目录

第一章

函数

函数描述变量之间的对应关系，图形则是它们的直观表示．在实际生活中遇到的图形更是多种多样，但它们不见得都是简单函数的图形，寻求它们的数学表述——方程、了解方程所表示图像的性质等即成为人们必须要研究的课题，也是我们很好使用函数（或方程）的基础．本章我们主要介绍函数及其图形、性质．

广大青年要坚定不移听党话、跟党走，怀抱梦想又脚踏实地，敢想敢为又善作善成，立志做有理想、敢担当、能吃苦、肯奋斗的新时代好青年，让青春在全面建设社会主义现代化国家的火热实践中绽放绚丽之花。

——习近平(1953—)(中国共产党中央委员会总书记，中共中央军事委员会主席，中华人民共和国主席，中华人民共和国中央军事委员会主席)

1.1 函数的概念

1.1.1 健身费用、存款与心电图

在讨论函数的概念之前，我们先来讨论一个实际生活中的例子.

例 1 某健身中心实行会员制，会员享受健身场地使用价格的八折优惠，但需每年交纳会员费 500 元. 问若某人只在此健身中心健身，每年花在健身方面的钱至少是多少(按价格计算)才能真正受惠? 一年内实际受惠多少钱?

解：假设按价格计算此人一年内健身所花费用为 x 元，则获得会员优惠应为 $0.2x$，但因交纳了 500 元会员费，因此实际获得的优惠 y 是 $0.2x-500$，即 $y=0.2x-500$. 按此公式我们可以计算出表 1–1.

表 1–1

商品钱数 x(元)	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	3 500	4 000
受惠钱数 y(元)	–500	–400	–300	–200	–100	0	100	200	300

从表 1–1 中我们可以看出至少需花 2 000 元以上健身才能真正受惠.

例 2 假定某人 1997 年 8 月在中国工商银行以活期方式存入人民币 1 000 元，此时人民币活期存款的年利率为 1.98%，试计算从存入之日起 1 年后、2 年后、……x 年后取款时的总金额.

解：1 年后，本金为 1 000 元，利息为 $1\,000\times1.98\%$ 元，总额为

$$1\,000+1\,000\times1.98\%=1\,000\times(1+1.98\%)=1\,000\times1.019\,8(\text{元}).$$

第一年不取，待第二年后，本金为 $1\,000\times1.019\,8$ 元，利息为 $1\,000\times1.019\,8\times1.98\%$，总额为 $1\,000\times1.019\,8^2$ 元；同理，第三年后，总额为 $1\,000\times1.019\,8^3$ 元.

故 x 年后总额 $y=1\,000\times1.019\,8^x$(元).

例 3 心电图 (EKG) 可以显示病人的心率模式. 它是由心电图仪直接根据病人的心率情况绘制的. 如图 1–1 所示，它是某被测者的心电图，由图形可以看出，它的图像上每一点都代表着相应时间对应的电流活动值. 从而，这里的图形又表示了变量(时间 t)与变量(电流活动值 I)间的对应关系.

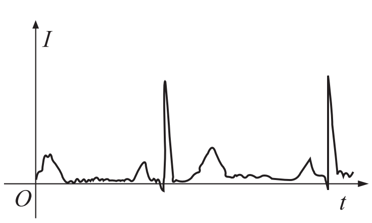


图 1–1

上述三个例子，都是要确定变量间对应关系的问题，类似的问题还很多，如股票价格曲线、生物生长量计算等. 变量间的对应关系就是下面要介绍的函数.

1.1.2　函数的概念及其表示

前述的三个例子都涉及了函数，我们给出函数的如下定义 .

定义 1.1　设 D 为一集合，若对于 D 中每一个元素 x，按照对应规则 f，都有集合 S 中的唯一一个元素 y 与之对应，则称这一对应规则定义了一个函数，记为 $y=f(x)$. 其中 D 称为函数的定义域，x 称自变量，y 称因变量 (对于一个确定的 x 而言，也称为函数值). 所有函数值组成的集合 S 称为函数 $f(x)$ 的值域，它满足 $S\subseteq\mathbf{R}$. .

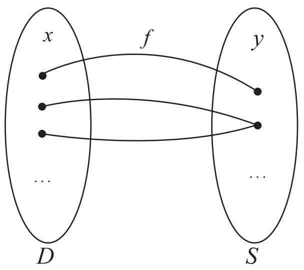


图 1–2

可见，所谓函数就是一种对应规则 . 如图 1–2 所示，函数 $f(x)$ 是集合 D 与集合 S 之间的一种对应关系或对应规则，它使得集合 D 中的每个元素均与集合 S 中的一个元素对应，且每个 D 中的元素只与 S 中的一个元素对应 .

如定义域为 $\{x|x$ 是人的编号 $\}$(即由所有人的编号组成定义域) 的生日函数

$$g(x)=x\text{ 的出生日期}$$

给定了人的编号与日期之间的一种对应关系，如果张强是 2002 年 8 月 20 日出生的，则函数 g 把定义域中的元素“张强的编号”与值域中的元素 20020820 对应起来，称函数 g 在“张强的编号”这点的值是 20020820，记为：

$$g(\text{张强的编号})=20020820.$$

尽管定义域和值域中的元素形式可以多种多样，但在本书中，我们只讨论定义域及值域中的元素均为实数的函数，这种函数称为一元函数 .

按照函数定义，给定一个函数，必须给定一个定义域及一个对应规则 . 但对于实值函数而言，如果不特殊说明，则默认其定义域为能使函数表达式计算出实数结果的实数集合 .

例 4　求函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 和 $g(r)=\dfrac{2}{\sqrt{r^2-1}}$ 的定义域 .

解：对于函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ，要想 $f(x)$ 是实数，必须 $1-x^2\geqslant 0$，所以函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$.

对于函数 $g(r)=\dfrac{2}{\sqrt{r^2-1}}$，要想 $g(r)$ 是实数，必须 $r^2-1>0$，即 $r>1$ 或 $r<-1$，所以函数 $g(r)=\dfrac{2}{\sqrt{r^2-1}}$ 的定义域为 $\{r\,|\,r>1$ 或 $r<-1\}$.

1.1.3　区间和邻域

区间是用得较多的一类数集 . 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$. 数集

$$\{x|a<x<b\}$$

称为开区间，记作 (a, b), 即

$$(a, b)=\{x|a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点，这里 $a\notin(a, b)$，$b\notin(a, b)$. 数集

$$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间，记作 $[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点，这里 $a\in[a, b]$, $b\in[a, b]$.

类似地可说明：

$$[a, b)=\{x|a \leqslant x < b\}, (a, b]=\{x|a < x \leqslant b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开区间 .

以上这些区间都称为有限区间 . 数 $b-a$ 称为这些区间的长度 . 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段 . 闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来，分别如图 1－3(*a*) 与 (*b*) 所示 . 此外还有所谓无限区间 . 引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a, +\infty)=\{x|x \geqslant a\}, (-\infty, b)=\{x|x < b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1－3(*c*)、(*d*) 所示 .

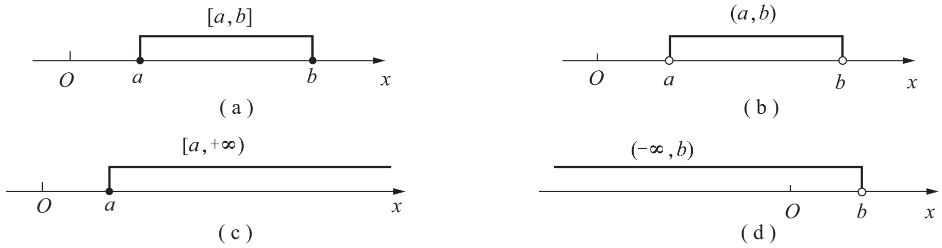


图 1－3

全体实数的集合 **R** 也可记作 $(-\infty, +\infty)$，它也是无限区间 .

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示 .

邻域也是一个经常用到的概念 . 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta)=\{x|a-\delta < x < a+\delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径（图 1－4).

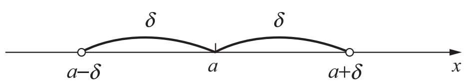


图 1－4

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a, \delta)=\{x||x-a| < \delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a, \delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体 .

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉 . 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的空心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$, 即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x|0 < |x-a| < \delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x \neq a$.

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域 .

两个闭区间的直积（也叫笛卡儿乘积）表示 xOy 平面上的矩形区域 . 例如

$$[a, b]\times[c, d]=\{(x, y)|x\in[a, b], y \in [c, d]\}$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域，这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a, b]$ 和闭区间 $[c, d]$.

1.1.4　函数的图像与函数的零点

如果我们把满足例 1 中关系式 $y=0.2x-500$ 的一组 x 和 y，用平面直角坐标系中的点 (x, y) 标记，根据中学中有关平面解析几何的知识可知，所有这样的点组成的图形是坐标系中的一条直线，如图 1－5 所示，图中直线上的“·”就是表 1－1 中列出的对应点 .

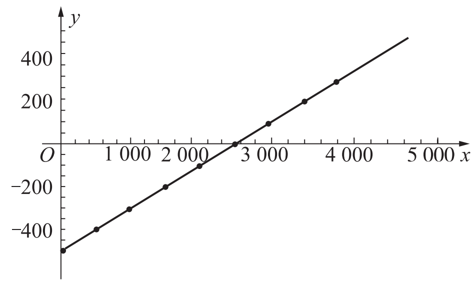


图 1–5

一般来说，函数描述了定义域中元素与值域中元素之间的对应关系，把这种对应关系用元素对的形式描述出来，即 $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$，对于实值函数，每一个数对 $(x, f(x))$ 都可以用平面直角坐标系中的一个点表示，所有这种点组成一个图形或曲线 .

定义 1.2 对于实值函数，每一个数对 $[x, f(x)]$ 都可以用平面直角坐标系中的一个点表示，所有这种点组成的图形称为函数 $y = f(x)$ 的图像，或这一函数的函数曲线 .

定义 1.3 函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴交点的横坐标是方程 $f(x) = 0$ 的根，这里的根称为函数 $y = f(x)$ 的零点 .

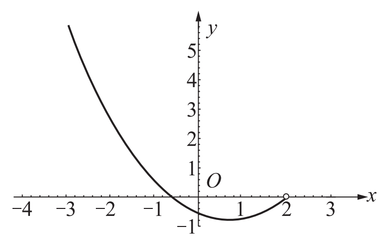


图 1–6

例 5 函数曲线如图 1–6 所示，求函数的定义域、值域以及零点 .

解： 观察函数 $y = f(x)$ 的图像，因曲线横坐标为 2 的点有标记“○”，所以不包括 2，曲线点的横坐标为小于 2 的实数，故函数 $y = f(x)$ 的定义域为小于 2 的实数集合，即 $(-\infty, 2)$；曲线上有一最低点，这一点的纵坐标为 −0.6，从而曲线上点的纵坐标为大于等于 −0.6 的实数，值域为大于等于 −0.6 的实数集合，即

$[-0.6, +\infty)$；因点 $(2, 0)$ 标记“○”，不是曲线上的点，从而曲线与 x 轴只有一个交点 $(-0.6, 0)$，故函数 $y = f(x)$ 的零点为 −0.6.

1.1.5 分段函数

例 6 北京市当前的出租车 (白天、不叫车、单程、无等候) 计价方式如下：

(1) 起步价调整为 13 元 /3 公里；

(2) 超出 (含) 三公里至十五公里以内的公里数每公里按 2.3 元计费；

(3) 超出 (含) 十五公里以外的公里数 (每公里加收 50% 空驶费) 按 3.45 元计费；

(4) 燃油附加费 1 元 .

试给出行驶里程与所付车费之间的函数关系 .

解： 设某人乘坐出租车行驶里程为 x 公里，应付车费为 y 元 . 则：

当 $0 < x < 3$ 时，$y = 13 + 1 = 14$； 当 $3 \leqslant x < 15$ 时，$y = 14 + (x - 3) \times 2.3$；当 $x \geqslant 15$ 时，$y = (x - 15) \times 3.45 + 41.6$. 所求函数表达式为：

$$y = \begin{cases} 14 & 0 < x < 3, \\ 2.3(x-3) + 14 & 3 \leqslant x < 15, \\ 3.45(x-15) + 41.6 & x \geqslant 15. \end{cases}$$

例 6 中我们见到的函数关系，其函数定义不是用一个表达式完成的，而是把整个定义域分成若干个区间段，与一个区间段内的 x 对应的函数值 y 用一个表达式给出 .

定义 1.4 如果一个函数，其定义不是用一个表达式完成的，而是把整个定义域分成若干个区间段，与一个区间段内的 x 对应的函数值 y 用一个表达式给出 . 这种函数我们称之为分段函数 .

分段函数的图形在每一个分段上与相应表达式函数的图形相同 .

例 7 已知函数

$$f(x)=\begin{cases} x2, & x>0, \\ 2x, & -2<x\leqslant 0, \\ -x-1, & x\leqslant -2. \end{cases}$$

(1) 求 $f(1)$、$f(0)$、$f(-1)$、$f(-2)$ 和 $f(-3)$;

(2) 画出函数图形 .

解: (1) 当 $x=1$ 时，条件 $x>0$ 成立，按表达式 x^2 计算 $f(1)=1^2=1$ 当 $x=0$ 时，条件 $-2<x\leqslant 0$ 成立，按表达式 $2x$ 计算 $f(0)=2\times 0=0$; ；同理

$$f(-1)=2\times(-1)=-2,$$

$$f(-2)=-(-2)-1=1,$$

$$f(-3)=-(-3)-1=2.$$

(2) 函数 $f(x)$ 图形由抛物线 $y=x^2$ 的 $(0,+\infty)$ 段、直线 $y=2x$ 的 $(-2,0]$ 段和直线 $y=-x-1$ 的 $(-\infty,-2]$ 段组成，如图 1-7 所示 .

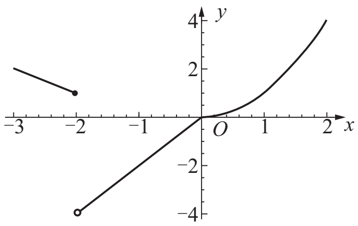


图 1-7

注意:

(1) 分段函数是用几个式子表示一个函数，而不是几个函数;

(2) 分段函数需要分段求值、分段作图 .

1.1.6 函数的特性

1. 有界性

从前面的讨论可以看到，函数的函数值取决于函数的对应规则和函数的定义域 . 有些函数的函数值只在某一有限的范围内，即局限于某一有限区间，从而这类函数的图形可以夹在两条平行于横轴的直线之间，称这类函数为有界函数；另一些函数的函数值可以遍布整个 (纵) 数轴，或数轴的一边，即函数值的取值区间为无穷区间，这类函数，找不到将其图形夹在中间的两条平行于 x 轴的直线，称这类函数为无界函数 .

如函数 $y=\sin x$ 是有界函数，而函数 $y=x3$ 则是无界函数 .

数学上，函数的有界可以描述为:

定义 1.5 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，且满足：存在常数 $M>0$，使得对于任何 $x\in I$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上无界 .

2. 单调性

我们已经看到，有一些函数的函数值随自变量取值的增大而不断增大，有一些函数的函数值则随着自变量取值的增大而不断减小，而另一些则随着自变量的增大，函数值有时增大有时减小 . 随着自变量的增大，函数值也增大的函数我们称其为单调增函数；随着自变量的增大，函数值减小的函数我们称其为单调减函数；单调增函数和单调减函数统称为单调函数 . 而那些随着自变量的增大，函数值增减不定的函数我们称其为非单调函数 . 如函数 $f(x)=x^3$ 是单调增函数，$f(x)=-x^3$ 是单调减函数，$f(x)=x^2-2x-3$ 是非单调函数 .

有时我们需要把非单调函数的定义域分成几个区间段，讨论自变量取值限定在某区间段上时函数值的增减 . 如函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间 $(-\infty,1)$ 内单调减小，在区间 $(1,+\infty)$ 内单调增大 . 函数在其上为单调增或单调减的区间称为函数的单调区间 .

单调增函数与单调减函数的数学描述：

定义 1.6 函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果满足：

对于任何 $x_1, x_2 \in I$，由 $x_1<x_2$ 即可导出 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$] 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增 (或单调减).

3. 奇偶性

定义 1.7 如果函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，即对于定义域 I 上的任一元素 x，$f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果函数 $f(x)$ 的图形关于原点对称，即对于定义域 I 上的任一元素 x，$f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数 .

如函数 $f(x)=x^2-4$ 是偶函数，函数 $f(x)=x3$ 是奇函数 .

4. 周期性

定义 1.8 给定函数 $f(x)$，如果有实常数 $l>0$，使对于定义域内的任一 x，有 $f(x+l)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是周期为 l 的周期函数 . 通常我们说周期函数的周期是指满足上述条件的最小正数，即最小正周期 .

周期函数的图像可以由函数在某一周期内的图像，沿 x 轴将这一段按周期延拓而得到 .

1.1.7 反函数

先看一个例子 .

例 8 已知 $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$, $g(x)=2x+1$, ，试求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解： $f[g(x)]=f(2x+1)=\dfrac{(2x+1)-1}{2}=x$, $g(f(x))=g\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=2\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+1=x.$

定义 1.9 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 S，如果对于值域 S 中每一个 y，都可由方程 $f(x)=y$ 唯一确定出 x 与 y 对应，则得到一个定义在集合 S 上的新函数，称它为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$, $y\in S$.

对反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数 .

通常用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常将 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$, $x\in S$. 显然，反函数的定义域等于直接函数的值域，反函数的值域等于直接函数的定义域，且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数 .

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f-1(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称 (图 1－8).

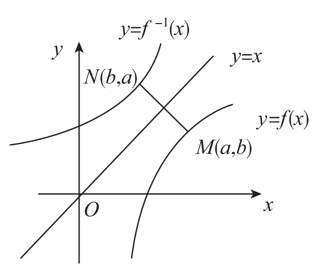


图 1−8

由反函数定义可得求反函数的步骤如下：

(1) 从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 交换字母 x 与 y 的位置，并注意到反函数的定义域为直接函数的值域 .

【例 9】求下列函数的反函数

(1) $y=2x-1, x\in(-\infty, +\infty)$;

(2) $y=4-x^2(x\geqslant 0)$.

解：

(1) 先从 $y=2x-1$ 解出 x，得

$$x=\frac{1}{2}(y+1)$$

交换 x 与 y 的位置，得所求的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x+1),\ x\in(-\infty,\ +\infty);$$

(2) 从 $y=4-x^2(x\geqslant 0)$ 得 $x^2=4-y$ 解出 x, 由于 $x\geqslant 0$, 得

$$x=\sqrt{4-y}$$

交换 x 与 y 的位置，得所求的反函数为：$y=\sqrt{4-x}(x\leqslant 4)$ (图 1-9)

注意：单调函数才有反函数，如二次函数在 R 内没有反函数，但在其单调增(减)的定义域内，可以求反函数.

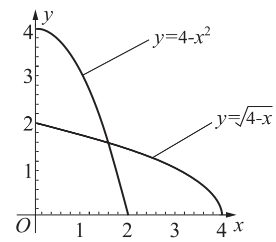


图 1-9

习题 1.1

A 组

1. 求以下函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$；　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　(3) $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

2. 求以下函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$；(2) $y=x^2-1$.

3. 请回答以下问题：

(1) 如果函数 $y=f(x)$ 满足：存在常数 M, N，使得 $N\leqslant f(x)\leqslant M$，问：函数 $y=f(x)$ 是否有界?

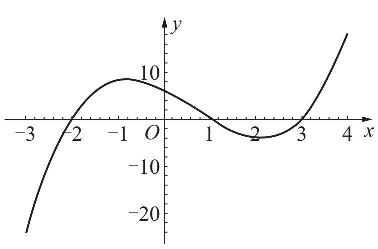
(2) 有界函数的图像具有什么特征?

(3) 奇函数的图像具有什么特性? 偶函数的图像具有什么特性?

(4) 周期函数的图像具有什么特性?

(5) 单调增、单调减函数的图像分别具有什么特性?

4. 给定函数的图像如右图所示. 请问：(1) 相应函数的零点大约是多少? (2) 图像在 y 轴上的截距大约是多少?



4 题图

5. 给定分段函数(符号函数)

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

请问，这一函数的定义域是什么? 试画出这一函数的图像.

B 组

1. 求以下函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}$；　(2) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$.

2. 试判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$;　(2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;　(3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

3. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足：对于任何 $x_1, x_2\in[a, b]$，当 $x_1<x_2$ 时，就有 $f(x_1)>$

$f(x_2)$ 成立．则函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上必然单调递减．试用这一结果判断下述函数在其定义域内的单调性．

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$；　　　　(2) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

4. 某公司每月要支付一笔固定费用 300 元 (用于房租与薪水等)，它所出售的食品的生产费用为 1 元 /kg，而销售价格为 2 元 /kg. 试问：它每月应当销售多少千克食品才能使公司的收支保持平衡?

5. 设某企业对某种产品制定的销售策略是：购买 20 kg 及其以下按 10 元 /kg 收费；购买量如果不大于 200 kg，则超过 20 kg 的部分按 7 元 /kg 收费；如果购买量超过 200 kg 的部分，按 5 元 /kg 收费，试给出购买量 $x(kg)$ 与费用 y(元) 的函数关系．

1.2　初等函数及其图形特征

1.2.1　复合函数

函数运算包括函数的和、差、积、商及复合，是利用简单函数构造复杂函数的基本方法．函数的和、差、积、商运算很简单，在此我们重点介绍函数的复合运算．

定义 1.10　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=g(x)$，若 $u=g(x)$ 的值域的全部或部分在 $y=f(u)$ 的定义域内，则 y 通过 u 成为 x 函数，记作 $y=f[g(x)]$ (如图 1–10 所示). 称为由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数．通常称 $f(u)$ 为外层函数，$g(x)$ 为内层函数，u 是中间变量，x 是自变量．

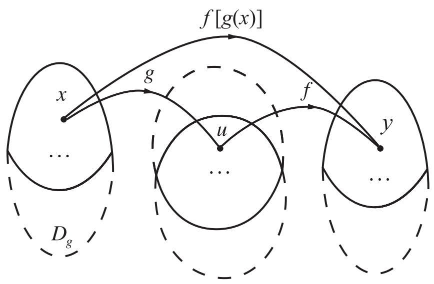


图 1–10

复合函数不仅可由两个函数，也可以由多个函数相继进行复合而成．

我们讨论的函数通常都可以由简单函数经函数运算得到．如函数 $y=\sin^2(-x+\dfrac{\pi}{2})$ 可通过函数 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=-x+\dfrac{\pi}{2}$ 复合得到，其中 u、v 均为中间变量．需注意的是，不是任何两个函数都可以进行复合运算．按定义 1.10 中所给的两个函数，只有当外层函数 $f(u)$ 的定义域与内层函数 $g(x)$ 的值域的交集不等于空集合时，这两个函数才能构成复合函数．如 $f(u)=\arcsin u$，$u=g(x)=2+x^2$， ，可知 $f(u)$ 的定义域为 $[-1, 1]$，而 $g(x)$ 的值域为 $[2, +\infty)$，因为 $[-1, 1]\cap[2, +\infty)=\Phi$，所以复合函数 $f[g(x)]=\arcsin(2+x^2)$ 是无意义的；然而，复合函数 $g[f(x)]=2+(\arcsin x)^2$ 是有意义的．

1.2.2　基本初等函数及其图像

基本初等函数是我们中学已经学过的函数，在此，我们仅对它们及它们的图形、性质作以简要复习．除了常值函数 $y=C$ 外，基本初等函数还包括以下函数类．

1. 幂函数

形式为 $y=x^{\alpha}$(α 为实常数) 的函数称为幂函数．

幂函数的定义域与指数常数 α 有关．如当 $\alpha=\dfrac{2}{3}$ 时，定义域为 $(-\infty, +\infty)$；当 $\alpha=\dfrac{3}{2}$ 时，定义域

为 $[0, +\infty)$；当 $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ 时，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$；当 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 $(0, +\infty)$.

但无论 α 为何值，幂函数 $y=x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上总是有定义的，且图像经过点 $(1, 1)$.

从图 1－11 中我们可以得出，幂函数 $y=x^\alpha$ 有如下性质：

(1) 当 $\alpha>0$ 时，图像都经过点 $(1, 1)(0, 0)$；在 $[0, +\infty)$ 上是增函数；在第一象限内，当 $\alpha>1$ 时，图像开口向上，$0<\alpha<1$ 时，图像开口向右；且幂函数 $y=x^\alpha$ 的图像与幂函数 $y=x^{\frac{1}{\alpha}}$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称 .

(2) 当 $\alpha<0$ 时，图像都经过点 $(1, 1)$；在 $(0, +\infty)$ 上是减函数；在第一象限内，当 x 从右侧趋于原点时，图像在 y 轴右方无限接近 y 轴，当 x 趋于 $+\infty$ 时，图象在 x 轴上方无限地逼近 x 轴 .

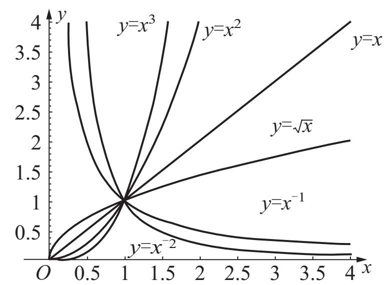


图 1－11

(3) 当 α 为奇数时，幂函数为奇函数；当 α 为偶数时，幂函数为偶函数 .

2. 指数函数和对数函数

形式为 $f(x)=ax$ 的函数（其中底数 $a>0$ 且 $a \neq 1$）称为指数函数，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，即所有实数 . 指数函数 $f(x)=ax$ 的图像如图 1－12 所示 .

从图 1－12 可以看到，指数函数 $f(x)=ax$ 是无界函数，其函数值恒大于 0；当 $0<a<1$ 时，是单调减函数；当 $a>1$ 时，是单调增函数 . 该函数无零点，与 y 轴的交点为 $(0, 1)$.

常用的指数函数是 $f(x)=ex$，其中 e 是一个无理数，e=2.718 28⋯.

形式为 $f(x)=\log_a x$（其中底数 $a>0$，且 $a \neq 1$）的函数称为对数函数，其定义域为 $(0, +\infty)$，即 $x>0$. 对数函数的图像如图 1－13 所示 .

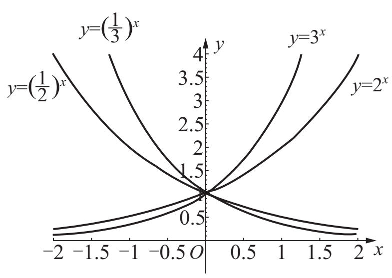


图 1－12

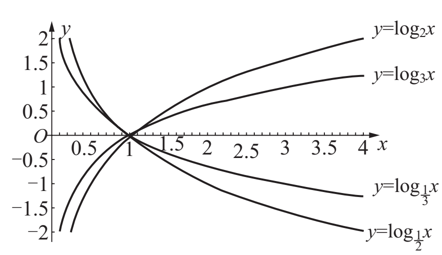


图 1－13

从图 1－13 中我们可以看到，对数函数 $f(x)=\log_a x$ 是一个无界函数 . 当 $0<a<1$ 时，其为单调减函数；当 $a>1$ 时，其为单调增函数 . 该函数的零点为 1，与 y 轴无交点 .

对数函数 $f(x)=\log_a x$ 与指数函数 $g(x)=a^x$ 互为反函数 .

常用的对数函数有 $f(x)=\log_{10} x$ 和 $f(x)=\log_e x$. 前者是以 10 为底的对数函数，记作 $f(x)=\lg x$，称为常用对数函数，后者是以 e 为底的对数函数，记作 $f(x)=\ln x$，称为自然对数函数 .

3. 三角函数和反三角函数

三角函数包括：

(1) 正弦函数：$y=\sin x$，如图 1－14 所示，为有界函数、周期函数、奇函数 .

(2) 余弦函数：$y=\cos x$，如图 1－15 所示，为有界函数、周期函数、偶函数 .

(3) 正切函数：$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，如图 1－16 所示，为无界函数、周期函数、奇函数 .

(4) 余切函数：$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，如图 1－17 所示，为无界函数、周期函数、奇函数 .

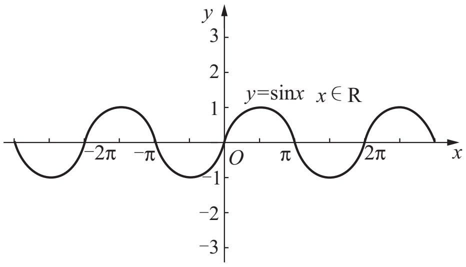


图 1–14

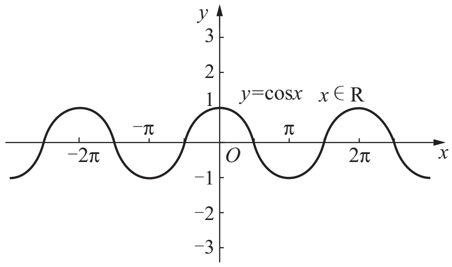


图 1–15

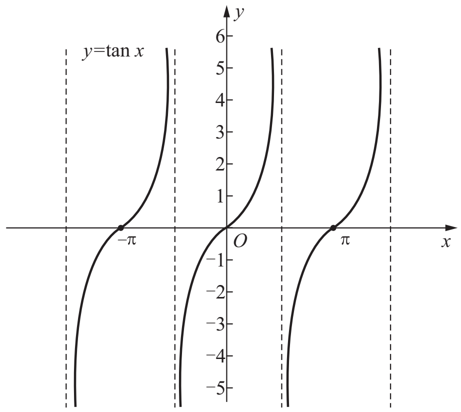


图 1–16

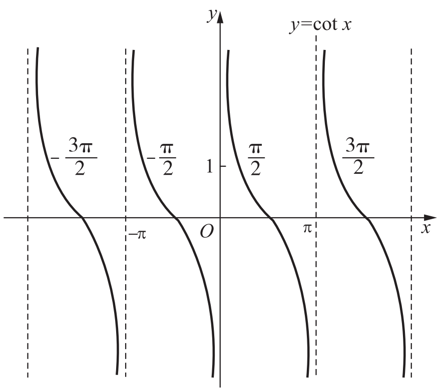


图 1–17

(5) 正割函数；$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，如图 1－18 所示 .

(6) 余割函数：$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，如图 1－19 所示 .

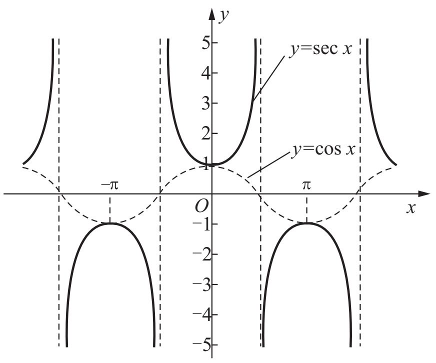


图 1–18

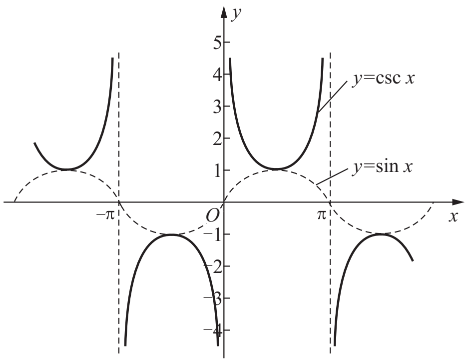


图 1–19

从给出的三角函数图像中我们还可以看到，对于每个函数的图像都有平行于横轴的直线与图像交于多个点，这使得它们没有严格意义下的反函数 . 但如果我们对每个函数限定一个区间，可以使得在这个区间上定义的三角函数有反函数 . 这就是我们常说的反三角函数 .

(7) 反正弦函数：$y=\arcsin x$，定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$，函数图像如图 1－20 所示 .

(8) 反余弦函数：$y=\arccos x$，定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$，函数图像如图 1－21 所示 .

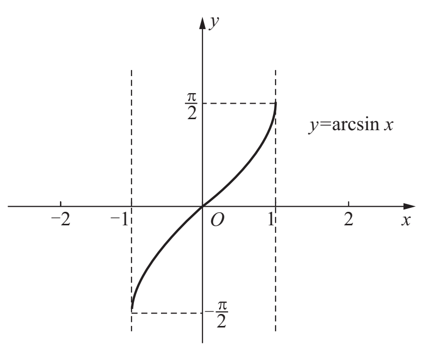


图 1-20

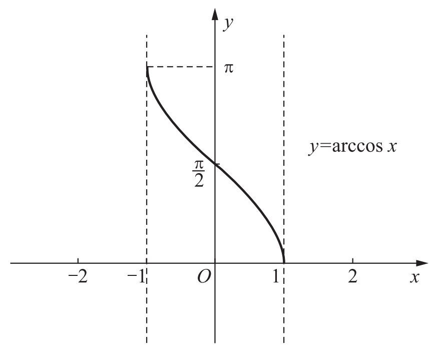


图 1-21

(9) 反正切函数：$y=\arctan x$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，反正切函数的图像如图 1－22 所示 .

(10) 反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, \pi)$，反余切函数的图像如图 1－23 所示 .

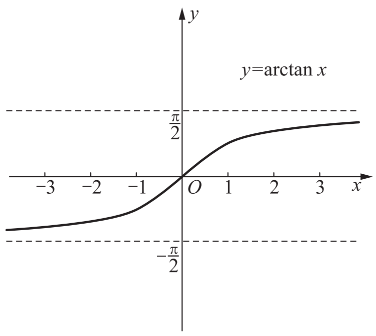


图 1-22

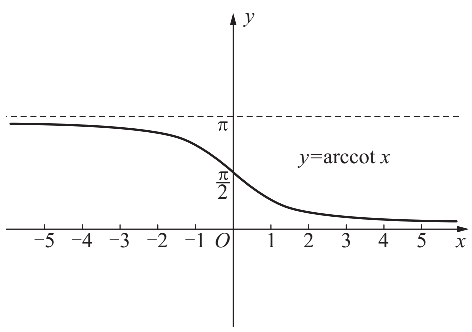


图 1-23

1.2.3 初等函数

基本初等函数经过有限次四则运算以及复合运算而成的函数称为初等函数 . 例如函数 $y=\sin e^x+2x^3-x\ln x+\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 为一个初等函数 .

符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

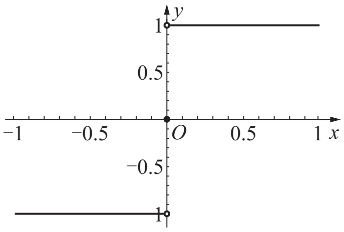


图 1-24

的图像如图 1－24 所示，为一分段函数，它不是初等函数 .

一般来说，分段函数不是初等函数，但也有例外，如

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

为分段函数，但由于 $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$ 是由幂函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合而成的，因此，这一函数也是一个初等函数 .

习题 1.2

A 组

下列复合函数是由哪些简单函数复合构成的?

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$；　　(2) $y=(1+\ln^2 x)^2$；

(3) $y=\cos(x^2+\cot x)$；　　(4) $y=\mathrm{e}^{\cos x}$．

B 组

下列复合函数是由哪些简单函数复合构成的?

(1) $y=2^{\arcsin(1+\sqrt{x+1})}$;　　(2) $y=\cos^2\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$;

(3) $y=\ln(1+\sqrt{\tan x^2})$；　　(4) $y=(1+2^{2x^2+1})^3$．

1.3　由方程确定的函数

1.3.1　由方程确定的隐函数

前面所遇到的函数一般均为 $y=f(x)$ 的形式．例如，$y=\arcsin x$，$y=\sin x+\sqrt{1-x^2}$ 等．这类函数叫做显函数．

而 $x^2+y^2=1$，通过解方程得，$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 当取 $y>0$ 部分时可以得出 x 的函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，此函数也可以认为是由方程 $x^2+y^2=1(y>0)$ 所确定的函数．

遵照函数定义，方程确定函数也可以这样理解．在方程 $2x-3y+1=0$ 中，给 x 以任一确定值，相应地就可确定 y 的值(例如，当 $x=0$ 时，$y=\dfrac{1}{3}$；当 $x=1$ 时，$y=1$ 等)，根据函数的定义，y 是 x 的函数，即方程 $2x-3y+1=0$ 确定了 y 是 x 的一个函数．而方程 $x^2+y^3-1=0$，对任何实数值 x，同样确定了 y 是 x 的一个函数．

定义 1.11　在方程 $F(x, y)=0$ 中，当 x 在某区间 I 内取任一值时，相应地总有满足该方程的唯一确定的 y 值与之对应，那么方程 $F(x, y)=0$ 在该区间 I 内确定了一个函数．称这一函数为由方程确定的隐函数．

把一个隐函数化成显函数，例如由方程 $2x-3y+1=0$ 解出 y，得显函数 $y=\dfrac{2x+1}{3}$，叫做隐函数的显化．但并不是所有的隐函数都可以显化，有的隐函数显化是很困难的，甚至不可能．例如，由方程 $\mathrm{e}^y+xy-\mathrm{e}^x=0$ 确定的 y 是 x 的函数就不易显化．

1.3.2　由参数方程确定的函数

方程 $x^2+y^2=1$ 可以确定一个函数，参数方程 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$一样可以确定函数．

定义 1.12　当自变量 x 在某区间内取任一值时，若相应地总有满足参数方程

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t) \end{cases} (a \leqslant t \leqslant b)$$

的唯一 y 值与之对应，从而参数方程确定了函数，这称为由参数方程确定的函数．

例如，参数方程 $\begin{cases} x = \cos\ t, \\ y = \sin\ t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ 确定了函数，容易看出，这一函数实际上就是 $y = \sqrt{1 - x^2}$ ．

1.3.3　函数关系的建立

在此用两个例子介绍函数关系的建立．

例 10　（复利问题）设银行将数量为 A_0 的款贷出，每期利率为 r. 若一期结算一次，则 t 期后连本带利可收回 $A_0(1+r)^t$. 若每期结算 m 次，则一次结算的利率应为 $\frac{r}{m}$，从而 t 期后连本带利可收回

$$A_0\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m\right]^t = A_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

此函数既可看成期数 t 的函数，也可看成结算次数 m 的函数．

现实生活中一些量的生长 $(r > 0)$ 和衰减 $(r < 0)$ 就遵从这种规律，而且是立即产生立即结算．例如细胞的繁殖、树木生长、物体冷却、放射性元素的衰减等．

例 11　某矿厂 A 要将生产出的矿石运往铁路旁的冶炼厂 C 冶炼．已知该矿距冶炼厂所在铁路垂直距离为 a km，它的垂足 B 到 C 的距离为 b km. 又知铁路运价为 m 元 /(t・km)，公路运价是 n 元 /(t・km)($m < n$)，为节省运费，拟在铁路上另修一小站 M 作为转运站，那么总运费的多少取决于 M 的位置．试求出总运费与距离 $|BM|$ 的函数关系（图 1－25).

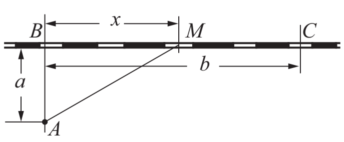


图 1－25

解：设总运费记为 y，距离 $|BM|$ 记为 x km，由于

总运费 ＝ 铁路运费 ＋ 公路运费，

由图 1－25 可以看出

$$y = n|AM| + m|MC| = n\sqrt{x^2 + a^2} + m(b - x),$$

这就是总运费与距离 $|BM|$ 的函数关系，且容易知道这一函数的定义域为 $[0, b]$.

习题 1.3

A 组

1. 试确定由下述方程所确定函数的表达式 $y=f(x)$.

(1) $x^3+y^3=10$;　　(2) $\begin{cases} x = \sin\ t, \\ y = \cos\ t \end{cases} \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

2. 某有机体死亡 t 年后所剩的放射性 $C14$ 含量 Q 由式

$$Q=Q_0 e^{-0.000\,121t}$$

给出，其中 Q_0 是初始量．

(1) 考古挖掘出土的某头盖骨含有原来 $C14$ 含量的 15%，估计该头盖骨的年龄；

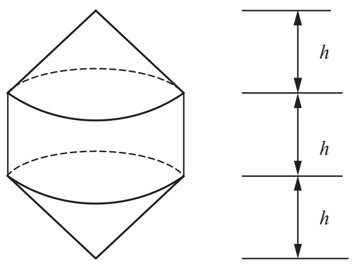
(2) 试根据此方程计算 $C14$ 的半衰期（即含量减少至开始量一半所用时间）.

3. 一企业生产某种商品 x 件时的总成本为 $C(x)=100+2x+x^2$（万元）. 若每售出一件该商品的收入是 50 万元，求生产 30 件时的总利润和平均利润．

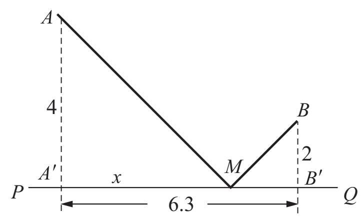
4. 设一矩形的周长为 $2p$，现绕其一边旋转一周生成一圆柱体，求圆柱体体积 V 与底面半径 x 的函数关系 .

5. 某电信公司在其服务区内对每户每座电话机的使用收费标准规定为：每月所打电话的次数不超过 50 次的，只收月租费 25 元；超过 50 次的则每次加收 0. 2 元 . 求每户每月电话费用 y(元) 和用户当月实际所打电话次数 x 的变化规律 .

6. 要制作一个浮筒，使该浮筒由三个部分组成，一个圆柱面与两个相同的圆锥面 (如 6 题图) 焊接而成，其中两个圆锥和一个圆柱的高都相等，问：当使用某种材料，浮筒全部沉入水中的条件下，用浮筒中间圆柱的半径如何表示它的浮力 ? 单位：m



6 题图　浮筒的体积



7 题图　耕牛饮水路线问题

7. 耕牛在地点 A 工作完毕后要回到棚舍 B，图中必须到河流 PQ 边 M 处饮水，根据如 7 题图所示的数据，试 $A'\ \ M=x$，试用 x 表示这头牛由 A 到 B 走过路程的总和 .

B 组

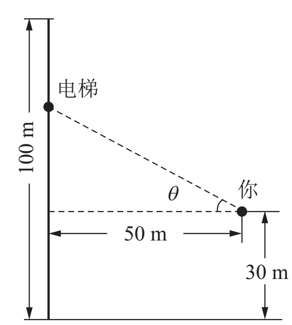
1. 如果下述方程所确定函数的表达式为 $y=f(x)$，试根据以下方程求 $f(0)$.

(1) $e^{xy}+x+y=\pi$;　　(2) $\begin{cases} x=\dfrac{\cos\ t}{1-\sin\ t}, \\ y=\dfrac{1+\sin\ t}{1-\cos\ t}. \end{cases}$

2. 为取悦顾客，有些饭店的电梯装在大楼外面 . 假定一饭店高 100 m，你站在一处离大楼 50 m，高 30 m 的窗户旁 . 电梯正以 10 m/s 的常速度下降，开始 (设此时电梯在楼顶) 时记 $t=0$(单位：s)，设 θ 为你的水平视线与看到电梯的视线之间的夹角 (如 2 题图所示).

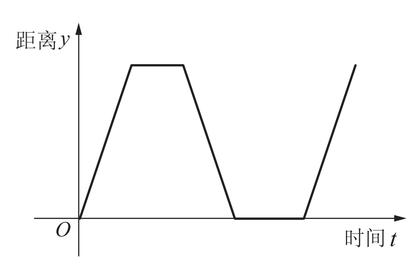
(1) 求电梯从楼顶下降过程中距离地面的高度 $h(t)$ 的公式 ;

(2) 利用 (1) 的答案，求 θ 依时间 t 变化的函数表达式 .



2 题图

3. 一位旅客住在旅馆里，3 题图描述了他的一次行动 . 设距离 y 的单位为 km，时间 t 的单位为 h，且这位旅客的这次行动可描述为：他以 2 km/h 的速度出外办事行走 1 h 到达办事处，在办事处用 1 h 办完一件事，以同样的速度回到旅馆，休息 1 h，又以同样的速度离开旅馆 . 你能给右图标上具体的数值，精确描述这位旅客的这次行动并用一个函数解析式表达出来吗?



3 题图

4. 某停车场收费标准为：凡停车不超过 2 h 的，收费 2 元；以后每多停车 1 h(不到 1 h 仍以 1 h 计) 增加收费 0.5 元，但停车时间最长不能超过 5 h. 试建立停车费用与停车时间之间的函数模型 .

1.4 总结与提高

1.4.1 本章内容小结

1. 函数的有关概念

函数 设 D 为一个集合，若对于 D 中每一个元素 x，按照对应规则 f，都与集合 $\mathbf{R}$ 中的唯一一个元素 y 对应，则称这一对应规则定义了一个函数，记为 $y=f(x)$．其中 x 称自变量，y 称因变量（对于一个确定的 x 而言，y 也称为函数值）．所有函数值组成的集合 S 称为函数 $f(x)$ 的值域，它满足 $S\subseteq\mathbf{R}$．

函数的图像 对于实值函数，每一个数对 $[x, f(x)]$ 都可以用平面直角坐标系中的一个点表示，所有这种点组成的图形称为函数 $y=f(x)$ 的图像，也称函数曲线．

函数的零点 函数 $f(x)$ 的图形与 x 轴交点的横坐标是方程 $f(x)=0$ 的根，这里的根称为函数 $y=f(x)$ 的零点．

分段函数 如果一个函数，其定义不是用一个表达式完成的，而是把整个定义域分成若干个区间段，与一个区间段内的 x 对应的函数值 y 用一个表达式给出．这种函数称为分段函数．

分段函数的图像在每一个分段上与相应表达式函数的图像相同．

2. 函数的性质

(1) 有界性 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，且满足：存在常数 $M>0$，使得对于任何 $x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上无界．

直观特征 有界函数的图像可以夹在两条平行于横轴的直线之间．

(2) 单调性 函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果满足：对于任何 $x_1, x_2\in I$，由 $x_1<x_2$ 即可导出 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增（或单调减）．

直观特征 单调增函数的图像随自变量取值的增大而上升；单调减函数的图像随自变量取值的增大而下降．

(3) 奇偶性 如果函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，即对于定义域 $[-a, a]$ 内的任一元素 x，$f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称，即对于定义域 $[-a, a]$ 内的任一元素 x，$f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数．

(4) 周期性 给定函数 $f(x)$，若有实常数 $l>0$，使对于定义域内的任一 x，有 $f(x+l)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是周期为 l 的周期函数．周期函数的周期通常是指满足上述条件的最小正数．

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 S，如果对任意一个 $y\in S$，D 内只有一个数 x 与 y 对应，使得 $y=f(x)$，这时把 y 看作自变量，x 看作因变量，就得到一个新的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，习惯写作 $y=f^{-1}(x)$．

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与原来函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称．

4. 函数的运算

函数运算包括函数的和、差、积、商与复合．和、差、积、商可以认为是函数在它们共同定义域内的每一点函数值的相应运算．

复合函数 设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，u 是 x 的函数，$u=g(x)$，若 $u=g(x)$ 的值域的全部或部分能使 $y=f(u)$ 有意义，则称 y 通过中间变量 u 构成了 x 的函数，并称 y 为 x 的复合函数，记作 $y=f[g(x)]$. 其中 x 是自变量，u 是中间变量 .

5. 基本初等函数及其图形

基本初等函数共有六类：

(1) 常值函数 $y=C$.

(2) 形式为 $f(x)=x^{\alpha}$ (α 为实常数) 的函数称为幂函数 . 定义域与 α 的取值有关 .

(3) 形式为 $f(x)=a^{x}$ 的函数 (其中底数 $a>0$ 且 $a\neq 1$) 称为指数函数，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 常用的指数函数是 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$，其中 e 是一个无理数，e=2.718 28….

(4) 形式为 $f(x)=\log_a x$ (其中底数 $a>0$，且 $a\neq 1$) 的函数称为对数函数，其定义域为 $(0, +\infty)$. 对数函数 $f(x)=\log_a x$ 与指数函数 $g(x)=a^{x}$ 互为反函数 .

常用的对数函数有 $f(x)=\lg x$ 和 $f(x)=\ln x$. 前者是以 10 为底的对数函数，称为常用对数函数 ; 后者是以 e 为底的对数函数，称为自然对数函数 .

(5) 三角函数有六个：

正弦函数：$y=\sin x$，为有界函数、周期函数、奇函数 .

余弦函数：$y=\cos x$，为有界函数、周期函数、偶函数 .

正切函数：$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，为无界函数、周期函数、奇函数 .

余切函数：$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，为无界函数、周期函数、奇函数 .

正割函数：$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，为无界函数、周期函数、偶函数 .

余割函数：$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，为无界函数、周期函数、奇函数 .

(6) 反三角函数常指以下几个：

反正弦函数：$y=\arcsin x$，定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数：$y=\arccos x$，定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$.

反正切函数：$y=\arctan x$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, \pi)$.

注意六类基本初等函数的图像与性质间的对应 .

6. 初等函数

基本初等函数经过有限次的四则运算以及复合运算而成的函数称为初等函数 .

7. 方程确定的函数

方程确定隐函数：在方程 $F(x, y)=0$ 中，当 x 在某区间内取任一值时，相应地，总有满足该方程的唯一确定的 y 值与之对应，那么就说方程 $F(x, y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数 .

参数方程所确定的函数：当自变量 x 在某区间内取任一值时，若相应地总有满足参数方程 $\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t) \end{cases}$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 的唯一 y 值与之对应，从而参数方程确定了函数，称这一函数为由参数方程确

定的函数．

注意根据问题的特征，如物理规律、数量或几何对应关系等建立函数关系．

1.4.2 知识拓展——图片与动画制作

1. 构图举例

可以通过更改参数画图、更改参数方程画图、组合参数方程（方程进行加、减、乘、除）后画图、画图后可以用图形叠加、裁减、放缩、拉伸、旋转等手段得到新的图形，达到构图目的．

例如：利用心形线方程，给出以下命令

```
xx=Sin[t/4];n=Pi/256;
    g2=ParametricPlot[{xx Sin[t],xx Cos[t]},{t,0,Pi},PlotStyle->RGBColor[1,1,1]];
    g3=ParametricPlot[{xx Sin[t],xx Cos[t]},{t,3Pi,4Pi},PlotStyle->RGBColor[1,1,1]];
    g4=Graphics[({Hue[#1/(2Pi)],Disk[{0,0},1,{#1,#1+n}]}&)/@Range[0,2Pi,n]];
    Show[g4,g2,g3,Axes->None,PlotRange->All,AspectRatio->1]
```

得到所构出的图形如图 1-26 所示：

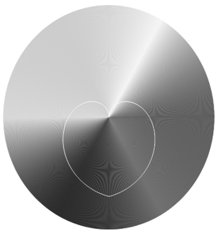


图 1-26

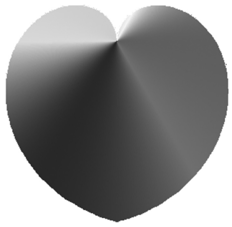


图 1-27

用其他图形编辑器（如画笔等）裁剪掉周边多余部分，得到图片如图 1-27 所示．

2. 用 mathematica 软件制作动画

先选择运动轨线：单摆运动的轨线为下半圆周：$\begin{cases} x=R\cos\ t, \\ y=R\sin\ t \end{cases}$ $(-\pi\leqslant t\leqslant 0)$，单摆锤沿此轨线往返移动，因此，单摆锤关键帧位置应沿此改变，及坐标为 $(R\cos\ t,\ R\sin\ t)$；吊锤线为原点 $(0,0)$ 与单摆锤关键帧位置 $(R\cos\ t,\ R\sin\ t)$ 的连线，这是本动画的第二个要素．取 t 的不同值，如 $t=0,\ -\dfrac{\pi}{10},\ -\dfrac{2\pi}{10},\cdots,-\pi$，将以上两个要素“点与线”制成关键帧图，Mathematica 命令如下：

```
For[i=0,i<=10,i++,
    Show[Graphics[{RGBColor[0,0,1],
    Line[{{0,0},{Cos[-i Pi/10],Sin[-i Pi/10]}}]}],
    Graphics[{RGBColor[1,0,0],Disk[{Cos[-i Pi/10],Sin[-i Pi/10]},0.1]}],
    PlotRange→{{-1.3,1.3},{-1.3,0.3}}]];
(* 以下命令给出返程部分关键帧 *)
For[i=10,i>=0,i--,
    Show[Graphics[{RGBColor[0,0,1],
    Line[{{0,0},{Cos[-i Pi/10],Sin[-i Pi/10]}}]}],
    Graphics[{RGBColor[1,0,0],Disk[{Cos[-i Pi/10],Sin[-i Pi/10]},0.1]}],
    PlotRange→{{-1.3,1.3},{-1.3,0.3}}]]
```

执行，并选中播放相应图片，观察动画效果．注意：考虑到单摆锤在最低点与其他点的运动速度的不

同，在 Flash 中设计时，应以最低点为中心，对称地逐步加大帧数设计 .

3. 一些常用曲线及其方程

(1) 箕舌线 $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$，参数方程 $\begin{cases}x=2a\tan\theta,\\ y=2a\cos^2\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$.

(2) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，参数方程

$$\begin{cases}x=a\sqrt{\cos\ 2\theta}\cos\theta,\\ y=a\sqrt{\cos\ 2\theta}\sin\theta\end{cases}\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4}\right).$$

(3) 叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$，参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3},\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}.\end{cases}$

(4) 摆线 $x=a\arccos\left(1-\dfrac{y}{a}\right)-\sqrt{2ay-y^2}$，参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin\ t),\\ y=a(1-\cos\ t).\end{cases}$

(5) 心脏线 $x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$，参数方程 $\begin{cases}x=a(1-\cos\ t)\cos\ t,\\ y=a(1-\cos\ t)\sin\ t.\end{cases}$

(6) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，参数方程 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$

(7) 阿基米德螺线，参数方程 $\begin{cases}x=at\cos\ t,\\ y=at\sin\ t.\end{cases}$

(8) 等角 (对数) 螺线，参数方程 $\begin{cases}x=e^{at}\cos\ t,\\ y=e^{at}\sin\ t.\end{cases}$

(9) 三叶玫瑰线，参数方程 $\begin{cases}x=a\sin\ 3t\cos\ t,\\ y=a\sin\ 3t\sin\ t.\end{cases}$

(10) 四叶玫瑰线，参数方程 $\begin{cases}x=a\cos\ 2t\cos\ t,\\ y=a\cos\ 2t\sin\ t\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=a\sin 2t\cos t,\\ y=a\sin 2t\sin t.\end{cases}$

(11) 心形线，参数方程 $\begin{cases}x=a\ \sin\dfrac{t}{2}\cos\ t,\\ y=a\ \sin\dfrac{t}{2}\sin\ t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

函数概念的演变小史

复习题

A 组

1. 选择题：

(1) 下列函数中，关于原点对称的是 (　　).

A. $y=\dfrac{\sin\ x}{x}$　　B. $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{2}$　　C. $y=x^3+\cos x$　　D. $y=\dfrac{|x|}{x}$

(2) $y=\sqrt{3-x}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$ 的定义域是 (　　).

A. $(-1, 3)$　　B. $[-1, 3)$　　C. $(-1, 3]$　　D. $[-1, 3]$

(3) $y=10^x-2$ 的反函数是 (　　).

A. $y=1+\lg(x+2)$　　B. $y=1-\lg(x+2)$　　C. $y=\lg(x+2)$　　D. $y=-\lg(x+2)$

(4) 函数 (　　) 在区间 $(0, 1)$ 内有界 .

A. $y=\dfrac{1+2x}{x^2}$　　B. $y=\lg x$　　C. $y=e^{-\frac{1}{x}}$　　D. $y=\dfrac{1}{2^x-1}$

(5) $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上有定义 $(a>0)$, 则 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 是 (　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 单调函数

(6) 函数 $y=a\sqrt[3]{x^3+1}$ 是由 (　　) 复合而成 .

A. $y=a^u,\ u=v^{\frac{1}{3}},\ v=x^3+1$　　B. $y=a^u,\ u=x^3+1$

C. $y=au^{\frac{1}{3}},\ u=x^3+1$　　D. $y=a^{\frac{1}{3}u},\ u=x^3+1$

(7) 函数 $y=x-\ln(1+x)$ 在 (　　) 内单调减少 .

A. $(-1, +\infty)$　　B. $(-\infty, 0)$　　C. $(-\infty, -1)$　　D. $(-1, 0)$

2. **填空题:**

(1) 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\ln(4-x)$ 的定义域为 ____________.

(2) 若 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, 则 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$ ____________.

(3) 设 $f(2x)=3x-1$ ，且 $f(a)=4$ ，则 $a=$ ____________.

(4) 已知函数 $f(x+t)=f(x)+f(t)$ 对任何实数都成立，则 $f(0)=$ ____________.

3. 设某商品的供给函数 (即供给量作为价格的函数) 为 $S(x)=x^2+3x-70$，需求函数 (即需求量作为价格的函数) 为 $D(x)=410-x$，其中 x 为价格 .

(1) 在同一坐标系中，画出 $S(x)$, $D(x)$ 的图形;

(2) 若该商品的需求量与供给量均衡，求其价格 .

4. 生物在稳定的理想状态下，细菌的数量按指数模型增长，

$$Q(t)=ae^{kt}\ (\text{表示 } t \text{ 分钟后的细菌数}),$$

假设在一定的条件下，开始 $(t=0)$ 时有 2 000 个细菌，且 20 min 后已增加到 6 000 个，试问 :1 h 后将有多少个细菌?

5. 设某公司产品的固定成本为 15 000 元，每个产品的可变成本为 $140+0.04x$，其中 x 是产品的总数，每个产品的价格 P 与销量 x(注意：产品总数与销量相等) 的关系为 $P=300-0.06x$. 试给出总成本函数，总收益函数及利润函数 .

B 组

1. **填空题:**

(1) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 ____________.

(2) $y=e^{\sqrt{\sin x}}$ 是由函数 ____________ 复合而成的 .

(3) 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则下列函数的奇偶性为：$f[g(x)]$ 是 ____________；$g[f(x)]$ 是 ____________；$f[f(x)]$ 是 ____________.

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (-3\le x<0), \\ -2x+1 & (0\leqslant x\leqslant 2) \end{cases}$ 的定义域是 ____________；$f(0)$ =____________；$f(-1)=$ ____________；$f(2)$ =____________.

(5) 若 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\ln x$，则 $f[g(\sqrt{e})]=$ ____________；$g[f(0)]=$ ____________.

2. 如果一个数列的后项是由前项的某一固定函数来表示的，则称这样的表达式为递推式或递归函数 . 递归函数所表示的数列可以由第一项出发，不断使用递推式而计算出所有项 . 给定数列 $f(n)$ 满足 $f(n+1)=\sqrt{2+f(n)}$ 及 $f(1)=2$ ，求这个数列的前五项 .

3. 一种玩具进货每件 6 元，若售价定为 7 元，估计可卖出 100 件；而售价每降低 0.1 元，则可多卖出 50 件，问：应进货多少件，每件售价为多少元，可获最大利润？最大利润是多少元？

4. 一幅维米尔 (Vermeer)(1632—1675) 的绘画含有其原有 C_{14}(半衰期为 5 730 年) 含量的 99.5%. 根据这一信息，是否能判断出该画是不是赝品？请解释理由 .

5. 设一个家庭贷款购房的能力 (y) 是其偿还能力 (u) 的 100 倍，而这个家庭的偿还能力 (u) 是月收入 (x) 的 20%.

(1) 试把此家庭贷款购房能力 (y) 表示成月收入 (x) 的函数；

(2) 如果这个家庭的月收入是 4 000 元，那么这个家庭购买住房可贷款多少？

集双冠于一身的阿基米德