



公共基础课创新型精品教材

高等数学简明教程

GAODENG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

主 编 徐 涛

高等数学简明教程

主 编 徐 涛

北京出版集团公司
北京出版社

北京出版集团公司
北 京 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学简明教程 / 徐涛主编. —北京: 北京出版社, 2019.8 (2021 重印)

ISBN 978-7-200-14796-4

I. ①高… II. ①徐… III. ①高等数学—高等职业教育—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 153274 号

高等数学简明教程

GAODENG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

主 编: 徐 涛

出 版: 北京出版集团公司

北 京 出 版 社

地 址: 北京北三环中路 6 号

邮 编: 100120

网 址: www.bph.com.cn

总发行: 北京出版集团公司

经 销: 新华书店

印 刷: 定州市新华印刷有限公司

版印次: 2019 年 8 月第 1 版 2021 年 6 月第 3 次印刷

开 本: 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张: 9.5

字 数: 197 千字

书 号: ISBN 978-7-200-14796-4

定 价: 28.50 元

教材意见建议接收方式: 010-58572162 邮箱: jiaocai@bphg.com.cn

如有印装质量问题, 由本社负责调换

质量监督电话: 010-82685218 010-58572162 010-58572393

第一章 极限与连续	1
1.1 函数	1
1.2 极限	6
1.3 极限的运算	10
1.4 函数的连续性	15
复习题一	19
第二章 导数与微分	21
2.1 导数的概念	21
2.2 函数的求导法则	27
2.3 高阶导数 隐函数求导及参数方程求导	30
2.4 微分及其应用	35
复习题二	40
第三章 微分中值定理及导数应用	42
3.1 微分中值定理	42
3.2 洛必达法则	45
3.3 函数的单调性	48
3.4 函数的极值与最值	51
3.5 曲线的凹凸性与拐点 简单函数图形描绘	55
复习题三	60
第四章 不定积分	62
4.1 不定积分的概念和性质	62
4.2 换元积分法	67
4.3 分部积分法	73
复习题四	75

第五章 定积分及其应用	77
5.1 定积分的概念与性质	77
5.2 微积分基本定理	83
5.3 定积分换元法与分部积分法	87
5.4 定积分的应用	90
5.5* 广义积分	99
复习题五	102
第六章* 大数据概述	105
6.1* 关于大数据	105
6.2* MATLAB 软件介绍	113
附录 I 常用积分公式	125
附录 II 常用初等数学公式	134
习题参考答案	137
参考文献	145

第一章 极限与连续

极限是高等数学中研究微积分的基本方法和工具,连续是函数的一个重要特性,是研究函数微积分的基本条件.微积分的主要研究对象为函数,本章简要地复习函数的相关知识,学习极限与连续的有关内容,奠定学习微积分的基础.

1.1 函数

在客观世界里存在着许许多多的变量,它们之间存在着各种各样的联系,函数就是对这种量与量之间联系的具体描述.例如,圆的面积与半径之间的联系、正方形面积与边长之间的联系、公司员工的报酬与员工的工作之间的联系、企业利润与生产产品的数量之间的联系等,我们都可以用适当的函数来描述这些关系.

一、邻域

定义 1 设 $x_0, \delta \in \mathbb{R}$ 且 $\delta > 0$, 则开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$, 即

$$U(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x | |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

点 x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径 (如图 1-1 所示).

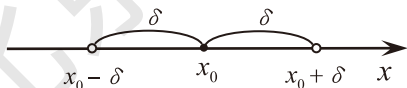


图 1-1

为了叙述方便,有时把邻域 $U(x_0, \delta)$ 一分为二, $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, $(x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域.

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉,点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后,称为点 x_0 的去心 δ 邻域,记为 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 即

$$\dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

注意 这里 $0 < |x - x_0|$ 就表示 $x \neq x_0$.

二、函数的概念

定义 2 设 x, y 是两个变量, D 是给定的非空数集, 如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时, 变量 y 按照一定的法则 f 都有唯一确定的数值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**（或**函数**），数集 D 称为函数的**定义域**， f 称为函数的**对应法则**，所有对应的变量 y 的值（即函数值）构成的集合称为函数的**值域**，一般用 M 表示。显然，当两个函数的定义域和对应法则相同时，值域肯定也会相同，两个函数完全一样，是相同的函数；否则，两个函数不相同。

例 1 函数 $y = x$ 和 $y = (\sqrt{x})^2$ 是否是相同的函数？

解 此两函数显然不是相同的函数，前一个函数定义域为全体实数，而后一个函数的定义域为非负实数，两者定义域不相同，所以不是相同的函数。

三、函数的性质

中学里有介绍过函数的单调性、奇偶性和周期性，这里就不重复了，我们着重介绍下函数的另外一个性质：有界性。

定义 3 设函数 $y = f(x)$ ，如果存在正数 M ，使得对于定义域内的所有 x ，恒有 $|f(x)| \leq M$ 成立，则称该函数为**有界函数**（或称该函数具有**有界性**），否则称该函数**无界**。

例如，正弦函数 $y = \sin x$ 在定义域内恒有 $|\sin x| \leq 1$ ，所以这是有界函数；而函数 $y = x + 1$ 在定义域内不满足有界性的定义，为无界函数。当然，对于无界函数，我们可以考虑在某个特定的区间内函数是否有界。如函数 $y = x + 1$ 在区间 $(0, 2)$ 内有界，因为此时恒有 $|x + 1| \leq 3$ 成立。

四、反函数

定义 4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，值域为 M 。如果对于 M 中的每个数 y ，在 D 中都有唯一确定的数 x 与之对应，且使得 $y = f(x)$ 成立，则确定了一个以 y 为自变量， x 为因变量的函数，称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，记为 $x = f^{-1}(y)$ ，其定义域为 M ，值域为 D 。由于我们习惯上用 x 表示自变量， y 表示函数值，因此将反函数中的 x 和 y 互换，即反函数一般记为 $y = f^{-1}(x), x \in M$ 。

求反函数的一般步骤为：先由 $y = f(x)$ 解出 x ，得 $x = f^{-1}(y) = g(y)$ ，看它是否符合函数的条件。如果它是函数，再将其中的 x, y 互换即得 $y = f(x)$ 的反函数 $y = g(x)$ 。

例 2 试求函数 $y = 2x$ 的反函数。

解 由 $y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2}$ 可知，其反函数为 $y = \frac{x}{2}$ 。

例 3 试求函数 $y = 2^x$ 的反函数。

解 由 $y = 2^x \Rightarrow x = \log_2 y \Rightarrow y = \log_2 x$ 可知，其反函数为 $y = \log_2 x$ 。

例 4 试求函数 $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的反函数。

解 由 $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x = \arcsin y, y \in [-1, 1]$ 。

$\Rightarrow y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$ 可知，其反函数为 $y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$ 。

注意 运算符号“ $\arcsin$ ”表示正弦运算的逆运算，即反正弦运算，该反函数我们

称之为反正弦函数.

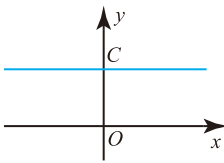
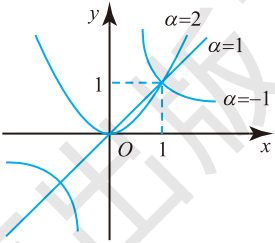
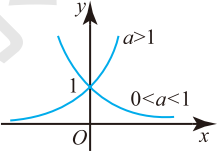
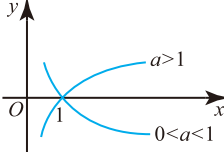
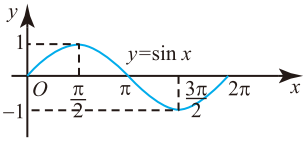
类似地, 我们可以得到其他三个反三角函数:

$$y = \arccos x, x \in [-1, 1]; y = \arctan x, x \in (-\infty, +\infty); y = \operatorname{arccot} x, x \in (-\infty, +\infty).$$

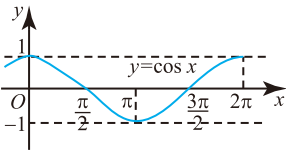
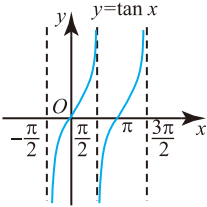
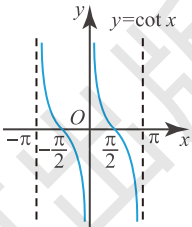
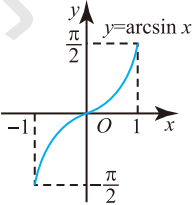
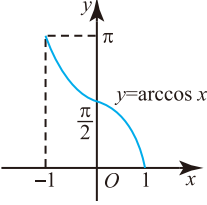
五、基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数, 其表达式、定义域和值域、图形和性质等如表 1-1 所示.

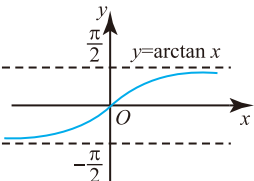
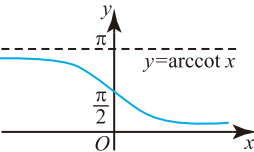
表 1-1 基本初等函数的表达式、定义域、值域、图形和性质

函数	定义域和值域	图形	性质
常数函数 $y = C$ (C 为常数)	$x \in \mathbf{R},$ $y \in \{C\}$		1. 非增非减; 2. 偶函数; 3. 有界; 4. 以任意正数为周期
幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为实数)	由 α 的取值 决定		1. 图形均过点 (1,1); 2. 在第一象限内, 当 $\alpha > 0$ 时, 单调增加; 当 $\alpha < 0$ 时, 单调减少
指数函数 $y = a^x$ (a 为常数, $a > 0$, 且 $a \neq 1$)	$x \in \mathbf{R},$ $y \in (0, +\infty)$		1. 图形均过点 (0,1); 2. 图形均在 x 轴上方; 3. 当 $0 < a < 1$ 时, 单调减少, 当 $a > 1$ 时, 单调增加
对数函数 $y = \log_a x$ (a 为常数, $a > 0$, 且 $a \neq 1$)	$x \in (0, +\infty),$ $y \in \mathbf{R}$		1. 图形均过点 (1,0); 2. 图形在 y 轴右侧; 3. 当 $0 < a < 1$ 时, 单调减少, 当 $a > 1$ 时, 单调增加
三角函数 正弦函数 $y = \sin x$	$x \in \mathbf{R},$ $y \in [-1, 1]$		1. 奇函数; 2. 有界; 3. 周期为 2π ; 4. 递增区间 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$, 递减区间 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ ($k \in \mathbf{Z}$)

续表

函数	定义域和值域	图形	性质
三角函数	余弦函数 $y = \cos x$	$x \in \mathbf{R},$ $y \in [-1,1]$	 1. 偶函数; 2. 有界; 3. 周期为 2π ; 4. 递增区间 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$, 递减区间 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$)
	正切函数 $y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) $y \in \mathbf{R}$	 1. 奇函数; 2. 无界; 3. 周期为 π ; 4. 递增区间 $[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}]$, 无递减区间 ($k \in \mathbf{Z}$)
	余切函数 $y = \cot x$	$x \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) $y \in \mathbf{R}$	 1. 奇函数; 2. 无界; 3. 周期为 π ; 4. 递减区间 $[k\pi, k\pi + \pi]$, 无递增区间 ($k \in \mathbf{Z}$)
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$	$x \in [-1,1],$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	 1. 奇函数; 2. 有界; 3. 单调递增
	反余弦函数 $y = \arccos x$	$x \in [-1,1],$ $y \in [0, \pi]$	 1. 有界; 2. 单调递减

续表

函数	定义域和值域	图形	性质
反正切函数 $y = \arctan x$	$x \in \mathbf{R}$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$		1. 奇函数; 2. 有界; 3. 单调递增
反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$	$x \in \mathbf{R}$, $y \in (0, \pi)$		1. 有界; 2. 单调递减

六、复合函数

定义 5 设 $y = f(u)$, 其中 $u = g(x)$, 且函数 $u = g(x)$ 的值域包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内, 则称 $y = f[g(x)]$ 为由 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的复合函数, u 称为中间变量.

例如: $y = \sin u, u = \ln x$ 可以复合成 $y = \sin \ln x$.

在以后的微积分运算当中, 我们往往需要将一个较为复杂的复合函数分解成若干个基本初等函数或基本初等函数的四则运算的形式. 因此, 复合函数的分解显得非常重要.

例 5 将下列复合函数进行分解.

(1) $y = 2^{\sin x}$;

(2) $y = \sin^2 x$;

(3) $y = \ln^2(x + \cos x)$.

解 (1) $y = 2^{\sin x} \Rightarrow \begin{cases} y = 2^u \\ u = \sin x \end{cases}$.

(2) $y = \sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} y = u^2 \\ u = \sin x \end{cases}$.

(3) $y = \ln^2(x + \cos x) \Rightarrow \begin{cases} y = u^2 \\ u = \ln v \\ v = x + \cos x \end{cases}$.

七、初等函数

定义 6 由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所得的并能用一个式子表示的函数, 称为初等函数, 初等函数是我们研究的主要对象.

当然, 除了初等函数外, 我们还会接触到部分非初等函数, 如分段函数、隐函数等, 在后面的内容里我们再做介绍.

习题 1-1

1. 判断下列各组函数是否是相同的函数.

$$(1) y = |x|, s = \sqrt{t^2};$$

$$(2) y = 4 \ln x, y = \ln x^4;$$

$$(3) y = \cos x, y = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

2. 判断下列函数是否为有界函数.

$$(1) y = \sin(3x+1);$$

$$(2) y = \arctan x^2;$$

$$(3) y = x \cos x.$$

3. 求下列函数的反函数.

$$(1) y = (2x-1)^3;$$

$$(2) y = e^{5x};$$

$$(3) y = \arctan(5x+1).$$

4. 将下列函数分解成简单函数的形式.

$$(1) y = \sin \ln x;$$

$$(2) y = \arctan^3 x;$$

$$(3) y = e^{\cos(2x+1)}.$$

1.2 极限

在日常生活中,我们经常需要考虑某个量的变化发展趋势,这种变化趋势即为数学上所说的极限.极限是高等数学的重要概念,而极限的方法是高等数学的基本方法,通过极限方法可以解决许多初等数学无法解决的问题.同时,高等数学中许多重要的概念都是通过极限来定义的.因此,本节内容非常重要.

一、数列极限

定义 7 对于数列 $\{a_n\}$, 若当 n 无限增大时, a_n 无限趋近于某一常数 A , 则称常数 A 为数列 $\{a_n\}$ 的**极限**, 此时也称数列**收敛**于 A , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$; 否则, 称该数列极限不存在, 也称该数列**发散**.

例 1 观察下列数列的变化趋势, 判断其极限.

$$(1) \{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\};$$

$$(2) \{b_n\} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\};$$

$$(3) \{c_n\} = \{n^2\};$$

$$(4) \{d_n\} = \{(-1)^n\}.$$

解 (1) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的变化趋势为: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, 观察可知其无限趋近于常数 0,

故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

(2) $\{b_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ 的变化趋势为: $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$, 观察可知其无限趋近于常数 1,

故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

(3) $\{c_n\} = \{n^2\}$ 的变化趋势为: $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$, 观察可知其无限增大, 不趋近于任何常数, 故该数列极限不存在.

(4) $\{d_n\} = \{(-1)^n\}$ 的变化趋势为: $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$, 观察可知其始终在 -1 和 1 之间摆动, 不趋近于任何常数, 故该极限也不存在.

二、函数的极限

数列可以看成是定义域为正整数的函数, 将数列的极限推广可得函数的极限. 对于函数 $y = f(x)$, 根据自变量 x 的不同变化过程, 可以分成两大类, 共计六种极限形式.

1. $x \rightarrow \infty$ 时的函数极限.

定义 8 对于函数 $y = f(x)$, 若当 $|x|$ 无限增大时, 函数值 $f(x)$ 无限趋近于某一常数 A , 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$; 否则, 称其极限不存在.

这里, $x \rightarrow \infty$ 表示 x 的绝对值无限增大. 若我们只考虑 $x \rightarrow +\infty$ 或者 $x \rightarrow -\infty$ 时函数值 $f(x)$ 变化趋势, 则可以得到另外两种形式的函数极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 且这三种形式的极限有如下关系:

定理 1 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

例 2 试判断函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限.

解 如图 1-2 所示, 观察该函数图形即可得:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2. $x \rightarrow x_0$ 时的函数极限.

定义 9 对于函数 $y = f(x)$, 若当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数值 $f(x)$ 无限趋近于某一常数 A , 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$; 否则, 称其极限不存在.

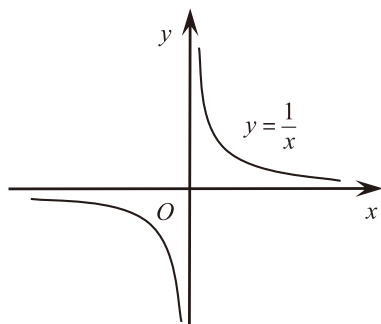


图 1-2

例 3 设 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, 讨论当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的变化情况.

解 $f(x)$ 在 $x=1$ 处没有定义. 由于在 $x \rightarrow 1$ 的变化过程中, 不用取 $x=1$; 当 $x \neq 1$ 时, $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$, 由如图 1-3 所示观察到, 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的对

应值趋向于 2, 即 $f(x)$ 以 2 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

注意 函数在某点处的极限是否存在, 与该点处的函数值无关, 与该点处是否有定义无关.

这里, $x \rightarrow x_0$ 表示 x 无限趋近于 x_0 , 即 $|x - x_0|$ 无限减小趋近于 0. 若我们只考虑 x 从 x_0 左侧或者右侧无限趋近于 x_0 时函数值 $f(x)$ 变化趋势, 则可以得到另外两种形式的函数极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$. 此两极限分别

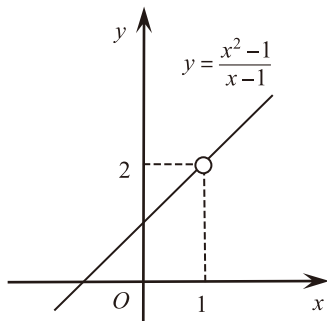


图 1-3

称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限和右极限, 且这三种形式的极限有如下关系:

定理 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

例 4 设 $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 并讨论 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是否存在.

解 该函数如图 1-4 所示, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0;$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

若将此题中函数改为: 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 1$, 其余条件均不变, 结果是否一样? 请读者自行思考.

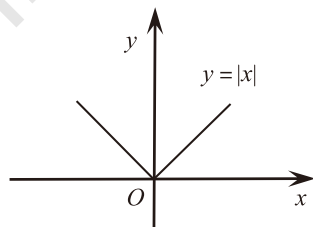


图 1-4

三、极限的性质

性质 1 (唯一性) 若函数 $f(x)$ 极限存在, 则极限值唯一.

性质 2 (有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则在 x_0 的某一去心邻域内函数 $f(x)$ 有界.

性质 3 (保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则必存在 x_0 的某一去心邻域, 使得在该邻域内, 函数 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

推论 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且在 x_0 的某一去心邻域内有函数 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 则有 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

四、无穷小与无穷大

1. 无穷小.

定义 10 在某变化过程中, 以零为极限的变量称为无穷小.

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $x^2, \sin x, \arctan x$ 等均以零为极限, 他们都是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

需注意的是,无穷小并非指某个很小的常数,常数中只有零可以称为无穷小,其他非零常数(不管多小)的极限是常数本身,不是零,因此不是无穷小.另外,说无穷小时必须说明是哪个变化过程中的无穷小,同一个变量在不同的变化过程中极限很有可能不同.即在某变化过程中的无穷小,在其他的变化过程中有可能不再是无穷小.

无穷小有以下几条性质:

性质 1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 2 有限个无穷小的积仍是无穷小.

性质 3 常数与无穷小的积仍是无穷小.

性质 4 有界函数与无穷小的积仍是无穷小.

前三个性质显而易见,第四个性质我们举例说明一下.

例如,考虑 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 其中的 x^2 为无穷小, 而 $\sin \frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 之间摆动, 极限不存在; 但是由于 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 为有界函数, 所以根据性质 4 即可知, $x^2 \sin \frac{1}{x}$ 仍然是无穷小, 即有 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

2. 无穷小与函数极限的关系.

定理 3 函数极限 $\lim f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$ (α 为无穷小)

注意 定理 3 中的极限符号“ $\lim$ ”下面没有标明自变量变化过程, 是指自变量 x 的变化过程可以是 $x \rightarrow x_0, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$ 中的任何一种.

3. 无穷大.

定义 11 在某变化过程中, 变量的绝对值无限增大的变量称为无穷大, 无穷大的极限是不存在的.

例如, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有 $x+1, x^2, \ln x, e^x$ 等均趋近于正无穷, 他们都是 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大.

和无穷小类似的, 需注意, 无穷大并非指某个很大的常数, 常数的极限存在, 即是常数本身, 在变化过程中绝对值不会无限增大, 因此不是无穷大. 另外, 说无穷大时同样必须说明是哪个变化过程中的无穷大.

4. 无穷小与无穷大的关系.

定理 4 在某变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷小且不等于零, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大; 若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

例如, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, x^2 为无穷大, 则 $\frac{1}{x^2}$ 为无穷小; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x$ 为无穷小, 则 $\frac{1}{\sin x}$ 为无穷大.

习题 1-2

1. 观察并判断下列数列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2^n});$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$, 试求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 并讨论 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是否存在.

3. 判断下列哪些是无穷小, 哪些是无穷大.

$$(1) \frac{1+(-1)^n}{n}, (n \rightarrow \infty);$$

$$(2) \frac{\sin x}{1+\cos x}, (x \rightarrow 0);$$

$$(3) \frac{x+1}{x^2-4}, (x \rightarrow 2).$$

4. 利用无穷小的性质求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}.$$

1.3 极限的运算

利用极限的概念, 可以判断出一些较为简单的极限, 对于更为复杂的极限, 需要使用到一些新的知识. 本节内容主要介绍极限的四则运算法则和两个重要极限公式, 该内容可以用来计算一些更为复杂的极限.

一、极限的四则运算法则

定理 5 设在某一变化过程中, 极限 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 都存在, 则有:

$$(1) \lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x);$$

$$(2) \lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \lim g(x);$$

特别地, $\lim[kf(x)] = k \lim f(x)$, k 为常数;

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n, n \text{ 为正整数}.$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}, (\lim g(x) \neq 0).$$

例 1 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 5x + 3);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 5x + 3) &= \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 5x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 \\ &= 2(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 5\lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 3 = 1. \end{aligned}$$

(2) 由于分母极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq 0$, 此题与上题类似, 可直接代入计算极限, 即有:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{1^2+1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

(3) 由于分母极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$, 分子极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1) = 2$. 先计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{0}{2} = 0$; 因此 $\frac{x-1}{x^2+1}$ 为 $x \rightarrow 1$ 时的无穷小, 根据无穷小与无穷大的关系得:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty.$$

(4) 由于分子分母的极限都为 0, 称为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型未定式, 其结果取决于分子分母趋于 0 的速度, 无法直接判断出最终极限值. 需要通过一定的恒等变形, 变形成可直接判断或直接代入求极限的形式来求出最终极限, 这里可以利用因式分解的变形方法, 解法如下:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4.$$

(5) 此题和上题类似, 这里可以使用有理化的方法, 解法如下:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(6) 此题称为 “ $\infty - \infty$ ” 型不定式, 无法直接判断极限值, 我们先利用通分进行变形, 解法如下:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 2 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x+3}{2x^3+1}.$$

解 此类题目分子分母均趋于 ∞ , 称为 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型不定式, 其结果取决于分子分母趋近于无穷大的速度, 无法直接判断结果. 我们一般采用分子分母同时除以 x 的最高次

幂来变形求解, 解法如下:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = \infty.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0.$$

一般地, 有以下结论成立:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m \text{ (其中 } a_0, b_0 \text{ 不等于 } 0, m, n \text{ 为非负整数)} \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

例如, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 3x^2 - 5}{x^5 - 2x^4 + 3x} = 4.$

二、两个重要极限公式

1. 第一个重要极限公式: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

我们不加证明地给出此极限, 可作为一般公式使用, 其中的 x 可以替换成其他更为复杂的变量, 其极限值仍为 1, 即 $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1.$

例 3 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x}.$$

解 (1) 令 $u = 3x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $u = 3x \rightarrow 0$,

$$\text{于是有: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{\frac{u}{3}} = 3.$$

当我们熟悉该公式后, 等量替换的步骤就可以省略了.

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{\cos 5x} \right) \\ &= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 5x} = 5. \end{aligned}$$

一般地, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, 此亦可以当成公式使用.

2. 第二个重要极限公式: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ (或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$).

同样的, 我们不加证明地给出此极限, 可作为一般公式使用, 其中的 x 也可替换成其他更为复杂的变量, 其极限值仍为 e , 即 $\lim_{\square \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{\square})^{\square} = e$ (或 $\lim_{\square \rightarrow 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e$).

例 4 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+5};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x}\right)^{\frac{x}{5}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{2x}}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 = e \cdot 1^5 = e.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x \cdot (-1)} = e^{-1}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x}\right)^{\frac{x}{5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6} \cdot \frac{6}{5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right]^{\frac{6}{5}} = e^{\frac{6}{5}}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2 = e^2.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-3x)]^{\frac{1}{(-3x)} \cdot \frac{(-3)}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + (-3x)^{\frac{1}{(-3x)}}\right]^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$

三、无穷小的比较

定义 12 设 α 与 β 是某一变化过程中的无穷小, 则

(1) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α 是比 β 高阶的无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$;

(2) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称 α 是比 β 低阶的无穷小; (当然, 此时 β 就是比 α 高阶的无穷小);

(3) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c (c \neq 0)$, 则称 α 是与 β 同阶的无穷小. 特别地, 当 $c=1$ 时, 称这

两个无穷小等价, 记为 $\alpha \sim \beta$.

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$ 可知, x^2 是 x 比高阶的无穷小, 即 $x^2 = o(x)$; 当

然, 此时 x 就是比 x^2 低阶的无穷小; 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ 可知, x^2 与 $2x^2$ 是同阶无穷小.

定理 6 设在某变化过程中, $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ 都是无穷小, 且有 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在, 则有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

借助上面的定理, 利用等价无穷小来求极限时可以将某些复杂的极限简化. 下面我们给出, 当 $x \rightarrow 0$ 时的常用等价无穷小:

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x.$$

例 5 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 3x}{\ln(1+5x)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sin^2 x}.$$

解 (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\tan 2x \sim 2x, \sin 5x \sim 5x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\arctan 3x \sim 3x, \ln(1+5x) \sim 5x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 3x}{\ln(1+5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

(3) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\sqrt{x^2+1}-1 \sim \frac{1}{2}x^2, \sin x \sim x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

注意 当 $x \rightarrow 0$ 时, 相乘(除)的无穷小都可用各自的等价无穷小代换, 但相加(减)无穷小的项不能作等价代换.

如: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

错解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$;

事实上, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}.$

习题 1-3

1. 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right);$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x);$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{30} (3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}.$$

2. 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{2}{x}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{3x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{2x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{x+3}.$$

3. 利用等价无穷小代换求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{\sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\tan x}.$$

1.4 函数的连续性

自然界每时每刻都在变化, 其中有许多连续的变化, 如气温的变化、植物的生长、小孩的身高和体重的增长等等, 这些变化在数学上是用连续的概念来描述的. 连续是与极限紧密相关的一个内容, 同时连续也是许多结论成立的前提条件. 连续函数在几何图形上表示一条连续不断开的曲线, 直观上很容易判断.

一、连续的概念

定义 13 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 若等式

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 点 x_0 称为 $f(x)$ 的连续点. 否则称 $f(x)$ 在点 x_0

处不连续（也称**间断**），点 x_0 称为 $f(x)$ 的**间断点**。

由此定义可知， $f(x)$ 在 x_0 点连续需满足等式 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ，即要满足下面三个条件：

1. $f(x)$ 在 x_0 有定义，即 $f(x_0)$ 存在；
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在；
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。

以上三条，任意一条不满足，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点间断。

在上述定义中，令 $\Delta x = x - x_0$ ， $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ ，则当 $x \rightarrow x_0$ 时，有 $\Delta x \rightarrow 0$ ，此时 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 可表示为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

称 Δx 为自变量的**改变量**（或**增量**）， Δy 为函数值的**改变量**（或**增量**）。在某些特定的时候，我们也可以使用该等式来判断函数的连续性。

根据前面所学可知，分段函数在分段点处的极限往往需要通过左、右极限来判断。因此我们可以将等式 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 等价成

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

分段函数在分段点处连续与否我们往往使用这个等式来判定。同时，我们称满足 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 等式的函数 $f(x)$ 在 x_0 点**左连续**，满足 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ 的函数 $f(x)$ 在 x_0 点**右连续**。

定义 14 若函数 $y = f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的每个点处都连续，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续，同时也称函数 $y = f(x)$ 是区间 (a, b) 内的**连续函数**；若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续，且在点 a 处右连续，在点 b 处左连续，则称函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上**连续**。

例 1 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性。

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1$ ，

则有 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

即 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在。

所以， $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，即 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点。

注意 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处不满足连续的三个条件之一，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处**间断**，点 x_0 称为**间断点**。

例 2 设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ a, & x = 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ ，问当 a 为何值时，函数在 $x=1$ 点处连续。

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$, $f(1)=a$, 要使函数在 $x=1$ 点处连续, 必须满足 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, 所以 $a=1$, 即当 $a=1$ 时, 函数在 $x=1$ 点处连续.

二、连续函数的运算及初等函数的连续性

定理 7 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续, 则它们的和、差、积、商 ($g(x_0) \neq 0$) 在 x_0 点也连续.

定理 8 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续, $y = f(u)$ 在点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点也连续.

由上述两个定理及初等函数的定义, 可得如下结论:

定理 9 所有初等函数在其定义区间内均连续.

注意 定义区间内是指包含在定义域内部的区间. 如, 函数 $y = \sqrt{x^2(x-1)^3}$ 的定义域是 $\{0\} \cup [1, +\infty)$, 在 $x=0$ 处不连续, 在 $x=1$ 处仅右连续, 但在其定义区间 $[1, +\infty)$ 内部都是连续的.

例 3 试求函数 $y = \frac{1}{x^2-1}$ 的间断点.

解 因为函数 $y = \frac{1}{x^2-1}$ 是初等函数, 所以其在定义区间 $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$ 内均连续, 间断点即为函数无定义的点, 所以, 该函数的间断点为 $x = \pm 1$.

三、闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数在理论和实际应用当中有着非常重要的性质, 下面我们来简单了解下.

定义 15 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得任一 $x \in I$ 都有 $f(x) \leq f(x_0)$ 或 $f(x) \geq f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值或最小值.

定理 10 (最值定理) 闭区间上的连续函数必有最大值和最小值.

由此定理可知, 闭区间上的连续函数在该区间内必有界.

如图 1-5 所示, 连续函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有最大值 $f(b)$, 最小值 $f(\xi)$.

定理 11 (介值定理) 设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, C 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = C$.

介值定理的几何意义是: 对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个数 C , 直线 $y = C$ 与连续曲线 $y = f(x)$ 至少

有一个交点. 如图 1-6 所示, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = C$ 有三个交点 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = f(\xi_3) = C$ ($a < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < b$).

如果 $f(x_0) = 0$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的零点.

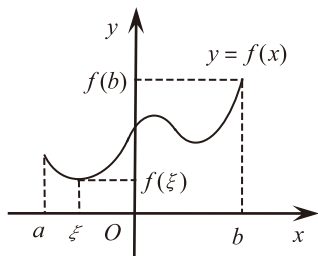


图 1-5

定理 12 (零点定理) 设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

零点定理的几何意义是: 若连续曲线 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 端点的函数值异号, 则曲线至少与 x 轴相交一次. 如图 1-7 所示, $f(\xi) = 0$.

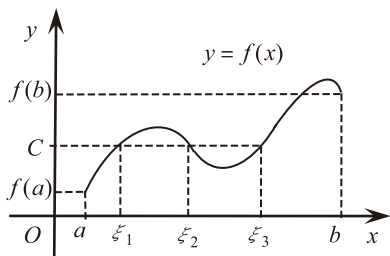


图 1-6

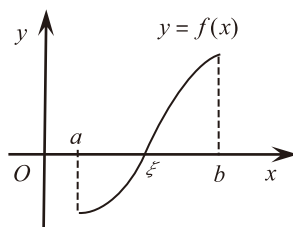


图 1-7

例 4 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

证明 设 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) > 0, f(1) < 0$.

根据零点定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0.$$

所以方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个实根 ξ .

习题 1-4

1. 判断下列函数在 $x = 0$ 点处是否连续.

(1) $y = \frac{1}{x^2 + x}$;

(2) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$;

(3) $y = \frac{1}{\sin x}$;

(4) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \end{cases}$;

(5) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x + 3, & x > 0 \end{cases}$;

(6) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

(7) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a + x, & x \geq 0 \end{cases}$, 问 a 为何值时, 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} a + x^2, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \ln(b + x + x^2), & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 点连续, 试求 a 及 b 的值.

复习题一

一、选择题

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, () 是无穷小.

A. $x \sin \frac{1}{x}$

B. e^x

C. $\ln x$

D. $\frac{1}{x} \sin x$

2. 点 $x=1$ 是函数 $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$ 的 ().

A. 连续点

B. 极限不存在点

C. 不连续点

D. 以上都不对

3. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是其在 x_0 处极限存在的 ().

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 无关条件

4. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2+2}{x} + ax) = 0$, 则常数 a 等于 ().

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{1-x^2} = ()$.

A. 1

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. ∞

6. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处 ().

A. 一定有定义

B. 一定有极限

C. 一定有 $f(x_0) = A$

D. 一定连续

二、填空题

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^{7x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $\alpha = Ax$ 与 $\beta = \sin 3x$ 等价, 则常数 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 且当 $x \neq 0$ 时, 函数 $f(x) = 2^{\frac{1}{x^2}}$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}] = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 若 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi} + 2 \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) =$ _____.

三、解答题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\tan x - \sin x)}{\sin x^4}$.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin x}$.

5. 若 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x+1}$ 极限存在, 求 a 的值并求出该极限.

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + b, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ \frac{\sin 2x}{x}, & x > 0 \end{cases}$,

(1) 当 a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限存在?

(2) 当 a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

7. 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.