



高等教育“十三五”创新型精品教材

微积分学习指导

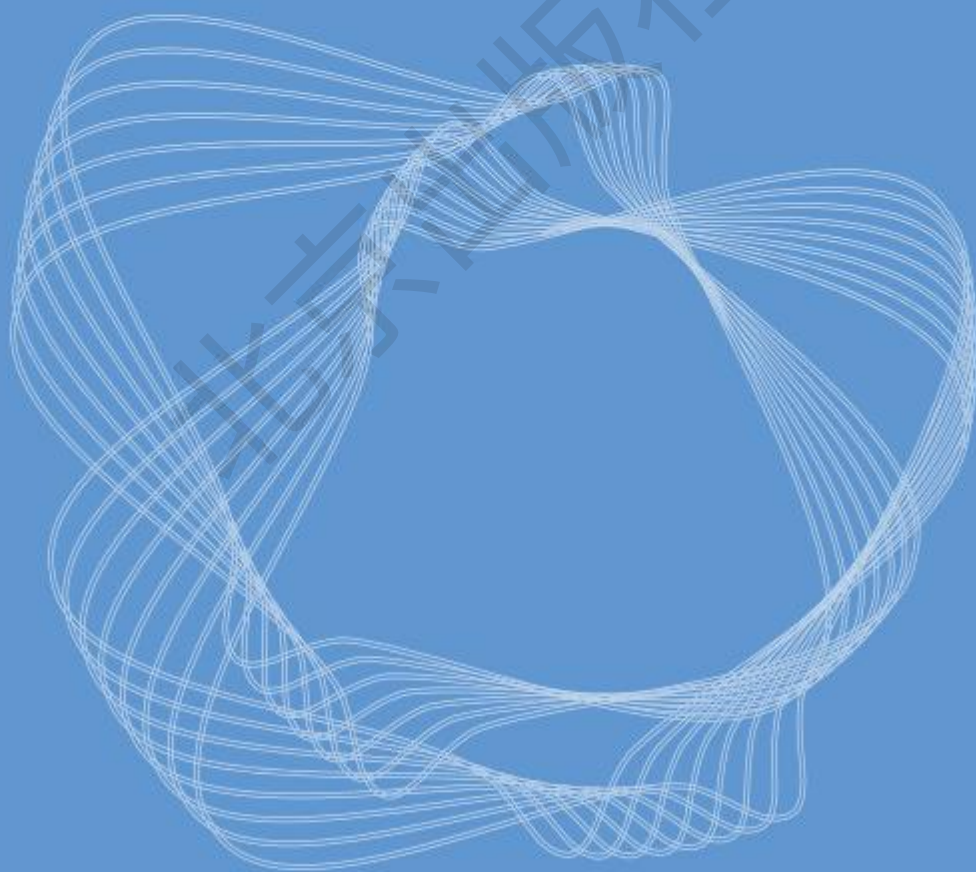
WEIJIFEN XUEXI ZHIDAO

主 编 霍桂利 刘丽娜

微积分学习指导

主 编 霍桂利 刘丽娜

北京出版集团公司
北 京 出 版 社



北京出版集团公司
北 京 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导 / 霍桂利主编. —北京: 北京出版社, 2018.8 (2020 重印)

ISBN 978-7-200-14219-8

I. ①微… II. ①霍… III. ①微积分—高等学校—教学参考资料 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 167605 号

微积分学习指导

WEIJIFEN XUEXI ZHIDAO

主 编: 霍桂利 刘丽娜

出 版: 北京出版集团公司

北 京 出 版 社

地 址: 北京北三环中路 6 号

邮 编: 100120

网 址: www.bph.com.cn

总发行: 北京出版集团公司

经 销: 新华书店

印 刷: 定州市新华印刷有限公司

版印次: 2018 年 8 月第 1 版 2020 年 9 月第 2 次印刷

开 本: 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张: 11

字 数: 171 千字

书 号: ISBN 978-7-200-14219-8

定 价: 30.00 元

如有印装质量问题, 由本社负责调换

质量监督电话: 010-82685218 010-58572750 010-58572393

模块一 函数、极限与连续	1
学习单元一 函数	1
学习任务 1 函数基本知识与理解	1
学习任务 2 实际问题函数关系模型的建立	5
学习单元二 函数的极限	6
学习任务 1 极限概念的理解	6
学习任务 2 无穷小及无穷大量概念及性质的应用	8
学习任务 3 极限运算法则的应用	10
学习任务 4 两个重要极限及无穷小比较的应用	14
学习单元三 函数的连续	18
学习任务 1 连续、间断定义的理解及应用	18
学习任务 2 闭区间上连续函数性质的应用	22
模块一 自测题	24
模块二 函数导数和微分	26
学习单元一 函数的导数	26
学习任务 1 导数概念的理解	26
学习任务 2 函数四则运算求导法则的应用	29
学习任务 3 复合函数求导法则的应用	33
学习任务 4 隐函数、含参式函数求导法则的应用	35
学习任务 5 高阶导数定义的理解及应用	38
学习单元二 函数的微分	40
学习任务 1 函数微分的计算	40
学习任务 2 微分的应用	43
模块二 自测题	45
模块三 导数的应用	48

学习单元	48
学习任务 1 微分中值定理的应用	48
学习任务 2 洛必达法则的应用	51
学习任务 3 函数单调性与极值的应用	53
学习任务 4 最值及实际问题中最优化问题的求解	56
学习任务 5 曲线凹凸区间与拐点的判定与求解	59
学习任务 6 曲线曲率和实际问题中曲率的求解	62
模块三 自测题	64
模块四 不定积分	66
学习单元	66
学习任务 1 不定积分概念与性质的理解	66
学习任务 2 第一类换元积分法的应用	70
学习任务 3 第二类换元积分法的应用	73
学习任务 4 分部积分法的应用	74
模块四 自测题	76
模块五 定积分及其应用	78
学习单元一 定积分的计算	78
学习任务 1 定积分概念和性质的理解	78
学习任务 2 牛顿-莱布尼茨公式的应用	82
学习任务 3 定积分换元法的应用	84
学习任务 4 定积分分部积分法的应用	87
学习任务 5 广义积分的计算	88
学习单元二 定积分的应用	91
学习任务 1 用定积分求平面图形的面积	91
学习任务 2 用定积分求旋转体体积	94
** 学习任务 3 用定积分解决工程中的问题	96
模块五 自测题	100
模块六 数学实验	102
学习单元 一元函数微积分的 Mathematica 操作	102
学习任务 1 Mathematica 中的数据类型和数学常数	102
学习任务 2 Mathematica 内部函数	103
学习任务 3 基本命令与示例	105
附录 1 基础知识	123
附录 2 参考答案	134
附录 3 《微积分》课后习题答案及解析	156

模块一 函数、极限与连续

学习重点

(1) 函数：函数概念及其理解；函数单调性、周期性概念及理解；初等函数概念及复合函数分解（或复合过程的理解）。

(2) 函数极限：函数极限概念及概念中所涉及的无限接近、变化趋势等内涵关键词的理解；无穷小量概念、定理及地位、作用的理解；极限运算法则及其意义的理解；两个重要极限的应用等。

(3) 函数连续：函数连续概念的理解，特别从间断的矛盾对立面去加深理解；闭区间上连续函数的两个性质及推论的理解和掌握。

学习单元一 函数

学习任务 1 | 函数基本知识与理解

内容提要

1. 函数概念

设 D 是一个非空实数集， f 是一个对应关系。如果任取 $x \in D$ ，通过 f 都能确定相应的 y 值与之对应，则称这一变量间的关系 f ，是定义在实数集 D 上的一元函数。当 y 值唯一时，这个函数 f 称为单值函数，否则称为多值函数。以后，若没有特殊说明均指单值函数。记为： $y = f(x), x \in D$ 。

其中， D 称为函数的定义域， f 称为函数关系， x 称为自变量， y 称为因变量，因变量 y 的全部值构成的集合称为函数的值域。

2. 函数的两个要素

函数的两个要素为：定义域和对应法则.

3. 基本初等函数（共六种）（表 1-1-1）

表 1-1-1

函数类型名称	一般解析表达式	
常函数	$y = C (C \in \mathbf{R} \text{ 为常数})$	
幂函数	$y = x^a (a \in \mathbf{R} \text{ 为常数})$	
指数函数	$y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, a \in \mathbf{R} \text{ 为常数})$	
对数函数	$y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, a \in \mathbf{R} \text{ 为常数})$	
三角函数	$y = \sin x$ （正弦函数）	$y = \cos x$ （余弦函数）
	$y = \tan x$ （正切函数）	$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ （余切函数）
	$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$ （正割函数）	$y = \frac{1}{\sin x} = \csc x$ （余割函数）
反三角函数	$y = \arcsin x$ （反正弦函数） $y = \arccos x$ （反余弦函数）	
	$y = \arctan x$ （反正切函数） $y = \operatorname{arccot} x$ （反余切函数）	

4. 复合函数定义

设函数 $y = f(u)$, $u \in D_1$; $u = \varphi(x)$, $x \in D$. 如果 $\varphi(D) \subseteq D_1$, 则任取 $x \in D$, 通过对应法则 φ 和 f 可以确定唯一的 y 与之对应, 这样通过 φ 和 f 确定了定义在 D 上的一个新函数, 这个新函数称为函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 的复合函数, 记为: $y = (f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$, $x \in D$.

5. 初等函数定义

由基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合运算得到的函数, 称为初等函数. 初等函数只能由一个解析式来表示.

基本能力训练

1. 单项选择题

(1) 在给定的取值范围内, 下列函数与函数 $y = \frac{|x|}{x}$ 相同的是 ().

- A. $y = x (x \in \mathbf{R})$
- B. $y = -x (x \in \mathbf{R})$
- C. $y = 1 (x > 0)$
- D. $y = -1 (x \in \mathbf{R})$

(2) 下列函数是函数 $y = \frac{x-1}{2x+1}$ 的反函数的是 ().

- A. $y = \frac{1-x}{1+2x}$
- B. $y = \frac{1+2x}{1-x}$
- C. $y = \frac{1-2x}{1+x}$
- D. $y = \frac{1+x}{1-2x}$

(3) 下列函数是奇函数的是 ().

A. $y = \frac{|x|}{x}$

B. $y = x^2$

C. $y = \sqrt{x}$

D. $y = |x|$

(4) 下列函数为偶函数的是 ().

A. $y = x \sin x$

B. $y = \tan x$

C. $y = \sin x^3$

D. $y = \frac{|x|}{x}$

(5) 下列函数中是单调增函数的是 ().

A. $y = \frac{1}{x}$

B. $y = \ln x$

C. $y = x^2 - 1$

D. $y = \sin x$

(6) 下列函数中周期为 2π 的是 ().

A. $y = \tan 2x (x \in \mathbf{R})$

B. $y = \cot 2x (x \in \mathbf{R})$

C. $y = \sin x + \cos x (x \in \mathbf{R})$

D. $y = \arcsin x (x \in [-1, 1])$

2. 填空题

(1) 构成函数的两个要素是_____和_____.

(2) 函数的表示法有_____、_____和_____.

(3) 函数的性质有_____、_____和_____.

(4) 函数的值域一般通过_____来求解.

(5) 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0; \\ \sin x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$ 的定义域为_____.

(6) 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0; \\ \arctan x, & x \leq 0. \end{cases}$ 的定义域为_____.

(7) 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则 $f[f(x)] =$ _____.

(8) 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x^2}$, 则 $f(x) =$ _____.

(9) 设 $f(x) = 3x^2 + 2x$, $\varphi(t) = \ln(1+t)$, 则 $f[\varphi(t)] =$ _____, $\varphi[f(x)] =$ _____.

3. 解答题

(1) 写出下列函数的复合过程:

A. $y = \sin^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$;

B. $y = \ln \tan \sqrt{1+x^2}$.

(2) 求函数 $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$ 的定义域.

(3) 已知 $f(x+2) = x^2 + 3x - 2$, 求 $f(x)$ 与 $f(2-x)$.

拓展能力训练

解答题

(1) 已知 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ -2, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 求 $f(x+3)$ 的定义域.

(2) 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^3(1-x), & x \geq 0, \\ x^3(1+x), & x < 0, \end{cases}$ 的奇偶性.

学习任务 2 | 实际问题函数关系模型的建立

拓展能力训练

应用题

1. 某建筑工程单位为了节约成本，利用废弃的单面墙体，建设一处 2500m^2 矩形建筑物物资存放场地，且欲使新建墙体长度最短，来达到建设成本最省，问：矩形场地新建墙体总长 L 与矩形场地边长之间的关系是什么？（图 1-1-1）

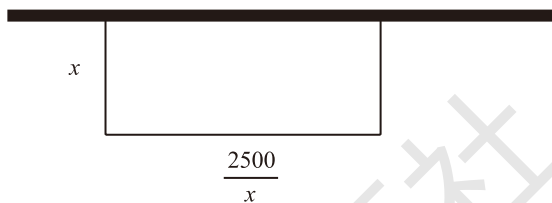


图 1-1-1

2. 为了降低地球热岛效应，减少碳排放量，提高居民节约能源意识，电力部门规定，居民每月用电不超过 60 度时，每度电按 0.5 元收费；当用电超过 60 度但不超过 90 度时，超过部分每度按 0.8 元收费；当用电量超过 90 度时，超过部分每度按 1.2 元收费，试建立居民每月电费与月用电量之间的函数关系。

3. 为了降低运输成本和木材的利用率, 伐木公司一般都将圆木加工成横截面为矩形的方木. 把一个直径为 50cm 的圆木截成横截面为矩形的方木, 若此矩形截面的一条边长为 x cm, 截面积为 S cm², 试将 S 表示成 x 的函数, 并指出其定义域.

学习单元二 函数的极限

学习任务 1 | 极限概念的理解

内容提要

1. 当 $x \rightarrow \infty(\pm\infty)$ 时, 函数 $y = f(x)$ 极限的定义

(1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $y = f(x)$ 极限的定义

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ ($a > 0$) 内有定义. 如果当 $|x|$ 无限增大 (即 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A , 那么这个常数 A 就叫做当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 记作: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x) \rightarrow A$.

(2) 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, 函数 $y = f(x)$ 极限的定义

设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ ($a > 0$) 内有定义. 如果当 x 无限增大 (即 $x \rightarrow +\infty$) 时, 函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A , 那么这个常数 A 就叫做当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 记作: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x) \rightarrow A$.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -a)$ ($a > 0$) 内有定义. 如果当 x 无限减小 (即 $x \rightarrow -\infty$) 时, 函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A , 那么这个常数 A 就叫做当 $x \rightarrow -\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 记作: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x) \rightarrow A$.

说明: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

2. 当 $x \rightarrow x_0(x_0^+)$ 时, 函数 $y = f(x)$ 极限的定义

(1) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 极限的定义

设函数 $f(x)$ 在去心邻域 $U(\hat{x}_0, \delta)$ 内有定义, 如果当 x 无限接近于 x_0 (即: $x \rightarrow x_0$) 时, 函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A (即: $f(x) \rightarrow A$), 那么常数 A 就叫做当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 记作: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (或当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x) \rightarrow A$).

注意: ①定义中不要求函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, 即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值无关;

② $x \rightarrow x_0$ 表示自变量 x 从 x_0 的左右两旁同时无限接近于 x_0 .

(2) 当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, 函数 $f(x)$ 左、右极限的定义

设函数 $f(x)$ 在左邻域 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内有定义. 如果当 x 从 x_0 左侧无限地接近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A , 那么常数 A 就叫做当 $x \rightarrow x_0^-$ 时函数 $f(x)$ 的左极限. 记作: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ (或当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, 函数 $f(x) \rightarrow A$).

设函数 $f(x)$ 在右邻域 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内有定义. 如果当 x 从 x_0 右侧无限地接近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A , 那么常数 A 就叫做当 $x \rightarrow x_0^+$ 时函数 $f(x)$ 的右极限. 记作: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ (或当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, 函数 $f(x) \rightarrow A$).

注意: 设函数 $f(x)$ 在去心邻域 $U(\hat{x}_0, \delta)$ 内有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

基本能力训练

1. 单项选择题

(1) 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} (x \neq 1)$, 当 $x \rightarrow 1$ 时的函数极限是 ().

- A. 不存在 B. 2 C. 1 D. 0

(2) 函数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} (x \neq 0)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时的极限是 ().

- A. 0 B. 不存在 C. 1 D. ∞

2. 用函数极限定义并借助图像、数值计算求极限

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x$.

3. 解答题

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 3, \\ 3x-1, & x \geq 3, \end{cases}$ 求 $f(x)$ 当 $x \rightarrow 3$ 时的左、右极限, 并说明 $f(x)$ 在该点的极限是否存在.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} -2-x, & x \leq 1, \\ x, & 1 < x < 2, \\ 2x-2, & x \geq 2, \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

学习任务 2 | 无穷小及无穷大量概念及性质的应用

内容提要

1. 无穷小量的定义

如果当 $x \rightarrow x_0(x_0^{\pm})$ (或当 $x \rightarrow \infty(\pm\infty)$) 时, 函数 $f(x)$ 的极限为 0, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0(x_0^{\pm})} f(x) = 0 \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty(\pm\infty)} f(x) = 0),$$

则称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0(x_0^{\pm})$ (或当 $x \rightarrow \infty(\pm\infty)$) 时的无穷小量, 简称无穷小.

注意: 对无穷小量的准确把握, 要注意以下三点.

- (1) 说明一个函数是无穷小量, 一定要指明自变量的变化趋势;
- (2) 极限为 0 的函数都是无穷小, 但无穷小不一定都恒等于 0;
- (3) 常数中只有 0 可以当作无穷小, 任何非零常数, 不管其绝对值多么小都不是

无穷小.

以上结论请读者用无穷小的极限定义举例说明原因.

2. 无穷小的性质

在自变量的同一个变化过程中, 有:

性质 1 两个无穷小量的“代数和”仍为无穷小;

性质 2 两个无穷小量之“积”仍为无穷小;

性质 3 有界函数与无穷小量之“积”仍为无穷小.

3. 无穷小与函数极限之间的关系

在自变量的同一变化过程中 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$), 具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和. 反之, 如果函数可以表示为一个常数与无穷小之和, 那么该常数就是这个函数的极限.

即: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$ (其中 A 为常数, $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$).

说明: 此定理主要用于理论证明.

4. 无穷大量的定义

如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大, 则称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大量, 简称无穷大. 记为:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

5. 无穷大与无穷小的关系

(1) 若 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小. 即: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

(2) 若 $f(x)$ 在去心邻域 $U(\hat{x}_0, \delta)$ 内不等于 0, 且 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大. 即: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$ ($f(x) \neq 0$).

说明: 此定理对 $x \rightarrow \infty$ 时也成立.

基本能力训练

1. 单项选择题

(1) 下列各题中是无穷大量的是 ().

A. $y = \frac{1}{x} (x \rightarrow \infty)$

B. $y = x^3 (x \rightarrow 5)$

C. $y = \frac{1}{x} (x \rightarrow 0)$

D. $y = e^{\frac{1}{x}} (x \rightarrow \infty)$

(2) 下列各题中是无穷小量的是 ().

A. $y = \sin x (x \rightarrow 0)$

B. $y = \tan x (x \rightarrow \infty)$

C. $y = \frac{1}{x} (x \rightarrow 10)$

D. $y = \frac{\sin x}{x} (x \rightarrow 0)$

(3) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 下列函数是无穷小量的是 ().

A. $\sin x$

B. $\cos x$

C. $2^{\frac{1}{x}}$

D. 2^{-x}

2. 填空题

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 在自变量的同一变化过程中 ($x \rightarrow x_0$), 如果函数可以表示为一个常数与无穷小之和, 即: $f(x) = A + \alpha(x)$ (其中 A 为常数, $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$), 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $\alpha(x)$ 为无穷小量, $E(x)$ 为有界函数, 则 $\alpha(x)E(x)$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(4) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) - A$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 解答题 (用无穷小性质求极限)

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x};$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin x}{x}.$

学习任务 3 | 极限运算法则的应用

内容提要

1. 极限的四则运算法则

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则有如下运算法则:

法则 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$;

法则 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = kA$ (其中 k 为常数);

法则 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$;

推论: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, n 为正整数, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n = A^n$;

法则 4 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$ (其中 $B \neq 0$).

对于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 为 x 的多项式, 可利用下面公式求极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & m = n; \\ 0 & m > n; \text{ (其中 } a_n, b_n \neq 0; m, n \in \mathbf{N} \text{)} \\ \infty & m < n \end{cases}$$

2. 复合函数的极限运算法则

设复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 的去心邻域 $U(\hat{x}_0, \delta)$ 内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, 且

$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] \stackrel{u = \varphi(x)}{=} \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$.

说明: 上述法则对 $x \rightarrow \infty$ 时也成立.

基本能力训练

1. 是非题

(1) 在某个过程中, 若 $f(x)$ 极限存在, $g(x)$ 极限不存在, 则 $f(x) + g(x)$ 极限不存在. ()

(2) 在某个过程中, 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 极限均不存在, 则 $f(x) + g(x)$ 极限不存在. ()

(3) 在某个过程中, 若 $f(x)$ 极限存在, $g(x)$ 极限不存在, 则 $f(x)g(x)$ 极限不存在. ()

(4) 在某个过程中, 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 极限均不存在, 则 $f(x)g(x)$ 极限不存在. ()

2. 计算题

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 - 1}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3}{3x^3 - x^2}$;

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} (2x+1)^4;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{1 - x^2};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(1-2x)^3};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+1)^{30}}{(6x+1)^{50}};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x}};$$

$$(9) \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x - 2, & x \leq 1, \\ \frac{1}{1-2x}, & x > 1, \end{cases} \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x);$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right);$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$$

拓展能力训练

解答题

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 1$, 试求 a 、 b 的值.

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$, 试求 a 、 b 的值.

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 - x + 4}{x - 1} = b$, 试求 a 、 b 的值.

(4) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$.

学习任务 4 | 两个重要极限及无穷小比较的应用

内容提要

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \left(\frac{0}{0} \text{型} \right)$$

推广：当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时，若 $\varphi(x) \rightarrow 0$ ，则有 $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \right)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (1^\infty \text{型})$$

推广：当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时，若 $\varphi(x) \rightarrow 0$ (或 $\varphi(x) \rightarrow \infty$)，则有

$$\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \left(1 + \varphi(x) \right)^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e; \quad \lim_{\varphi(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)} \right)^{\varphi(x)} = e.$$

3. 无穷小量的比较

设在 $x \rightarrow x_0$ 的极限过程中， α 与 β 都是无穷小，即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ ，且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C \quad (C \text{ 为常数}).$$

那么：(1) 若 $C = 0$ ，则称当 $x \rightarrow x_0$ 时， β 是比 α 高阶的无穷小，记作： $\beta = o(\alpha)$.
(此时，也称 α 是比 β 低阶的无穷小)

(2) 若 $C \neq 0$ ，则称当 $x \rightarrow x_0$ 时， β 与 α 是同阶的无穷小. 特别地，若 $C = 1$ ，则称 α 与 β 是等价的无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$ (当 $x \rightarrow x_0$ 时).

说明：上述结论对 $x \rightarrow \infty$ 时也成立.

4. 等价无穷小替换求极限定理

设当 $x \rightarrow x_0$ 时， α 与 α' 、 β 与 β' 是等价无穷小，那么：

$$(1) \text{ 若 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta'}{\alpha'} \text{ 存在, 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta'}{\alpha'};$$

$$(2) \text{ 若 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta'}{\alpha'} = \infty, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = \infty.$$

基本能力训练

1. 计算题

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan x}{x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} (x \neq 0);$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 4x)}.$$

2. 计算题

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\csc x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^x;$$

$$(5) \lim_{y \rightarrow 0} (1-2y)^{\frac{1}{y}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x;$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x} \right)^x;$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

3. 无穷小量阶的比较

$$(1) \text{ 当 } x \rightarrow 1 \text{ 时, } x^2 - 1 \text{ 与 } \frac{x-1}{x};$$

$$(2) \text{ 当 } x \rightarrow 1 \text{ 时, } \frac{1-x^2}{1+x} \text{ 与 } 1-x;$$

$$(3) \text{ 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } \frac{1}{x-1} \text{ 与 } \frac{1}{x^2-1};$$

(4) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 + \sin x$ 与 x ;

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x} - 1$ 与 x .

4. 利用等价无穷小的性质求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 4x}{8(1 - \cos^2 x)};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + x^2}{\tan 5x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^n)}{(\sin x)^m}.$$

拓展能力训练

计算题

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3 \sin x}{3x - 2 \cos x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\tan x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}.$$

学习单元三 函数的连续

学习任务 1 | 连续、间断定义的理解及应用

内容提要

1. 函数的连续性定义

定义 1 设函数 $y = f(x)$ 在邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义. 如果当 x 在 x_0 处的改变量 $\Delta x (\neq 0)$ 无限接近于 0 时 ($x_0 + \Delta x \in U(x_0, \delta)$), 相应地, 函数 $y = f(x)$ 的改变量 Δy 也无限地接近于 0. 即: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 在邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义. 如果函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限存在, 且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 函数连续三要素 (即: 三层含义)

- (1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 点及其左右附近有定义.
- (2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 点极限存在, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在.
- (3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 点的极限值为 $f(x)$ 在 x_0 点的函数值 $f(x_0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

3. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的左、右连续性

- (1) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.
- (2) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

4. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的左、右连续与连续的关系

定理 1 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

5. 函数 $y = f(x)$ 在区间内的连续性

若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点处都连续, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \forall x_0 \in (a, b)$,

称函数在开区间 (a, b) 内连续; 区间 (a, b) 称为函数的连续开区间.

若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 在 (a, b) 内连续, 且在右端点 b 处左连续, 又在左端点 a 处右连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a),$$

则称函数在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

如果函数在其整个定义域内连续, 则称这个函数为连续函数. 连续函数的直观印象是, 其图像为一条不间断的曲线.

6. 函数间断点定义

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处间断, 称点 x_0 为函数 $y = f(x)$ 的间断点.

说明: 函数在 x_0 点间断的含义为, 函数 $y = f(x)$ 若在点 x_0 处不满足连续的要素之一, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处间断.

7. 初等函数连续运算性质

定理 2 若函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均在点 x_0 处连续, 则 $f(x) \pm g(x)$ 、 $f(x) \cdot g(x)$ 、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) 均在点 x_0 处连续.

定理 3 若函数 $f(u)$ 在 u_0 点处连续, $g(x)$ 在点 x_0 处连续且 $u_0 = g(x_0)$, 则复合函数 $f[g(x)]$ 也在点 x_0 处连续.

8. 初等函数的连续性

- (1) 基本初等函数在其定义区间内都连续;
- (2) 所有初等函数在其定义区间内都连续.

9. 连续复合函数求极限法则

若函数 $y = f(u)$ 在 u_0 点连续, 函数 $g(x)$ 在点 x_0 处的极限存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = f(u_0)$.

说明: 利用函数连续性质求复合函数极限时, 函数符号“ f ”和极限符号“ $\lim$ ”可以交换次序.

基本能力训练

1. 单项选择题

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是 ().

A. $f(x_0)$ 存在

B. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在

D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

(2) 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则下列选项正确的是 ().

A. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处一定连续

B. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义

C. 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的左右极限相等

D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2. 依据初等函数连续性求下列函数的连续区间

(1) $y = \cos x$;

(2) $y = 2x^2 - 3x + 1$;

(3) $y = \frac{x^2}{x-1}$;

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

3. 解答题

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0, \end{cases}$ 要使函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 求 a 的值.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 3, \\ a, & x = 3, \\ 2x - 1, & x > 3, \end{cases}$ 要使函数 $f(x)$ 在 $x = 3$ 处连续, 求 a 的值.

(3) a 、 b 为何值时, 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1, \\ ax^2 + b, & 1 \leq x \leq 2, \\ 4x, & x > 2, \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续?

(4) 求函数 $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}$ 的连续区间和间断点, 并指出间断点的类型.

拓展能力训练

解答题

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2^x} + 1};$

(3) 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, & -1 \leq x < 0, \\ a, & x = 0, \\ x^2 + b, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$ 求 a 、 b 的值, 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

$$(4) \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + 1, & x < 0, \\ a, & x = 0, \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续, 求 } a \text{ 和 } b \text{ 的值.} \\ b + \arctan \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

学习任务 2 | 闭区间上连续函数性质的应用

内容提要

1. 最大值、最小值定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一定存在最大值和最小值,

即: 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\exists x_1 \in [a, b]$, 使得 $\forall x \in [a, b]$, 总有 $f(x) \leq f(x_1)$ 成立; 同时也 $\exists x_2 \in [a, b]$, 使得 $\forall x \in [a, b]$, 总有 $f(x) \geq f(x_2)$ 成立.

此时 $f(x_1)$ 、 $f(x_2)$ 分别称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的**最大值**和**最小值**; 而 x_1 、 x_2 则称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的**最大值点**和**最小值点**. 函数的最大值和最小值统称为**最值**; 最大值点和最小值点统称为**最值点**.

说明: 定理仅给出最值的存在性, 但其最值点的个数及最值点在区间 $[a, b]$ 上的位置和确定方法, 定理没有给出, 需要后续知识来解决.

2. 介值定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, M 和 m 分别为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则对于介于 m 和 M 之间的任一实数 c (即 $m < c < M$), 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = c$.

3. 推论 (零点定理)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且两个端点函数值 $f(a)$ 、 $f(b)$ 异号, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

说明: 和最值存在定理一样, 介值定理及其推论也只说明其条件满足时, 其结论一定成立, 但其介值点和零点的数量及位置以及求解方法, 定理和推论并没有给出.

零点定理常常用来判定方程 $f(x) = 0$ 根的存在性和根的范围.

基本能力训练

证明题

(1) 证明方程 $x^3 - 9x - 1 = 0$ 恰好有三个根.

(2) 证明方程 $8x^3 - 12x^2 + 6x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内至少有一个根.

(3) 证明方程 $x^6 - 2x^5 + 5x^3 + 1 = 0$ 至少有一个实根.

拓展能力训练

证明题

(1) 证明方程 $x = a \sin x + b (a > 0, b > 0)$ 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.

提示: 设 $F(x) = x - a \sin x - b$, 在 $[0, a + b]$ 上用零点定理.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) < a$, $f(b) > b$. 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

提示: 设 $F(x) = f(x) - x$, 在 (a, b) 上满足零点定理.

(4) 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 不连续是因为 ().

A. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 不存在

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 不存在

C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$

D. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0)$

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数中为 x 的高阶无穷小量的是 ().

A. $1 - \cos x$

B. $x + x^2$

C. $\sin x$

D. $\sqrt{x}$

(6) 设 $f(x) = x^2 + \arctan \frac{1}{x-1}$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 ().

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点

D. 连续点

3. 求下列函数的极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2};$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2};$

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan 5x}.$

4. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 + e^x, & x < 0, \\ x + 2a, & x \geq 0, \end{cases}$ 问常数 a 为何值时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续?

5. 证明: 方程 $x - 2\sin x = 1$ 至少有一个正根小于 3.