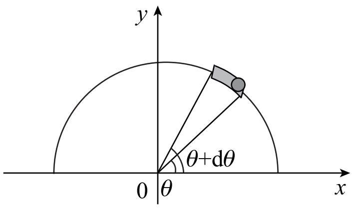
(b)

半圆的方程为 $y = \sqrt{R^2 - x^2}(0 \leqslant x \leqslant R)$，

利用对称性，侧压力元素 $\mathrm{d}F = 2rx\sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x$，

端面所受侧压力为 $F = \int_0^R 2rx\sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{2r}{3}R^3$.

7.（1）建立如下图的坐标系，确定积分变量和积分区间.



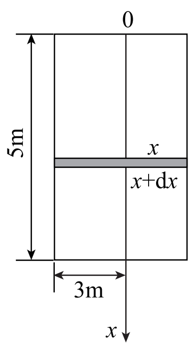
设线密度为 ρ，取 θ 为积分变量，则 $\theta \in [0,\pi]$.

（2）求微元：对 $\theta \in [0,\pi]$，$[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta] \in [0,\pi]$，

将 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 对应的弧长质量看成一个质点，则 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 对应的弧长质量为

$$\mathrm{d}m = \rho r\mathrm{d}\theta = \frac{m}{\pi r}r\mathrm{d}\theta = \frac{m}{\pi}\mathrm{d}\theta.$$

8. 建立坐标系如下图：



任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，这薄层水的体积元素 $\mathrm{d}v = \pi y^2\mathrm{d}x = \pi 3^2\mathrm{d}x$，

这薄层水吸出桶外所做的功（功元素）为 $\mathrm{d}w = \rho g x\mathrm{d}v = 9\pi g\rho x\mathrm{d}x$，

故所求功为 $w = \int_0^5 9\pi g\rho x\mathrm{d}x = 112.5\pi g\rho(\mathrm{kJ})$.

9. 将 15 年租金总值的现值与购进费用相比较，即可做出选择.

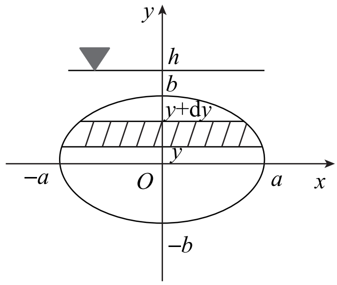
由于每月租金为 1 500 元，所以每年租金为 18 000 元，故 $f(t)=18\ 000$，于是租金流总量的现值为

$$y=\int_0^{15} f(t)e^{-rt}dt=\int_0^{15} 18\ 000e^{-0.06t}dt=-\frac{18\ 000}{0.06}e^{-0.06t}\Big|_0^{15}=300\ 000(1-e^{-0.9})=$$

178 029.1(元)

因此与购进费用 120 000 元相比，购进机器比较合算.

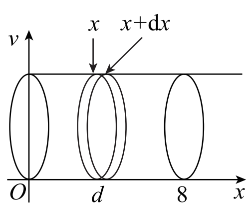
10. 建立坐标系如下图：



椭圆的方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，由题设，$h>b$，在 y 轴任取区间 $[y,y+dy]$，则椭圆板上对应窄条的面积的近似值为 $2xdy$. 于是窄条所受的水压力约为 $dF=2\rho g(h-y)\cdot\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}dy$，则所求水压力为

$$F=\int_{-b}^{b}2\rho g(h-y)\cdot\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}dy=\rho gabh\pi.$$

11. 建立坐标系如下图：



因为温度不变，$PV=10\cdot\pi10^2\times80=80\ 000\pi$ 是定值. 当圆柱体的高减少 x cm 时的压强为

$$P(x)=\frac{k}{V(x)}=\frac{80\ 000\pi}{\pi\cdot10^2\cdot(80-x)}=\frac{800}{(80-x)},$$

$$\therefore dW=P(x)Sdx=\frac{800}{(80-x)}\cdot\pi\cdot10^2dx,$$

则 $W=\int_0^{40}\frac{800}{(80-x)}\cdot\pi\cdot10^2dx=80\ 000\pi\ln 2(\text{N}\cdot\text{cm})=800\pi\ln 2(\text{J})$.

12. (1) $R_T(Q)=\int_0^{50}\left(200-\frac{Q}{100}\right)dQ=\left(200Q-\frac{Q^2}{200}\right)\Big|_0^{50}=10\ 000-12.5=9\ 987.5$；

(2) 总收益的增量为 $\int_{100}^{200}\left(200-\frac{Q}{100}\right)dQ=\left(200Q-\frac{Q^2}{200}\right)\Big|_{100}^{200}=19\ 850.$

13. 因为 $C_M(Q)=2$,故 $C_T(Q)=\int 2\mathrm{d}Q=2Q+C$,

又 $\because C_T(Q)\big|_{Q=0}=0$,得总成本函数为 $C_T(Q)=2Q$,边际收入 $R_M(Q)=7-2Q$,故总收入

$$R_T(Q)=\int R_M(Q)\mathrm{d}Q=\int(7-2Q)\mathrm{d}Q=7Q-Q^2+C.$$

又 $\because R_T(Q)\big|_{Q=0}=0$,得 $C=0$,故总收入函数为 $R_T(Q)=7Q-Q^2$,设总利润为 $L(Q)$ 则

$$L(Q)=R_T(Q)-C_T(Q)=7Q-Q^2-2Q=5Q-Q^2.$$

(1) 求利润函数的导数得 $L'(Q)=5-2Q$,

令 $L'(Q)=0$ 得 $5-2Q=0$ 即 $Q=2.5$(百台),

因本例是一个实际问题,最大利润是存在的,而极大值点又唯一,则在 $Q=2.5$(百台)时,利润最大,其值为

$L(2.5)=5\times2.5-2.5^2=12.5-6.25=6.25$(万元).

(2) 从 2.5 百台增加到 3 百台,总利润减少了

$\int_{2.5}^{3}L'(Q)\mathrm{d}Q=\int_{2.5}^{3}(5-2Q)\mathrm{d}Q=(5Q-Q^2)\big|_{2.5}^{3}=6-6.25=-0.25$(万元)

即从利润最大时的产量又生产了 50 台,总利润减少了 0.25 万元.

基础训练

一、1. A; 2. A; 3. C; 4. A.

二、1. √; 2. ×; 3. √; 4. ×; 5. √.

三、1. $\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x$; 2. $\sin x^2$; 3. $\frac{4}{3}$; 4. 0; 5. $[\pi,2\pi]$; 6. 2.

四、1. $\int_0^{\sqrt{3}a}\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int_0^{\sqrt{3}a}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^{\sqrt{3}a}=\frac{\pi}{3a}$;

2. $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2u\mathrm{d}u=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$;

3. $$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x-\cos(k-l)x]\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+l)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-l)x\mathrm{d}x\\&=0;\end{aligned}$$

4. $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}\xlongequal{x=\frac{1}{u}}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{-u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u=[-\sqrt{1+u^2}]_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

5. $\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=\mathrm{e}^u}\int_0^1\mathrm{e}^u\sin u\mathrm{d}u=[\mathrm{e}^u\sin u]_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u=\mathrm{e}\sin1-[\mathrm{e}^u\cos u]_0^1$

$-\int_0^1\mathrm{e}^u\sin u\mathrm{d}u=\mathrm{e}(\sin1-\cos1)+1-\int_0^1\mathrm{e}^u\sin u\mathrm{d}u$,

所以$\int_1^e \sin(\ln x)dx = \frac{e}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}$；

6. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = [\arcsin\ln x]_1^e = \frac{\pi}{2}$.

五、1. 由 $y = x^2$ 与 $y = 2 - x$ 得两曲线的交点为$(-2,4)$和$(1,1)$，所以面积 $S = \int_{-2}^{1}[(2-x)-x^2]dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$；

2. 容易求得 $y = \frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2 + y^2 = 8$ 的交点为$(-2,2)$和$(2,2)$，因此有

$$\begin{aligned}A_1 &= \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)dx \\ &= 2\int_0^2\left(\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)dx \\ &= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2} + 4\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 \\ &= 2\pi + \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

$$A_2 = \pi(2\sqrt{2})^2 - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

六、1. $y^2 = x$ 与 $y = x - 2$ 的交点为$(1,-1)$，$(4,2)$，

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-1}^{2}(y+2)^2dy - \pi\int_{-1}^{2}(y^2)^2dy \\ &= \pi\left(\frac{y^3}{3} + 2y^2 + 4y\right)\Big|_{-1}^{2} - \pi\left(\frac{y^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{2} \\ &= \frac{72}{5}\pi;\end{aligned}$$

2. $(x-5)^2 + y^2 = 16$ 是以$(5,0)$为圆心，4 为半径的圆，

由圆的方程得 $x = \pm\sqrt{16-y^2} + 5$，故绕 y 轴旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-4}^{4}[(\sqrt{16-y^2}+5)^2 - (-\sqrt{16-y^2}+5)^2]dy \\ &= \pi\int_{-4}^{4}(20\sqrt{16-y^2})dy \\ &= 20\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{16-y^2}dy \\ &= 40\pi\int_0^4\sqrt{4^2-y^2}dy \\ &= 40\pi \times 4\pi \\ &= 160\pi^2.\end{aligned}$$

第八章　练习题和基础训练

练习题 8.1

1. (1) 要使函数有意义,必须 $y^2-2x+1>0$,即 $y^2>2x-1$;

(2) 要使函数有意义,必须 $\begin{cases} x+y>0, \\ x-y>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x>-y, \\ x>y; \end{cases}$

(3) 要使函数有意义,必须 $\begin{cases} 4x-y^2\geqslant 0, \\ 1-x^2-y^2>0, \\ 1-x^2-y^2\neq 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4x\geqslant y^2, \\ x^2+y^2<1, \\ x^2+y^2\neq 0; \end{cases}$

(4) 要使函数有意义,必须 $\begin{cases} y\geqslant 0, \\ x-\sqrt{y}\geqslant 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y\geqslant 0, \\ x\geqslant \sqrt{y}. \end{cases}$

草图略.

2. (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\dfrac{1}{4}$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}=\infty$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x+y)}{(x+y)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x+y}{2}}{(x+y)^2}=\dfrac{1}{2}$;

(4) 不存在.

练习题 8.2

1. (1) $\dfrac{2}{5}$;

(2) 0;

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\ y=\frac{\pi}{4}}}=-\mathrm{e}^{-x}\sin(x+2y)+\mathrm{e}^{-x}\cos(x+2y)\Big|_{\substack{x=0\\ y=\frac{\pi}{4}}}=-\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{2}=-1$;

(4) $z'_x\big|_{\substack{x=1\\ y=1}}+z'_y\big|_{\substack{x=1\\ y=1}}=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}+\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}}=\dfrac{2x+2y}{1+x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}}=\dfrac{4}{3}$.

2. (1) $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}\mathrm{d}x-\dfrac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y$;　(2) $\mathrm{d}z=\dfrac{abx\,\mathrm{d}y-aby\,\mathrm{d}x}{(ax-by)\sqrt{a^2x^2-b^2y^2}}$.

3. $z=f(u,v)$, $u=xy$, $v=x^2+y^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(2x^2+2y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

练习题 8.3

(1) 原式 $=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y=\int_0^1(\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=(\mathrm{e}-1)^2$;

(2) 原式 $=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y=\int_1^2(x^3-x)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}$;

(3) 原式 $=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}x^4+x^{\frac{5}{2}}\right)\mathrm{d}x=\frac{33}{140}$;

(4) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\int_0^x \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1$.

基础训练

1. (1) 要使函数有意义,必须使$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ y\in\mathbf{R},\end{cases}$即$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ y\in\mathbf{R};\end{cases}$

(2) 要使函数有意义,必须使$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ y^2-1\geqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}x^2\leqslant 1,\\ y^2\geqslant 1;\end{cases}$

(3) 要使函数有意义,必须使 $x^2+y^2-1>0$,即 $x^2+y^2>1$;

(4) 要使函数有意义,必须使 $-x-y>0$,即 $x+y<0$.

2. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2,\frac{\partial z}{\partial y}=2yx^2$;

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}$;

(3) $\frac{\partial z}{\partial y}=x\mathrm{e}^{xy}+x^2,\frac{\partial z}{\partial x}=y\mathrm{e}^{xy}+2xy$;

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{R^2y-2x^2y+y^3}{\sqrt{R^2-x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{R^2x+2xy^2-x^3}{\sqrt{R^2-x^2+y^2}}$;

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$;

(6) $\frac{\partial z}{\partial y}=-\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\sin y,\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos y\cdot\cos x$;

(7) $\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln 3^{\frac{1}{x}},\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{y}{x^2}\right)$;

(8) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sqrt{y^x}\cdot\ln y}{2(1+y^x)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy^{x-1}}{2\sqrt{y^x}(1+y^x)}$;

(9) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

(10) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^3z^5\mathrm{e}^{xy^3z^5},\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2xz^5\mathrm{e}^{xy^3z^5},\frac{\partial u}{\partial z}=5xy^3z^4\mathrm{e}^{xy^3z^5}$.

3. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^4\sin(xy^2),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x\cos(xy^2)-2x^2y^2\sin(xy^2),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$
$2y\cos(xy^2)-2xy^3\sin(xy^2)$;

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$;

(3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x+2y}{(x+y)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{(x+y)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{y}{(x+y)^2}$;

(4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2xy^3}{[1+(xy)^2]^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^3y}{[1+(xy)^2]^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1-(xy)^2}{[1+(xy)^2]^2}$.

4. (1) $\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{x^2+y^2}(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)$;

(2) $\mathrm{d}z=\frac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{1+(xy)^2}$;

(3) $\mathrm{d}u=\frac{2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$.

5. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}$;

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}-2x\cos\frac{y}{x}}{x^2-y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}+2y\cos\frac{y}{x}}{x^2-y^2}$;

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{(2x-y^2)\sin(x^2y)}[2\sin(x^2y)+2xy(2x-y^2)\cos(x^2y)]$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{(2x-y^2)\sin(x^2y)}[-2y\sin(x^2y)+x^2(2x-y^2)\cos(x^2y)]$;

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-12x+5y,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=3x-y-(y-2x)=5x-2y$;

(5) $z=\frac{1-\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t}=\frac{1}{\mathrm{e}^t}-\mathrm{e}^t,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\mathrm{e}^t}-\mathrm{e}^t$;

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2-2x-1}{3(x-1)^2}$.

6. (1) $F(x,y)=xy+\lambda(x+y-2),\begin{cases}F'_x=y+\lambda=0,\\F'_y=x+\lambda=0,\\F'_\lambda=x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\y=1;\end{cases}$

(2) $F(x,y)=x+y+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),\begin{cases}F'_x=1-\lambda x^{-2}=0,\\F'_y=1-\lambda y^{-2}=0,\\F'_\lambda=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0\end{cases}\Rightarrow$ 不存在条件极值.

7. 令 $u=x+y+z,v=x^2+y^2+z^2$；即：$F(u,v)=0$，得出

$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}+2y\cdot\frac{\partial F}{\partial v},\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}+2x\cdot\frac{\partial F}{\partial v},\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial u}+2z\cdot\frac{\partial F}{\partial v}$,

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}+2x\cdot\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\cdot\frac{\partial F}{\partial v}},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}+2y\cdot\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\cdot\frac{\partial F}{\partial v}}$.

8. $\begin{cases} Q'_x = 4.5 - x - 0.25y = 0, \\ Q'_y = 5 - 2y - 0.25x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 2. \end{cases}$

9. $F(x,y) = R(x,y) - C(x,y)$, $\begin{cases} F'_x = -6x + 2y + 1\ 800 = 0, \\ F'_y = -4y + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 360, \\ y = 180. \end{cases}$

10. $F(P_1, P_2) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - C = -\dfrac{P_1^2}{5} + 32P_1 - \dfrac{P_2^2}{2} + 30P_2 - 1\ 395,$

$\begin{cases} F'_{P_1} = -\dfrac{2}{5}P_1 + 32 = 0, \\ F'_{P_2} = -P_2 + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 80, \\ P_2 = 30, \end{cases}$

$F_{\max} = 335.$

11. $F(x,y) = 10x + 9y - C(x,y)$, $\begin{cases} F'_x = 8 - 0.06x - 0.01y = 0, \\ F'_y = 6 - 0.01x - 0.06y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 120, \\ y = 80, \end{cases}$

$F(x,y) = 10x + 9y - C(x,y) = 310.$

12. $F(x,y) = 0.005x^2 y + \lambda(x + 2y - 150),$

$\begin{cases} F'_x = 0.01xy + \lambda = 0, \\ F'_y = 0.005x^2 + 2\lambda = 0, \\ F'_\lambda = x + 2y - 150 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 100, \\ y = 25. \end{cases}$

13. ① $\begin{cases} R'_x = 14 - 8y - 4x = 0, \\ R'_y = 32 - 8x - 20y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}, \\ y = 1; \end{cases}$

② $F(x,y) = R + \lambda(x + y - 1.5)$, $x + y = 1.5$, $\begin{cases} F'_x = 14 - 8y - 4x + \lambda = 0, \\ F'_y = 32 - 8x - 20y + \lambda = 0, \\ F'_\lambda = x + y - 1.5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1.5. \end{cases}$

14. 需要在产出量 $2x^\alpha y^\beta = 12$ 的条件下，求总费用 $P_1 x_1 + P_2 y$ 的最小值，为此作拉格朗日函数

$$F(x,y) = P_1 x + P_2 y + \lambda(12 - 2x^\alpha y^\beta),$$

$$\begin{cases} F'_x = P_1 - 2\lambda\alpha x^{\alpha-1} y^\beta = 0, & (1) \\ F'_y = P_2 - 2\lambda\beta x^\alpha y^{\beta-1} = 0, & (2) \\ 2x^\alpha y^\beta = 12. & (3) \end{cases}$$

由(1),(2) 得 $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{\beta x}{\alpha y}$,

故 $x = \dfrac{P_2\alpha}{P_1\beta}y$，代入(3)，$y = 6\left(\dfrac{P_1\beta}{P_2\alpha}\right)^\alpha$.

因此 $$x = 6\left(\dfrac{P_2\alpha}{P_1\beta}\right)^\beta.$$

由于此实际问题存在最小值，且驻点唯一，故当 $x = 6\left(\dfrac{P_2\alpha}{P_1\beta}\right)^\beta$，$y = 6\left(\dfrac{P_1\beta}{P_2\alpha}\right)^\alpha$ 时，投入总费用最少.

15. ① $F(Q_1, Q_2) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - C = 16Q_1 - 2Q_1^2 + 10Q_2 - Q_2^2 - 5,$

$$\begin{cases} F'_{Q_1} = 16 - 4Q_1 = 0, \\ F'_{Q_2} = 10 - 2Q_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 4, \\ Q_2 = 5, \end{cases} P_1 = 10, P_2 = 7;$$

$F(4,5) = 52$ 万元

② 由于价格统一，设 $P_1 = P_2 = P$，

$$\begin{aligned} F &= PQ_1 + PQ_2 - C \\ &= (P-2)(Q_1 + Q_2) - 5 \\ &= (P-2)\left(\frac{18-P}{2} + 12 - P\right) - 5 \\ &= -\frac{3}{2}P^2 + 24P - 47, \end{aligned}$$

$F' = -3P + 24 = 0, P = 8, Q_1 = 5, Q_2 = 4$，此时 $F = 49$ 万元.

所以实行价格差别策略总利润大.

16. $y = 2.233\,7x + 95.352\,4$.

17. (1) $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy = \int_{-1}^0 dy \int_0^{y+1} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y)dx$;

(2) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$;

(3) $\int_{-2}^2 dx \int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-3}^3 dy \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx$;

(4) $\int_0^4 dx \int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy = \int_1^5 dy \int_{2-\sqrt{-y^2+6y-5}}^{2+\sqrt{-y^2+6y-5}} f(x,y)dx$.

18. (1) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x,y)dy$;

(2) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{e^x} f(x,y)dx + \int_1^e dy \int_0^{e^x} f(x,y)dx$;

(3) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$;

(4) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-2y} f(x,y)dx$.

19. 图略.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$.

第九章　应用训练

1. 利润 = 总收入 − 总成本 = $40x - (x^2 + 12x + 100)$，

整理后利润函数是：$L(x) = -x^2 + 28x - 100$.

2. 设每天生产 x 只手表，则：总成本 = $2\,000 + 20x$.

要不亏本,需要满足:$40x \geqslant 2\ 000 + 20x$,

$$20x \geqslant 2\ 000, x \geqslant 100,$$

所以每天至少生产 100 块,才不会亏本.

3. 要不亏本,需要满足:

$$25x \geqslant 3\ 000 + 20x - 0.1x^2,$$

即 $x \geqslant 150$.

生产者不亏本时(销售收入不小于总成本)的最低产量为 150 台.

4. $Q = S$,即 $14.5 - 1.5p = -7.5 + 4p$,则 $p = 4$.

5. $E = \mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x + x/f(x) = Aax^{a-1} \cdot x/Ax^a = a$.

6. 设每日生产产品 x 个单位,则

每日的总成本函数:$C(x) = 130 + 6x (x \leqslant 100)$,

平均单位成本函数:$AC(x) = 130/x + 6 (x \leqslant 100)$.

7. 当 $p = 0$ 时,即 $Q = b$;

当 $Q = 0$ 时,即 $-ap + b = 0$,则 $p = b/a$.

8. 总成本函数:$C(x) = 0.01x^2 + 10x + 1\ 000$,

边际成本函数:$MC(x) = 0.02x + 10$,

总利润函数:$L(x) = 30x - (0.01x^2 + 10x + 1\ 000)$

$$= -0.01x^2 + 20x - 1\ 000,$$

边际利润函数:$ML(x) = -0.02x + 20$,

当 $ML(x) = 0$,即 $-0.02x + 20 = 0$ 时,$x = 1\ 000$.

9. 平均成本函数:$AC = x^2 - 4x + 20$,

边际成本函数:$MC = 3x^2 - 8x + 20$.

10. 需求价格弹性:$E_d = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}p \times p/Q = -5 \times p/(100 - 5p) = 5p/(5p - 100)$,

$p = 5$ 时,$E_d = -\dfrac{1}{3}$,这时提高价格,需求量下降的幅度较小,小于价格上升的幅度,总收益会增加;反之,总收益会减少.

$p = 10$ 时,$E_d = -1$,这时提高价格,需求量会以相同的幅度下降,总收益不变;反之,总收益也不变.

$p = 15$ 时,$E_d = -3$,这时降低价格,需求量上升的幅度较大,大于价格下降的幅度,总收益会增加;反之,总收益会减少.

第十章　应用训练

1. 分 4 个步骤:

(1) 各种一种小麦;

(2) 第 1 块地有 4 种小麦可以种;

(3) 第 2 块地有 3 种小麦可以种;

(4) 第 3 块地有 2 种小麦可以种；

(5) 第 4 块地有 1 种小麦可以种.

依据分步计数原理，可知有 $4\times3\times2\times1=24$ 种不同的试验方案.

2. 从总体上看由 A 到 B 的通电线路可分三类，

第一类，$m_1=3$ 条；

第二类，$m_2=1$ 条；

第三类，$m_3=2\times2=4$ 条.

所以，根据分类原理，从 A 到 B 共有 $N=3+1+4=8$ 条不同的线路可通电.

3. (1) $AB\overline{C}$ 是指当选的学生是三年级男生，但不是运动员；

(2) 只有在 $C\subset AB$，即 $C\subset A$，$C\subset B$ 同时成立的条件下才有 $ABC=C$ 成立，即只有在全部运动员都是男生，且全部运动员都是三年级学生的条件下才有 $ABC=C$；

(3) $C\subset B$ 表示全部运动员都是三年级学生，也就是说，若当选的学生是运动员，那么一定是三年级学生，即在除三年级学生之外其他年级没有运动员当选的条件下才有 $C\subset B$.

4. 检查结果及次品出现的频率为

抽取产品总件数 n	10	20	50	100	150	200	300
次品数 m	0	1	3	5	7	11	16
次品频率 m/n	0	0.050	0.060	0.050	0.047	0.055	0.053

从上表可以看出，次品出现的频率在 0.05 附近摆动，随着 n 的增大，次品出现的频率与 0.05 的差距越来越小，故该产品的次品频率的稳定值为 0.05.

5. 一级品的概率为 0.76.

6. (1) 由于 $AB\cup\overline{A}B=B$，且 $(AB)(\overline{A}B)=\varnothing$，则 $P(AB)+P(\overline{A}B)=P(B)$，于是 $P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.4-0.2=0.2$；

(2) $P(\overline{A})=0.5$，故 $P(A)=1-P(\overline{A})=0.5$，由于 $A-(\overline{A}B)\cup(A-B)$，且 $\overline{A}B$ 与 $A-B$ 互不相容，故 $P(A)=P(\overline{A}B)+P(A-B)$，则 $P(A-B)=P(A)-P(\overline{A}B)=0.5-0.2=0.3$；

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$；

(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$.

7. 设 $A=\{$零件是乙厂生产$\}$，$B=\{$零件是标准件$\}$，所求为 $P(AB)$.

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{300}{1\ 000}\times\frac{189}{300}=0.189.$$

8. 将三人编号为 1，2，3. 记 $A_i=\{$第 i 个人破译出密码$\}$，$i=1,2,3$. 已知，$P(A_1)=1/5$，$P(A_2)=1/3$，$P(A_3)=1/4$，则

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+A_3)&=1-P(\overline{A_1+A_2+A_3})\\&=1-P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

9. **提示**　抽签法 —— 编号、标签、搅拌、抽取，关键是“搅拌”后的随机性.

10. 其步骤如下：

第一步，将 30 个灯泡编号：00，01，02，03，…，29；

第二步，在随机数表中任取一数作为开始. 如从第 1 行第 6 组的数 16 开始；

第三步，从 16 开始向右读，依次选出 16，29，27，26，20，21，12，28，22，13 这 10 个编号的灯泡.

11. 抽样过程是：

(1) 按照 1∶5 的比例，应该抽取的样本容量为 $295 \div 5 = 59$，我们把 295 名同学分成 59 组，每组 5 人，第一组是编号为 $1 \sim 5$ 的 5 名同学，第 2 组是编号为 $6 \sim 10$ 的 5 名同学，依次下去，59 组是编号为 $291 \sim 295$ 的 5 名同学；

(2) 采用简单随机抽样的方法，从第一组 5 名学生中抽出一名学生，设编号为 1 $(1 \leqslant 5)$；

(3) 按照一定的规则抽取样本，抽取的学生编号为 $1 + 5k(k = 0,1,2,\cdots,58)$，得到 59 个个体作为样本，如当 $k = 3$ 时的样本编号为 3，8，13，…，288，293.

12. 采用分层抽样抽取. 每个个体被抽到的概率等于 $\frac{45}{900} = \frac{1}{20}$，则大一、大二、大三各年级抽取的学生人数分别为

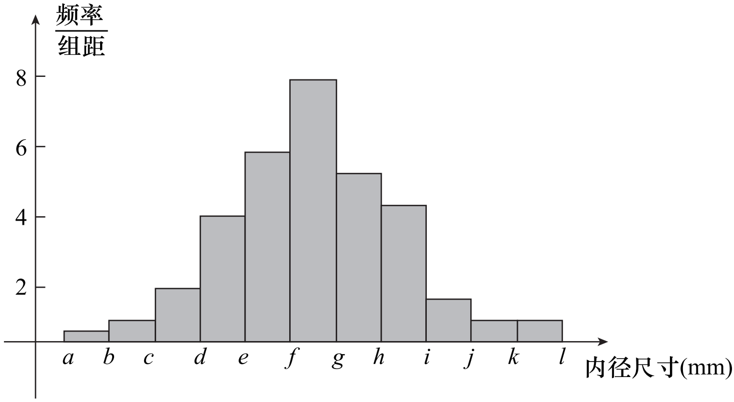
$400 \times \frac{1}{20} = 20$，$300 \times \frac{1}{20} = 15$，$200 \times \frac{1}{20} = 10$，

则大一、大二、大三各年级抽取的学生人数分别为 20，15，10.

13. 这组样本数据的频率分布表如下：

分组	频数	频率	累积频率	频率 / 组距
25.235 ～ 25.265	1	0.01	0.01	0.000 9
25.265 ～ 25.295	2	0.02	0.03	0.001 8
25.295 ～ 25.325	5	0.05	0.08	0.004 5
25.325 ～ 25.355	12	0.12	0.20	0.010 9
25.355 ～ 25.385	18	0.18	0.38	0.016 4
25.385 ～ 25.415	25	0.25	0.63	0.022 7
25.415 ～ 25.445	16	0.16	0.79	0.014 5
25.445 ～ 25.475	13	0.13	0.92	0.011 8
25.475 ～ 25.505	4	0.04	0.96	0.003 6
25.505 ～ 25.535	2	0.02	0.98	0.001 8
25.535 ～ 25.565	2	0.02	1.00	0.001 8
合计	100	1.00		

100 件产品尺寸的频率分布直方图为



$a=25.235$ $b=25.265$ $c=25.295$ $d=25.325$ $e=25.355$ $f=25.385$

$g=25.415$ $h=25.445$ $i=25.475$ $j=25.505$ $k=25.535$ $l=25.565$

14. 由于列表中 1.75 m 对应的人数最多，因此这组数据的众数应该是 1.75 m；

本题中人数的总个数是 17 人，奇数，从小到大排列后第 9 名运动员的成绩是 1.70 m；

平均数是：

$(1.50\times 2+1.60\times 3+1.65\times 2+1.70\times 3+1.75\times 4+1.80+1.85+1.90)\div 17=(3+4.8+3.3+5.1+7+1.8+1.85+1.9)\div 17=28.75\div 17\approx 1.69(\text{m})$；

这些运动员成绩的众数是 1.75 m、中位数是 1.70 m，平均数大约是 1.69 m.

15. $\overline{x}=1\ 476.2$，$s=78.730\ 934\ 2$.

第十一章　应用训练

1. (1) $(1)_2=1\times 2^0=1$；

$(10)_2=1\times 2^1+0\times 2^0=2$；

$$(1\ 011.01)_2=1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0+0\times 2^{-1}+1\times 2^{-2}$$
$$=8+2+1+\frac{1}{4}=11.25.$$

2. $8=(1\ 000)_2$；$0.125=(0.001)_2$；$37.25=(100\ 101.01)_2$

3. (1) 假；　(2) 真.

4. (1) $p\vee q$：$2+3=8$ 或 $12-9=1$(假)；$p\neg q$：$2+3=8$ 且 $12-9=1$(假)；

(2) $p\wedge q$：24 是 3 的倍数且 24 是 7 的倍数(假)；$p\vee q$：24 是 3 的倍数或 24 是 7 的倍数(真).

5. (1) $\neg p$：；三角函数 $y=\sin x$ 不是周期函数(假)；

(2) $\neg p$：$\exists a\in\{0,1,4,8,16,32\}$，$a\leqslant 0$(真).

6. (1) 能，可以表示为与运算：$F=AB$，其中 A，B，F 为逻辑变量，$A=1$ 表示甲打开锁，$A=0$ 表示甲不打开锁；$B=1$ 表示乙打开锁，$B=0$ 表示乙不打开锁；$F=1$ 表示保险箱打开，$F=0$ 表示保险箱不打开；

(2) 能，可以表示为或运算：$F=A+B$，其中 A，B 为逻辑变量，$A=1$ 表示王书记

参加会议，$A=0$ 表示王书记不参加会议；$B=1$ 表示张校长参加会议，$B=0$ 表示张校长不参加会议；

(3) 能，可以表示为非运算：$F=\overline{A}$，其中 A,F 为逻辑变量，$A=1$ 表示我参加会议，$A=0$ 表示我不参加会议；$F=1$ 表示小李参加会议，$F=0$ 表示小李不参加会议.

7.(1) $\overline{0}\cdot 1+\overline{1}+0+1=1\times 1+0+0+1=1$；

(2) $\overline{1}\cdot 0+\overline{0}+0=0\times 0+1+0=1$.

8. 逻辑函数 $F=AB+\overline{A}C$ 的真值表如下：

A	B	C	AB	$\overline{A}C$	$AB+\overline{A}C$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

9.(1) $BC+\overline{B}C=(B+\overline{B})C=C$；

(2) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C=\overline{A}\,\overline{B}(\overline{C}+C)=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A+B}$.

10.
$$\begin{aligned}AB+\overline{A}C+BC&=AB+\overline{A}C+BC(A+\overline{A})\\&=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC\\&=AB(1+C)+\overline{A}C(1+B)\\&=AB\cdot 1+\overline{A}C\cdot 1\\&=AB+\overline{A}C.\end{aligned}$$

11.(1)
$$\begin{aligned}F(A,B)&=\overline{A}+B=\overline{A}(B+\overline{B})+B(A+\overline{A})=\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}+AB+\overline{A}B\\&=\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}+AB;\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}F(A,B,C)&=AB+\overline{A}C+\overline{B}C\\&=AB(C+\overline{C})+\overline{A}C(B+\overline{B})+\overline{B}C(A+\overline{A})\\&=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}C\\&=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}C.\end{aligned}$$

12. 逻辑函数的最小项表达式：$F(A,B)=\overline{A}B+AB=m_1+m_2$.

13.(1) $F(A,B)=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B$ 的卡诺图如下：

A \ B	0	1
0	1	1
1	0	0

(2) $F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}$ 的卡诺图如下：

A \ BC	00	01	11	01
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0

14. $F(A,B,C)=A\overline{B}C+B+AB$ 的最小项表达式是：

$$F(A,B,C)=A\overline{B}C+B+AB=A\overline{B}C+B(A+\overline{A})(C+\overline{C})+AB(C+\overline{C})$$
$$=A\overline{B}C+ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+ABC+AB\overline{C}$$
$$=ABC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C};$$

其对应的卡诺图为：

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	1

15. 逻辑函数 $F(A,B,C)$ 的最小项表达式是 $F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}+C+A\overline{B}C+ABC$.

16. 方法 1：$F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}C+ABC$

$$=\overline{A}\,\overline{B}(\overline{C}+C)+AC(\overline{B}+B)$$
$$=\overline{A}\,\overline{B}+AC;$$

方法 2：

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0

第十二章　应用训练

1.（1）已知级数的前 n 项和是

$$s_n=(1-1)+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

因为 n 和 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以这个级数发散；

（2）已知级数的前 n 项和是

$$s_n=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(1+n),$$

因为 $\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty$，所以这个级数发散.

2. 由$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}(n=1,2,\cdots)$,得

$$s_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

因此 $S=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$,所以级数收敛,其和为 1.

3. $u_n=\dfrac{1}{n^n}\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}=v_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 收敛 $\Rightarrow$ 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$ 收敛.

4. 调和级数的部分和有:

$S_1=1$,

$S_2=S_{2^1}=1+\dfrac{1}{2}$,

$S_4=S_{2^2}=\left[1+\dfrac{1}{2}\right]+\left[\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right]>\left[1+\dfrac{1}{2}\right]+\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{2}{2}$,

$S_8=S_{2^3}=\left[1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)\right]+\left[\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}\right]>\left[1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right]+\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{3}{2}$.

由数学归纳法,得

$S_{2^k}\geqslant 1+\dfrac{k}{2}, k=0,1,2,\cdots$

而 $\lim\limits_{k\to+\infty}S_{2^k}=\lim\limits_{k\to+\infty}\left[1+\dfrac{k}{2}\right]=+\infty$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在,即调和级数发散.

5. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_{n+1}}{s_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\sin\dfrac{1}{3^{n+1}}}{n\sin\dfrac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{3^{n+1}}}{\dfrac{1}{3^n}}=\dfrac{1}{3}<1$,所以这个正项级数收敛.

6. $\because\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2n+1}{2^n}}{\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore$ 原级数绝对收敛.

7. (1) 因为 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$,显然

$s(0)=0, s'(x)=1-x+x^2-\cdots=\dfrac{1}{1+x}, (-1<x<1)$

两边积分得 $\int_0^x s'(t)\mathrm{d}t=\ln(1+x)$,即:$s(x)-s(0)=\ln(1+x)$,所以 $s(x)=\ln(1+x)$.

又因为 $x=1$ 时 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛，所以 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$ 的收敛区域是$(-1,1]$；

(2) 令 $t=x-1$，上述级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t)^n}{n\cdot 2^n}$，因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2^n\cdot n}{2^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{2},$$

所以，收敛半径 $R=2$. 收敛区间为 $|t|<2$，即 $-1<x<3$.

当 $x=3$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，因此原级数的收敛域为$[-1,3)$.

8. $\int_0^x[\ln(3+x)]'\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{3+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^x\frac{1}{1+\frac{x}{3}}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)n\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}}{n+1}$，$|x|<3$.

9. a^x 的各阶导数$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$，而$(a^x)^{(n)}|_{x=0}=\ln^n a$，

故 a^x 在 $x=0$ 邻域上的泰勒级数写为 $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ln^n a$.

10. $$f(x)=\frac{1}{x^2+3x-4}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+4}\right),$$

$$\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{6-(x+5)}=-\frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\frac{x+5}{6}}=-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+5}{6}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{6^{n+1}},$$

$$\frac{1}{x+4}=\frac{1}{-1+(x+5)}=-\frac{1}{1-(x+5)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(x+5)^n,$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x-4}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+4}\right)=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{6^{n+1}}+\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(x+5)^n.$$