

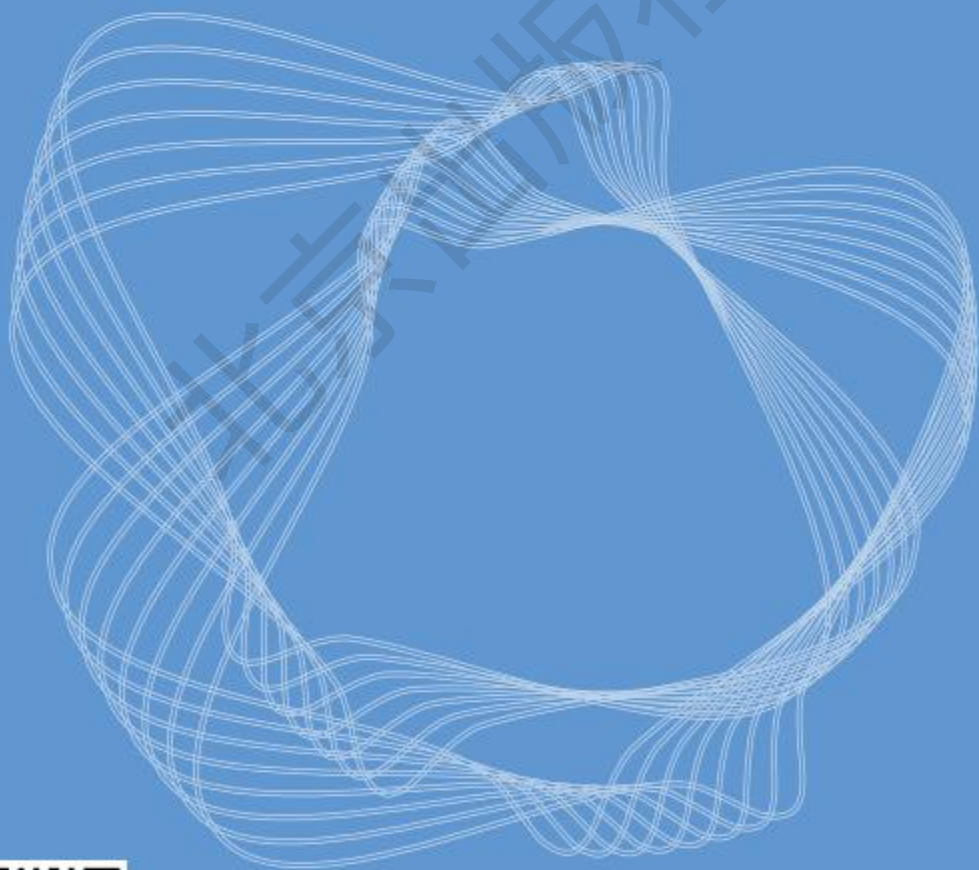


高等教育“互联网+”创新型精品教材

微积分

WEIJIFEN

主 编 陈从科



扫描二维码
共享立体资源

北京出版集团公司
北 京 出 版 社

微
积
分

主
编
陈
从
科

北
京
出
版
集
团
公
司
北
京
出
版
社

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分 / 陈从科主编. — 北京: 北京出版社,
2018.3 (2021 重印)

ISBN 978-7-200-13189-5

I. ①微… II. ①陈… III. ①微积分—高等职业教育—教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 176551 号

微积分

WEIJIFEN

主 编: 陈从科

出 版: 北京出版集团公司

北 京 出 版 社

地 址: 北京北三环中路 6 号

邮 编: 100120

网 址: www.bph.com.cn

总发行: 北京出版集团公司

经 销: 新华书店

印 刷: 定州市新华印刷有限公司

版 次: 2018 年 3 月第 1 版 2021 年 7 月修订 2021 年 8 月第 2 次印刷

开 本: 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张: 15.5

字 数: 314 千字

书 号: ISBN 978-7-200-13189-5

定 价: 43.00 元

质量监督电话: 010-82685218 010-58572162 010-58572393

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数概念	1
第二节 初等函数	12
第三节 极限概念	19
第四节 无穷小量与无穷大量	26
第五节 极限的运算	29
第六节 两个重要极限及无穷小量的比较	33
第七节 函数的连续性 & 闭区间上连续函数的性质	40
第二章 函数导数和函数微分	50
第一节 导数的概念、几何意义	50
第二节 导数的运算	60
第三节 高阶导数	68
第四节 函数的微分	73
第三章 导数和微分的应用	83
第一节 微分中值定理与洛必达法则	83
第二节 函数的单调性、极值与最值	92
第三节 曲线的凹凸及拐点	104
* 第四节 曲线的曲率	109
第四章 不定积分	116
第一节 不定积分的概念与性质	116
第二节 不定积分的计算	123
第五章 定积分及其应用	137
第一节 定积分概念	137
第二节 定积分的性质	148
第三节 定积分基本公式	152
第四节 定积分的计算	159
* 第五节 广义积分	165
第六节 定积分在几何中的应用	169
* 第七节 定积分在力学等领域中的应用	177
* 第六章 级数及其应用	186
第一节 无穷级数的概念及性质	186

第二节	正项级数收敛性判别法	190
第三节	幂级数	194
第四节	傅立叶级数	202
第五节	拉普拉斯变换	209

第七章 常微分方程 221

第一节	常微分方程的基本概念	221
第二节	可分离变量的微分方程	225
第三节	一阶线性微分方程与可降阶的高阶微分方程	227
第四节	二阶线性常系数微分方程	232

北京出版社

第一章

函数、极限与连续

初等函数是微积分学的主要研究对象,初等函数结构是构建微积分运算体系的基本依据和出发点;极限是论证微积分理论可靠性的重要工具;函数连续性是微积分理论正确性的内在本质属性.因此,本章将在中学已有函数知识的基础上,进一步研究函数的概念、发掘函数的思想、认知初等函数的基本结构,在此基础上学习极限理论,剖析极限的思想内涵,并用极限的理论认知连续的本质,为后续学习微积分学打下坚实的基础.

第一节

函数概念

教学建议:本节教学重点应放在对初中与高中函数概念的比较,加深对函数概念内涵的理解和开阅读者思维;重点研究函数单调性和有界性等内容,这些内容与本书第三章的研究内容密切相关.

函数是现代数学的重要概念之一,它几乎渗透到每一个数学分支.因此深刻、全面地理解函数概念的本质、内涵,能够从中得到有益的方法论启示.

函数概念发展史简介

(1)函数概念的产生

16、17 世纪,随着社会的进步,为适应社会生产力的发展需要,用运动的观点探索事物变化和发展过程成为自然科学研究的主题.

当笛卡尔在数学中引入了变量概念之后,这些事物变化和发展过程大都可以被数学家抽象为变量之间的依赖关系,变量间的这种依赖关系被称为函数.马克思说变量进入了数学,运动便进入了数学,从而辩证法也进入了数学,因此,函数概念的引入,微积分的产生也就成为必然的了.

函数是用数学语言描述运动变化过程中的变量之间依赖关系的数学模型.

(2)函数概念的发展阶段

函数概念的发展阶段是随着研究对象的不断丰富和认识的不断深化而变化的.

第一阶段:是函数概念的变量学说.即:初中数学函数定义.它与最初人们关注的行星运动轨迹、弹道等问题有关.它无法确定 $y=C$ 是否是函数.

第二阶段:是函数概念的映射学说.即:高中数学函数定义.它能明确说明 $y=C$ (C 为常数)也是函数.

函数映射概念(即对应)的思想,使数学开始由过去单纯研究“量的关系”,向后来研究“观念性质和结构”转变.例如:在通讯网络和工程进度管理中都会经常使用无向图和有向图,经常会研究图的同构(某种相同几何拓扑结构)问题.

* 例如:证明下面两个有向图是否同构

同构(即两个图具有相同的拓扑结构)定义:假设 $G=(V, E)$ 和 $G_1=(V_1, E_1)$ 是两个图,如果存在一个一一映射 $f:V \rightarrow V_1$,使得对所有的顶点 $v_i, v_j \in V$,均有边 $v_i v_j \in E$ 等价于 $f(v_i) f(v_j) \in E_1$,则称图 G 和 G_1 是同构的,这样的映射 f 称为一个同构.

其中, V, V_1 是图的顶点集合, E, E_1 是图的边的集合. 若图为有向图,则表示边的前一个顶点为起点,后一个顶点为边的终点.

为了证明图 1-1-1 和图 1-1-2 同构,建立如下对应关系:

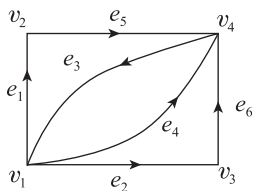


图 1-1-1

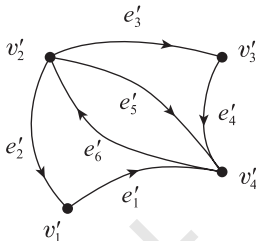


图 1-1-2

$$f: V \rightarrow V_1$$

$$v_1 \rightarrow v'_2, v_2 \rightarrow v'_3, v_3 \rightarrow v'_1, v_4 \rightarrow v'_4,$$

$$v_1 v_2 = e_1 \rightarrow v'_2 v'_3 = e'_3, v_1 v_3 = e_2 \rightarrow v'_2 v'_1 = e'_2, v_4 v_1 = e_3 \rightarrow v'_4 v'_2 = e'_6,$$

$$v_1 v_4 = e_4 \rightarrow v'_2 v'_4 = e'_5, v_2 v_4 = e_5 \rightarrow v'_3 v'_4 = e'_4, v_3 v_4 = e_6 \rightarrow v'_1 v'_4 = e'_1.$$

显然,上述映射 $f: V \rightarrow V_1$ 是一一映射,因此由同构定义可知,图 1-1-1 和图 1-1-2 具有相同的拓扑结构.

显然,函数的对应概念,涵盖了数学研究数量关系和空间形式两大领域.

信息技术的进步,形成了函数概念的关系说. 函数概念的关系说使数学研究的内涵从形式上跳出了量的范畴,转变为研究对象与对象之间的关系. 例如,计算机文档的编写、输入和屏幕输出从现象上看已不是数量,其中量的运算变成了计算机内部的黑箱; Java 等计算机语言更是将编程和设计变为对象和对象的组合.

科技的进步和社会的发展,使人类社会各要素之间的关系越来越复杂,为了准确、精细化研究和预测这种关系,需要建立各种要素之间的量的关系(即函数关系). 例如,数学融入经济活动的深度、广度不断扩大,企业内部的成本管理、利润增减与最大化,商品流通中的物流成本降低与最小化,人类活动对气候的影响等问题,都为用数学函数方法来精细化研究这些问题提供了广阔的舞台.

上面叙述的内容,无论是量的关系还是空间形式之间的关系,归根结底都指向了我们在数学上学习的一个重要概念——函数(或关系),又因为后续学习的内容——微积分是以初等函数为研究对象,所以,对函数概念的掌握、内在含义的理解,成为学好数学、用好数学的重要环节!

在现实问题中,对于所要了解的目标量(因变量)的变化,往往依赖于多个因素量(自变量)的影响. 为了从众多因素量中,分析影响目标量变化的主要因素量(哲学中叫作主要矛盾,抓主要矛盾成为一个重要的工作方法),物理学、社会学等诸多学科都采取了控

制变量法来进行研究. 数学学科也不例外, 研究复杂问题或复杂系统中量的关系时, 往往也通过控制变量法来降低研究问题的难度. 所谓控制变量法, 就是在研究复杂问题时, 只让其中一个因素量进行变化, 其他因素量暂时固定(暂时不变). 这样, 一个多元函数, 实质上就变为一个一元函数. 因此, 对一元函数进行深入研究, 成为夯实数学基本功的重要环节. 另外, 从数学学科的角度来看, 它主要关心的是问题反映出来的量的变化, 而量的变化又直观地反映于坐标系中的“形”的变化. 自然地, 函数概念、图像及性质成为数学学习、研究的主要内容之一. 因此, 在本节内容中, 我们主要研究一元函数的概念、图像和性质.

一、函数概念

背景问题:

问题 1 某 4S 店代理销售某个品牌的汽车, 共有三种车型, 其平均销售价格分别为 a 、 b 、 c (万元/辆), 管理者希望通过每天销售收入的变化来了解市场变化规律.

分析 假如 4S 店三种车型一天的销售量分别用 x_1 、 x_2 、 x_3 (辆) 表示, 则 4S 店每天的销售收入 y (万元) 与每天的销售量之间的变化关系为

$$y = ax_1 + bx_2 + cx_3.$$

问题 2 某建筑工程单位为了节约成本, 将利用废弃的单面墙体, 建设一个 $2\,500\text{ m}^2$ 的矩形建筑物资存放场地, 且欲使新建墙体长度最短, 以达到建设成本最低的目的, 则矩形场地新建墙体总长 L 与矩形场地边长之间的关系为_____.

分析 这个建筑物资存放场地只需要新建三面墙体, 欲使新建墙体总长度 L 最短, 必须知道矩形边长与需要新建墙体总长度 L 之间的变化关系.

如图 1-1-3 所示, 设矩形的一个边长为 $x\text{ m}$, 则相邻的另一个边长为 $\frac{2\,500}{x}\text{ m}$, 因此矩形的边长 x 与新建墙体的总长度 L 之间的关系为

$$L = 2x + \frac{2\,500}{x} \quad (0 < x < +\infty).$$

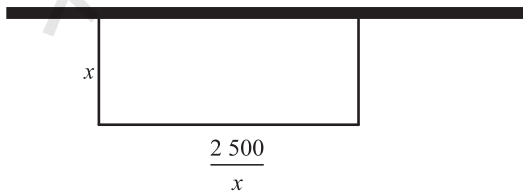


图 1-1-3

从上述两个背景问题可以看出, 事物间量的关系往往是相互依存的, 其中一个量的变化并不是独立的, 而是由另一个或另一组量的变化引起的. 数学上把变量间的这种依赖关系称为函数.

定义 1-1-1 设 D 是一个非空实数集, f 是一个对应关系. 如果任取 $x \in D$, 通过 f 都能确定相应的 y 值与之对应, 则称这一变量间的关系 f 是定义在实数集 D 上的一元函数.

记为: $y = f(x)$, $x \in D$.

其中, D 称为函数的定义域, f 称为函数关系, x 称为自变量, y 称为因变量, 因变量 y 的全部值构成的集合称为函数的值域.

当 y 值唯一时, 这个函数 f 称为单值函数, 否则称为多值函数.

以后, 若没有特殊说明均指单值函数.

说明 (1) 自变量、因变量、对应关系、定义域、值域是构成函数的五个因素. 其中, 自变量 x 、因变量 y 只是表示变量的符号, 而值域显然决定于对应关系与定义域, 也就是说, 当对应关系和定义域确定之后, 值域便隐含其中了. 因此, 对应关系(或对应法则)和定义域(自变量的取值范围)是构成函数的两个决定性因素, 简称两个要素. 因此, 会建立函数关系、确定函数定义域, 是对学生的基本能力要求.

(2) 以解析式表示的函数, 若没有给出具体的定义域, 则这时的定义域均指使解析式有意义的自变量的取值集合. 其中, 隐含求函数定义域的方法.

(3) 由实际问题得到的函数, 其定义域由实际问题的意义确定. 如: 问题 1 中 x_1, x_2, x_3 表示三种车型的销售量, 因此 x_1, x_2, x_3 取值为 $x_i \geq 0$ ($i=1, 2, 3$). 问题 2 中 x 表示新建物资存放矩形场地的边长, 因此 x 取值范围为 $0 < x < +\infty$.

1. 求函数定义域

例 1 求下列函数的定义域

$$(1) y = x^2 + 1; \quad (2) y = \frac{1}{x-2};$$

$$(3) y = \sqrt{x-2}; \quad (4) y = \ln(2-x).$$

解 (1) 因对于任意 $x \in R$, 函数 $y = x^2 + 1$ 都有意义, 因此, 函数 $y = x^2 + 1$ 的定义域为 $D = R = (-\infty, +\infty)$.

(2) 欲使函数 $y = \frac{1}{x-2}$ 有意义, 分母不能为零, 须使 $x-2 \neq 0$, 即: $x \neq 2$.

因此, 函数 $y = \frac{1}{x-2}$ 的定义域为: $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

(3) 欲使函数 $y = \sqrt{x-2}$ 有意义, 依据根式运算, 须使 $x-2 \geq 0$, 即: $x \geq 2$.

因此, 函数 $y = \sqrt{x-2}$ 的定义域为: $D = [2, +\infty)$.

(4) 欲使函数 $y = \ln(2-x)$ 有意义, 根据对数定义, 须使 $2-x > 0$, 即: $x < 2$.

因此, 函数 $y = \ln(2-x)$ 的定义域为: $D = (-\infty, 2)$.

例 2 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \lg(x + \sqrt{x+2});$$

$$(2) y = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}.$$

解 (1) 该函数解析式是对数式, 欲使函数有意义, 要求真数大于 0; 真数中含有二次根式, 要求被开方数非负, 所以函数自变量的取值范围是不等式组 $\begin{cases} x + \sqrt{x+2} > 0, \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ 的解集.

解得 $\begin{cases} x > -1, \\ x \geq -2, \end{cases}$ 即 $D = (-1, +\infty)$.

利用 Mathematica 软件命令求解不等式组的解集.

用命令函数 InequalitySlove 解不等式或不等式方程组. 在有些 Mathematica 版本中可直接调用 InequalitySlove, 有些版本中要从 Algebra 包中调入该函数. 不等式方程中含有逻辑运算符, 计算后给出不等式的解集.

命令函数 InequalitySlove 解不等式或不等式方程组的一般格式:

InequalitySlove[ineq, x]表示求解关于变量 x 的不等式方程;

InequalitySlove[{ineq1, ineq2}, {x, y}]表示求解关于变量 $\{x, y\}$ 的不等式组.

Reduce[expr, vars, Reals]

Mathematica 软件中关系运算符和逻辑运算符如表 1-1-1 和表 1-1-2 所示:

表 1-1-1

关系运算符	数学符号和意义	实例
==	= 等于	$3x==y-1$
!=	≠ 不等于	$x!=y$
>	> 大于	$x>y, x>y>z$
>=	≥ 大于等于	$x+y>=z-1$
<	< 小于	$u<v$
<=	≤ 小于等于	$y/s<=z$

表 1-1-2

逻辑运算符	说明
!	非. 逻辑否, 当 A 的值为真时, 则! A 的值为假; 当 A 的值为假时, 则! A 的值为真
&&	与. 逻辑乘, 仅当 A 和 B 都是真时, $A\&B$ 的值为真. 含义与集合中的交集含义类似
	或. 逻辑加, 当 A 或 B 是真时, $A\ B$ 的值为真
Xor	异或. Xor[$e1, e2, L$], 如果 $e1, e2, L$ 中有偶数个值为 True, 其余为 False, 则 Xor 给出 True; 否则给出 False
Implies	蕴含. Implies[p, q], 表示逻辑蕴含关系 $p\Rightarrow q$

用 Mathematica 命令求解程序.

Clear[x]

InequalitySlove[{ $x+\sqrt{x+2}>0, x+2>=0$ }, x]

运行结果: $x>-1$.

笔记本电脑的“程序运行”命令为 Shift+Enter.

(2)该函数含有偶次根式, 欲使函数有意义, 须使被开方数非负, 所以函数自变量的取值范围是不等式 $\sin x-\frac{1}{2}\geqslant 0$ 的解集.

解得:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \text{ 即 } D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right].$$

用 Mathematica 命令求解程序.

Clear[x]

Reduce[sin[x]-1/2>=0,x,Reals]

运行结果: $C[1] \in \text{Integers} \&\& \cdot \frac{1}{6}(\pi + 12\pi C[1]) \leq x \leq \frac{1}{6}(5\pi + 12\pi C[1]).$

2. 对应关系

函数的对应关系,就是通过自变量的取值来确定因变量取值的关系.

例 3 (1) $y = \sin^2 x + \ln x - 1$ 就是一个具体的函数, f 确定的对应关系为 $y = \sin^2(\quad) + \ln(\quad) - 1$.

(2) 设 $y = f(x) = x \sin x$, 求 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

解 f 的对应关系为 $f(\quad) = (\quad) \sin(\quad)$,
所以

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(3) 设 $f(x-1) = x^2 - 2x$, 求 $f(x)$.

解 令 $x-1=t$, 则 $x=t+1$, 从而

$$f(t) = (t+1)^2 - 2(t+1) = t^2 - 1,$$

所以

$$f(x) = x^2 - 1.$$

注意 函数的对应关系和定义域确定之后, 函数便被确定. 自变量用什么符号表示只是一种形式, 对函数关系没有影响.

例 4 (1) 函数 $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$ 是否相同?

(2) 函数 $y = f(x) = x$ 与 $y = g(x) = |x|$ 是否相同?

解 (1) 因为函数 $y = \ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $y = 2 \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 因此, 函数 $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$ 的定义域不同, 不是相同的函数.

(2) 第一, 两个函数的定义域都为 $(-\infty, +\infty)$, 即定义域相同;

第二, 因为 $f(-1) = -1$, $g(-1) = |-1| = 1$, 即两个函数的对应法则(关系)不同.

因此, 函数 $y = f(x) = x$ 与 $y = g(x) = |x|$ 不是相同的函数.

注意 在定义域相同的前提下, 要判断两个函数对应关系不同, 只要找出两个函数定义域中一个相同点对应的函数值不同, 即可判断这两个函数不是相同的函数; 在定义域相同的前提下, 要判断两个函数相同, 需通过数学运算和运算律, 推导出两个函数解析式的相等关系.

3. 函数的表示

在通常情况下, 函数的表示方法有三种, 即表格法、图像法和公式法(即解析式法).

(1) 表格法: 其特点是函数对应关系一目了然.

例 5 某一时期银行的人民币整存整取定期储蓄的存期与年利率对应关系如表 1-1-3 所示.

表 1-1-3

存期	3 个月	6 个月	1 年	2 年	3 年	5 年
年利率/%	1.71	2.07	2.25	2.70	3.24	3.60

用表格的形式表示函数的方法称为函数的表格表示法,简称表格法.

(2) 图像法:其特点是直观地呈现了函数对应关系和函数的性质.

例 6 某出租车公司的收费标准为:行驶里程不超过 3 千米,核定收费标准为 8 元(称为起步价),行驶里程超过 3 千米,超过的部分每千米收费标准核定为 1.6 元. 租车费用与行驶里程的函数关系如图 1-1-4 所示.

用图形表示函数关系的方法称为函数的图像表示法,简称图像法.

(3) 解析式法:其主要用于定量精确分析.

图 1-1-4 所示的函数关系也可以用解析式表示为

$$f(x) = \begin{cases} 8, & 0 < x \leq 3, \\ 8 + 1.6(x - 3), & x > 3. \end{cases}$$

用数学式子表示函数关系的方法称为函数的公式表示法,也称为解析式法.

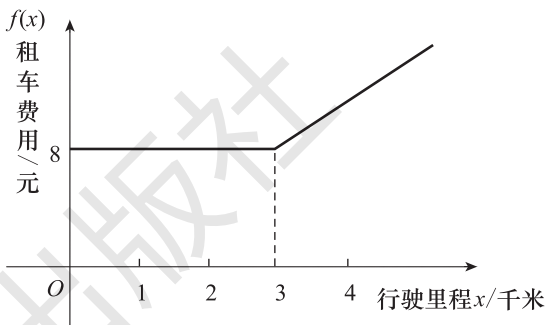


图 1-1-4

这个解析式函数,在不同的定义区间解析表达式是不同的,这样的函数又称为分段函数. 分段函数的定义域是各定义区间的并集,即 $D = (0, 3] \cup (3, +\infty)$.

4. 隐函数

有时在研究事物间量的关系时,因变量与自变量难以用 $y = f(x)$ 的关系表示,或为了简便运算,其函数关系往往用一般的方程 $F(x, y) = 0$ 来表示,函数关系 $y = f(x)$ 隐含其中. 这种由一般方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的 $y = f(x)$ 的函数,称为隐函数. 而特殊方程 $y = f(x)$ 表示的函数,称为显函数.

例如,方程 $x^2 + y^2 - 1 = 0$,隐含着 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1 - x^2}$ 两个函数. 而 $x \sin xy + y + 1 = 0$,则无法直接表示为 $y = f(x)$ 的形式.

5. 参数解析式函数

在研究事物间量的关系时,有时因变量与自变量之间的关系难以直接得出,需要用第三个变量间接给出,这里的第三个变量称为参数,这样得出的方程称为参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in D$. 这时在参数方程中,自变量 x 间接通过参数变量 t 确定了一个函数 $y = f(x)$. 这种由参数方程确定的函数,称为参数解析式函数.

三、函数的性质

浩瀚的宇宙看似杂乱无章,其实,各种自然现象的背后,都包含着某种规律.上下、左右、前后、冷热、正负离子等矛盾的两个方面,都体现着一种对称性规律;四季的周而复始、活塞的往复运动等都体现着一种周期性规律;社会运行成本的增减、生物种群数量的多寡等都体现着一种增减性规律;生物群体间的竞争、国家之间利益的争取与妥协,则体现了自然资源的有限性规律.

现代科学告诉我们,自然界其实充满了规律.无论事物之间或事物内部的运动,都有其内在规律,从数学学科的角度看,这些规律表现为函数图形的对称性、周期性、增减性和有界性.因此,学习和掌握函数的这些性质及其判断方法,成为数学学习或用数学知识解决实际问题的重要内容和能力要求.

1. 有界性

定义 1-1-2 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义. 若存在正数 M , 使得对任意 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 I 内有界.

例 7 说明 $f(x) = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界; $g(x) = x^2 - x$ 在 $[-1, 3]$ 上有界; $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

解 (1) 因为存在 $M=1$, 对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有 $|\cos x| \leq M$, 所以 $f(x) = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

(2) 因为存在 $M=9$, 对于任意的 $x \in [-1, 3]$ 都有 $|x^2 - x| = |x||x-1| \leq 6 < M$, 所以 $g(x) = x^2 - x$ 在 $[-1, 3]$ 上有界.

(3) 因为对于任意给定的无论多么大的正数 $M (M > 1)$, 取 $0 < x < \frac{1}{M}$, $x \in (0, 1)$, 总有 $|\varphi(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| > \frac{1}{\frac{1}{M}} = M$, 因此 $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

说明 (1) 有界性是指函数既有上界又有下界, 从函数值的角度来说, 即 $-M \leq f(x) \leq M, x \in I$; 从一元函数图像来看, 即函数 $y = f(x)$ 的图像位于 $y = -M$ 和 $y = M$ 两条直线之间的带形区域内 (图 1-1-5); 从二元函数图像来看, 即函数 $z = f(x, y)$ 的图像位于 $z = -M$ 和 $z = M$ 两个平面之间的区域内.

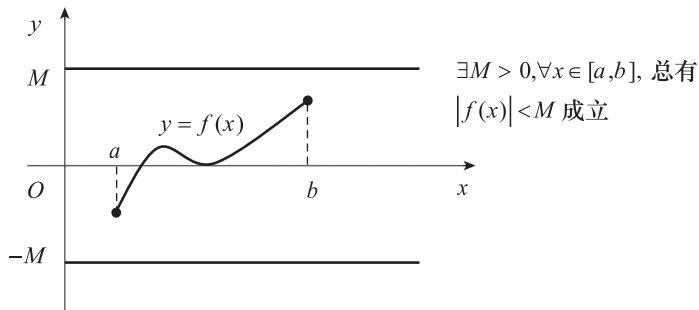


图 1-1-5

(2) 无界性是指函数的上、下界至少有一个不存在. 其含义是无论 $M(M>0)$ 有多大, 在区间 I 上总可以至少找到一个点 $x_0 \in I$, 使得其对应的函数值有 $|f(x_0)| > M$ 成立, 如图 1-1-6 所示.

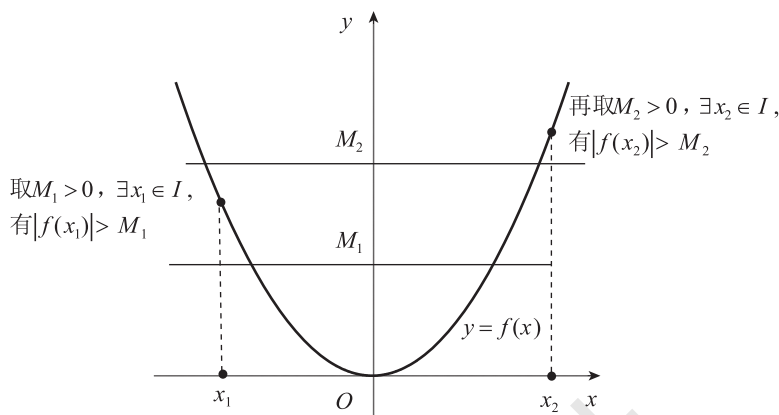


图 1-1-6

2. 单调性

定义 1-1-3 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义. 对于该区间 I 上任意两点 x_1, x_2 , 若 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增, 简称单调递增, 区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调递增区间; 若 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递减, 简称单调递减, 区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调递减区间. 单调递增区间和单调递减区间总称为单调区间, 如图 1-1-7 所示.

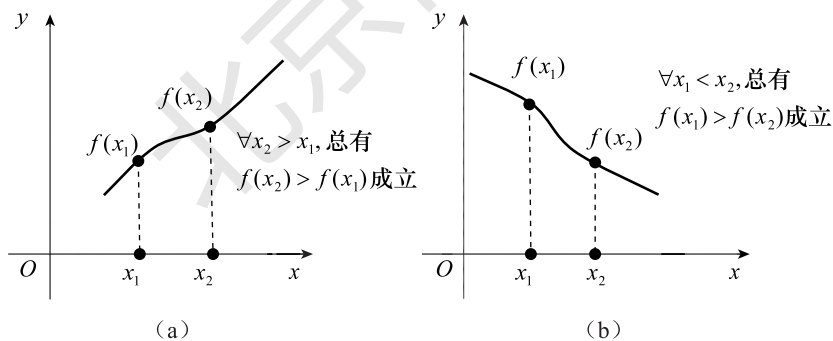


图 1-1-7

说明 (1) 若函数在整个定义域内单调增(或单调减), 则称该函数为单调增(或单调减)函数, 统称为单调函数.

(2) 一元函数的单调性基于实数的有序性. 对于二维及以上空间内的点却没有这一性质, 因此函数的单调性只局限于一元函数上.

(3) 用函数单调性定义来判别函数的单调性问题, 其困难在于对过程的技巧性要求高, 单调区间的边界难以确定. 为了克服这些困难, 在后面导数应用中专门讨论函数单调性的判断方法.

3. 图像的对称性(函数的奇偶性)

定义 1-1-4 设函数的定义域 D 关于原点对称. 若对于任意 $x \in D$, 总有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若对于任意 $x \in D$, 总有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

说明 (1) 偶函数的图像是轴对称图形, 对称轴为 y 轴. 若 P_0 点为函数图像上一点, 从该点作 y 轴的垂线段并延长, 则在 y 轴另一侧延长线上的等距点 P_0' 也在该图像上, 即点 P_0' 为点 P_0 关于 y 轴的对称点. 关于 y 轴的对称点的坐标关系为 $P_0(x_0, y_0)$ 、 $P_0'(-x_0, y_0)$, 即对称点横坐标互为相反数, 纵坐标相等.

奇函数为中心对称图形, 对称点为坐标原点 O . 若 P_0 点为函数图像上一点, 从该点出发连接坐标原点 O 作射线, 则在坐标原点另一侧射线上的等距点 P_0' 也在该图像上, 即点 P_0' 为点 P_0 关于坐标原点的对称点. 关于坐标原点的对称点的坐标关系为 $P_0(x_0, y_0)$ 、 $P_0'(-x_0, -y_0)$, 即对称点横坐标、纵坐标都互为相反数.

根据上述关系, 在作这些函数图像时, 可先画一半, 另一半用图像的对称性画出.

(2) 数学上的函数对称定义是自然界中对称现象的严格化(理想化)、理论化.

4. 周期性

定义 1-1-5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 若存在确定的实数 $T \neq 0$, 使得对于任意的 $x \in D$ 都有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为函数的周期.

说明 (1) 数学上的函数周期性定义是自然界中周期性现象的严格化(理想化)、理论化.

(2) 若 $T \neq 0$ 是函数的周期, 由于

$$\begin{aligned} f(2T+x) &= f[T+(T+x)] = f(T+x) = f(x), \\ f(-T+x) &= f[T+(-T+x)] = f(x), \dots, \end{aligned}$$

因此, nT ($n \in \mathbf{Z}, n \neq 0$) 也是函数的周期, 而且其定义域 D 为无穷区间.

(3) 若函数 $f(x)$ 有最小正周期, 则称这个最小正周期为该函数的周期. 比如, $y = \sin x$ 的周期为 2π , $y = \tan x$ 的周期为 π ; 而函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}, \end{cases}$ 则无最小正周期(读者自己研究, 同时拓展视野并深刻理解其内涵).

(4) 周期函数有无穷之多, 实际上, 我们可以用任意形状的一段曲线来构造一个周期函数(有兴趣的读者可以自己探索).

四、反函数

定义 1-1-6 设给定函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 M . 若对于任意 $y \in M$, 通过对应法则 f , 都可以确定唯一的 $x \in D$ 与 y 对应, 则由函数 $y = f(x)$ 确定的逆对应关系 $x = f^{-1}(y)$ ($x \in D, y \in M$) 构成了一个新函数. 由于表达的习惯, 把新函数 $x = f^{-1}(y)$ 中自变量符号 y 仍用 x 表示, 因变量符号 x 仍用 y 表示, 这样确定的新函数 $y = f^{-1}(x)$ ($y \in D, x \in M$) 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数. 通常把 $x = f^{-1}(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的直接反函数.

说明 (1) 从反函数定义中可知, 由于表达上的习惯, 在反函数中, 将函数 $y = f(x)$ 图像上点的坐标对调, 使得函数图像与反函数图像变为两个, 且图像关于直线 $y = x$ 对

C. $y_1 = \sqrt{x(x+1)}$ 与 $y_2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}$

D. $y_1 = \sqrt{x^2}$ 与 $y_2 = x$

3. 求函数值.

(1) 已知函数 $f(x) = x + \sin x$, 求 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ 的值.

(2) 已知函数 $y = f(x)$, 其中 $\begin{cases} x = t+1, \\ y = t^3+5, \end{cases}$ 求 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的值.

(3) 已知函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, 求 $f[f(x)]$ 及 $f[f(1)]$.

(4) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f(0)$.

4. 确定函数的定义域.

(1) 已知函数 $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$, 求函数 y 的定义域.

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ \sin x, & x \in [1, 2], \end{cases}$ 求函数 $f(x)$ 的定义域.

* 5. 确定函数的值域.

(1) 已知函数 $y = 2^x - 5$, 求函数 y 的值域.

(2) 已知函数 $y = \frac{x+1}{x}$, 求函数 y 的值域.

* 6. 确定原来的函数关系.

(1) 设 $f(x+1) = x^2 + 3x + 5$, 求 $f(x)$.

(2) 设 $f(x^2+1) = x^4 + 3x^2 + 2$, 求 $f(x)$.

7. 确定函数性质.

(1) 判断函数 $y = \cos x^3$ 的奇偶性和其图像在平面 xOy 上的对称轴.

(2) 判断函数 $y = x \sin x^2$ 的奇偶性.

(3) 判断函数 $y = \frac{|x|}{x}$ 的奇偶性.

* (4) 判断函数 $y = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ 的奇偶性.

(5) 判断函数 $y = \ln x$ 的单调性.

(6) 求函数 $y = \sin 3x$ 的最小正周期.

第二节

初等函数

教学建议: 建立函数概念之前, 要从“牛顿流数术”所显示出的缺陷出发, 引导学生发现问题, 产生质疑引起深入思考, 深刻认识极限概念的本质, 锻炼学生获取知识和形成概念的能力.

在现实问题中,当我们弄清楚了各个因素量之间的关系之后,在大多数情况下都可以用初等的函数表达式表达出来.微积分学所研究的内容就是要通过这些初等函数,寻求其目标量和因素量之间的运算方法,以及这些运算所遵循的运算规律.微积分运算规律大多数都与初等函数及其结构密切相关.因此,理解、掌握初等函数及其结构成为学好微积分学的重要基础之一.

一、基本初等函数

表 1-2-1 列出的六种函数称为基本初等函数.

表 1-2-1 基本初等函数

函数类型名称	一般函数表达式
常函数	$y = C (C \in \mathbf{R} \text{ 为常数})$
幂函数	$y = x^a (a \in \mathbf{R} \text{ 为常数})$
指数函数	$y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, a \in \mathbf{R} \text{ 为常数})$
对数函数	$y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, a \in \mathbf{R} \text{ 为常数})$
三角函数	$y = \sin x$ (正弦函数)、 $y = \cos x$ (余弦函数)、 $y = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ (正切函数)、 $y = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ (余切函数)、 $y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$ (正割函数)、 $y = \frac{1}{\sin x} = \csc x$ (余割函数)
反三角函数	$y = \arcsin x$ (反正弦函数)、 $y = \arccos x$ (反余弦函数)、 $y = \arctan x$ (反正切函数)、 $y = \operatorname{arccot} x$ (反余切函数)

因三角函数都为周期性函数,即它的反对应关系中对于同一个 y 值,对应多个 x 值,即三角函数的逆对应不唯一,因此一般来说三角函数没有反函数.例如 $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{13\pi}{6} = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 也就是说,正弦函数 $y = \sin x$ 图像与平行于 x 轴的直线 $y = \frac{1}{2}$ 的交点多于一个(图 1-2-1),所以三角函数的逆对应不唯一,根据反函数定义可知三角函数没有反函数.

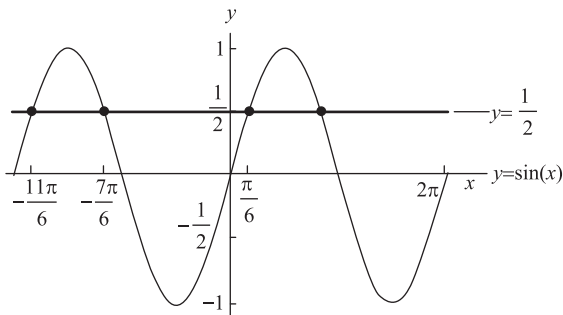


图 1-2-1

为保证三角函数具有反函数,将三角函数的定义域进行改变,使其逆对应关系为单值对应,同时确保三角函数的值域不变.

具体的各反三角函数定义如下:

①选择正弦函数 $y = \sin x$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数称为反正弦函数, 记作 $y = \arcsin x$, 其定义域为 $x \in [-1, 1]$, 值域为 $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 函数图像如图 1-2-2(2) 所示.

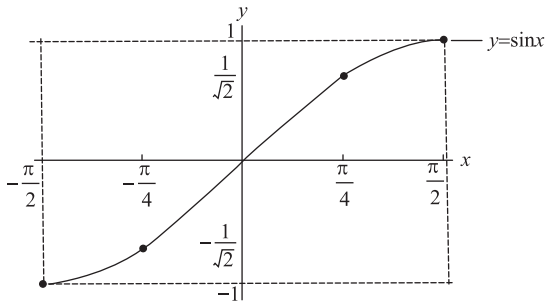


图 1-2-2(1)

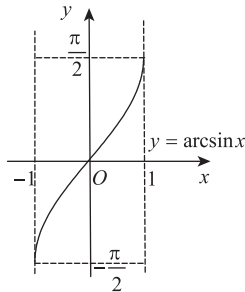


图 1-2-2(2)

反正弦函数的计算公式

正弦函数 $y = \sin x$ 的直接反函数为 $x = \arcsin y$, 其中 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-1, 1]$.

将 $y = \sin x$ 代入 $x = \arcsin y$ 可得计算公式: $\arcsin(\sin x) = x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

将 $x = \arcsin y$ 代入 $y = \sin x$ 可得计算公式: $\sin(\arcsin y) = y$, $y \in [-1, 1]$;

因 $y = \arcsin x$ 为奇函数, 因此可得计算公式: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

例如: $\arcsin(\sin \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$; $\arcsin(\sin(-\frac{\pi}{6})) = -\frac{\pi}{6}$.

$\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \arcsin(\sin(\pi - \frac{\pi}{6})) = \arcsin(\sin \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$.

$\sin(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin[\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$; $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\arcsin(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$.

②选择余弦函数 $y = \cos x$ 在闭区间 $[0, \pi]$ 上的反函数称为反余弦函数, 记作 $y = \arccos x$, 其定义域为 $x \in [-1, 1]$, 值域为 $y \in [0, \pi]$. 函数图像如图 1-2-3(2) 所示.

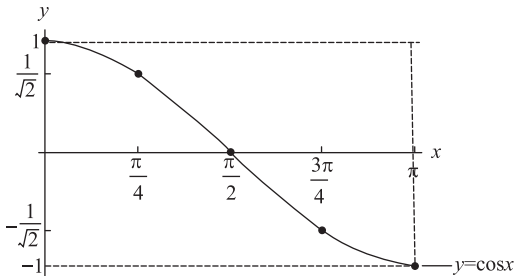


图 1-2-3(1)

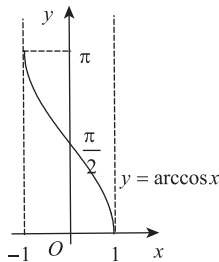


图 1-2-3(2)

反余弦函数的计算公式

余弦函数 $y = \cos x$ 的直接反函数为 $x = \arccos y$, 其中 $x \in [0, \pi]$, $y \in [-1, 1]$.

将 $y = \cos x$ 代入 $x = \arccos y$ 可得计算公式: $\arccos(\cos x) = x, x \in [0, \pi]$;

将 $x = \arccos y$ 代入 $y = \cos x$ 可得计算公式: $\cos(\arccos y) = y, y \in [-1, 1]$;

因 $y = \arccos x$ 为单调减函数, 因此可得计算公式: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

$$\text{例如: } \arccos\left(\cos \frac{5\pi}{4}\right) = \arccos\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \arccos\left(-\cos \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \pi - \arccos\left(\cos \frac{\pi}{4}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

③ 选择正切函数 $y = \tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数称为反正切函数, 记作 $y = \arctan x$, 其定义域为 $x \in (-\infty, +\infty)$, 值域为 $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 函数图像如图 1-2-4(2) 所示.

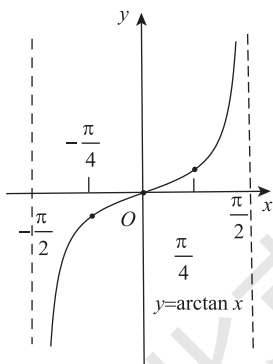


图 1-2-4(1)

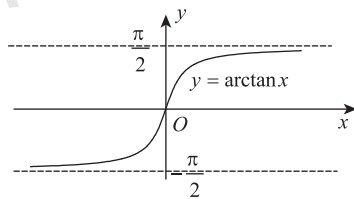


图 1-2-4(2)

反正切函数的计算公式

正切函数 $y = \tan x$ 的直接反函数为 $x = \arctan y$, 其中 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in (-\infty, +\infty)$.

将 $y = \tan x$ 代入 $x = \arctan y$ 可得计算公式: $\arctan(\tan x) = x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

将 $x = \arctan y$ 代入 $y = \tan x$ 可得计算公式: $\tan(\arctan y) = y, y \in (-\infty, +\infty)$;

因 $y = \arctan x$ 为奇函数, 因此可得计算公式: $\arctan(-x) = -\arctan x$.

$$\text{例如: } \arctan\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}; \quad \arctan\left[\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\arctan\left[\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = \arctan\left[\tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \arctan\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}; \quad \arctan(-1) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

④ 选择余切函数 $y = \cot x$ 在开区间 $(0, \pi)$ 内的反函数称为反余切函数, 记作 $y = \operatorname{arccot} x$, 其定义域为 $x \in (-\infty, +\infty)$, 值域为 $y \in (0, \pi)$. 函数图像如图 1-2-5(2) 所示.

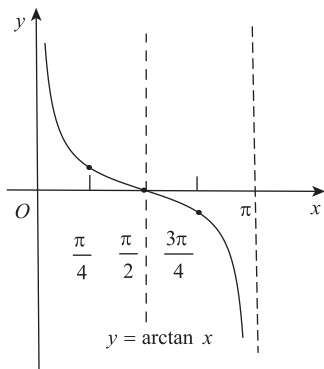


图 1-2-5(1)

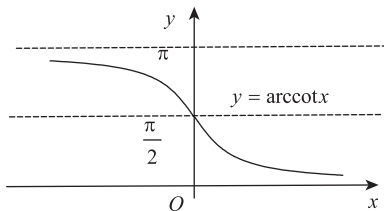


图 1-2-5(2)

反余切函数的计算公式

余切函数 $y = \cot x$ 的直接反函数为 $x = \operatorname{arccot} y$, 其中 $x \in (0, \pi)$, $y \in (-\infty, +\infty)$.

将 $y = \cot x$ 代入 $x = \operatorname{arccot} y$ 可得计算公式: $\operatorname{arccot}(\cot x) = x, x \in (0, \pi)$;

将 $x = \operatorname{arccot} y$ 代入 $y = \cot x$ 可得计算公式: $\cot(\operatorname{arccot} y) = y, y \in (-\infty, +\infty)$;

因 $y = \operatorname{arccot} x$ 为单调减函数, 因此可得计算公式: $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$.

$$\begin{aligned} \text{例如: } \operatorname{arccot}\left(\cot \frac{3\pi}{4}\right) &= \operatorname{arccot}\left[\cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \operatorname{arccot}\left(-\cot \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \pi - \operatorname{arccot}\left(\cot \frac{\pi}{4}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{arccot}(-1) = \pi - \operatorname{arccot} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

数学实验: 利用 Mathematica 命令画反三角函数的图像.

二、简单结构初等函数

定义 1-2-1 由基本初等函数通过有限次四则运算构成的函数, 称为简单结构初等函数.

例如, 函数 $y = 2x \ln x - 5^x$, $y = \frac{1+x^3}{x - \cos x}$ 等都是简单结构初等函数.

三、复合结构函数(复杂结构函数)

定义 1-2-2 设函数 $y = f(u)$, $u \in D_1$; $u = \varphi(x)$, $x \in D$. 如果 $\varphi(D) \subseteq D_1$, 则任取 $x \in D$, 通过对应法则 φ 和 f 都可以确定唯一的 y 与之对应, 这样通过 φ 和 f 确定了定义在 D 上的一个新的函数, 这个新函数称为函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 的复合函数, 记为 $y = (f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$, $x \in D$. 函数复合过程如图 1-2-6 所示.

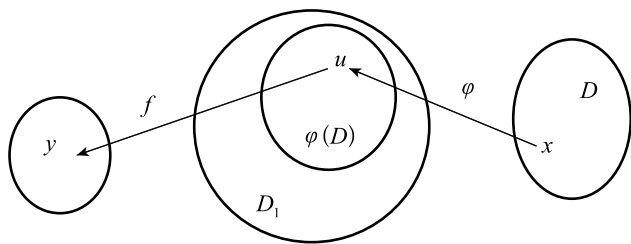


图 1-2-6

说明 (1) 在复合函数表达式 $y = (f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$ 中, $(f \circ \varphi)(x)$ 表示这个函数由 φ 和 f 复合而成, 是 φ 和 f 共同作用的结果, 作用顺序是先 φ 后 f ; $f[\varphi(x)]$ 表示两个用解析式表示的函数的复合方法, 即代入法.

(2) 若把 $f(u)$ 称为外层函数, $\varphi(x)$ 称为内层函数, 则其计算方法是先内后外, 即把 $\varphi(x)$ 的表达式或函数值当作外层函数 $f(u)$ 的自变量 u 的取值.

(3) 定义 1-2-2 中, 条件 $\varphi(D) \subseteq D_1$ 可以用更广义的条件 $\varphi(D) \cap D_1 \neq \emptyset$ 来代替, 这时复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是 D 的子集.

注意 这里研究复合函数的重点不是为了构造新的函数, 而是为了将复杂函数转化为以基本初等函数为元素的简单结构, 为其后建立微积分运算系统提供基本依据.

例 1 写出下列复杂函数的复合过程.

(1) $y = \log_a \sin x$; (2) $y = \sqrt{1-x^2}$; (3) $y = x^x (x > 0)$.

解 (1) 函数 $y = \log_a \sin x$ 是由 $y = \log_a u, u = \sin x$ 复合而成;

(2) 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 是由 $y = \sqrt{u}, u = 1-x^2$ 复合而成;

(3) 将函数 $y = x^x (x > 0)$ 恒等变形为 $y = e^{x \ln x}$, 则函数 $y = x^x (x > 0)$ 是由 $y = e^u, u = x \ln x$ 复合而成.

有些函数既可以看成简单结构, 也可以看成复合结构, 灵活运用能使问题得到简化.

例 2 写出 $y = (1+x^2)^{99}$ 的复合过程.

解 方法 1: 若将函数 $y = (1+x^2)^{99}$ 利用二项式定理展开, 则是一个多项式简单结构函数. 显然, 展开过程非常复杂.

方法 2: 若将函数 $y = (1+x^2)^{99}$ 看成幂结构, 则是由 $y = u^{99}, u = 1+x^2$ 复合而成. 相比较方法 1, 这样处理就要简便得多.

例 3 已知 $f(2-x) = \frac{1+x}{1-x}$, 求 $f(x), f\left(\frac{2}{x}\right)$.

解 方法 1: 令 $2-x = u$, 则 $x = 2-u$,

代入函数 $f(2-x) = \frac{1+x}{1-x}$, 得 $f(u) = \frac{3-u}{u-1}$,

于是, $f(x) = \frac{3-x}{x-1}$.

这是一般方法, 适合于解答所有这种题型的题.

方法 2: 将 $f(2-x) = \frac{1+x}{1-x}$ 转化为 $f(2-x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{3-(2-x)}{(2-x)-1}$,

令 $2-x=u$, 得 $f(u)=\frac{3-u}{u-1}$,

于是, $f(x)=\frac{3-x}{x-1}$.

这种方法比较简单, 适合于这种题型的部分题.

$$f\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{3-\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}-1}=\frac{3x-2}{2-x}.$$

说明 例 3 是给出两个函数复合后的一个复合函数, 求原来函数的表达式问题. 这里用了两种方法: 方法 1 是一般方法, 方法 2 是特殊方法. 请读者细细品味.

四、初等函数

定义 1-2-3 由基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合运算得到的函数, 称为初等函数. 初等函数都能由一个解析式来表示.

研究性问题:

1. 绝对值函数 $f(x)=|x|$ 是否为初等函数?
2. 分段函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x>0, \\ x, & x\leq 0 \end{cases}$ 是否为初等函数?

思考题

1. 在对数函数 $y=\log_a x$ 和指数函数 $y=a^x$ 中, 为什么都要规定 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 呢?
2. 在复合函数定义中, 若把 $\varphi(D)\subseteq D_1$ 改为 $\varphi(D)\cap D_1\neq\emptyset$, 两个函数是否可以复合?
3. 分段函数是否为初等函数?

习题 1-2

1. 选择题.

(1) 当 x 取值区间为()时, 可把 $u=\lg x$ 代入 $y=\sqrt{1-u^2}$ 中, 构成复合函数.

- | | |
|-------------------|---|
| A. $(0, +\infty)$ | B. $\left(\frac{1}{10}, +\infty\right)$ |
| C. $(0, 10)$ | D. $\left[\frac{1}{10}, 10\right]$ |

(2) 求复合函数定义域的规则是().

- A. 由外层到内层考察相应函数在满足前一层条件下定义域, 直到最里层所构成的不等式组, 该不等式组的解集即为复合函数的定义域

B. 由内层到外层考察相应函数在满足后一层次条件下的定义域,直到最外层所构成的不等式组,该不等式组的解集即为复合函数的定义域

(3)将两个函数进行复合或求复合函数值的规则是().

A. 先计算外层函数的值,再将外层函数值(或将外层函数表达式)作为内层函数自变量的取值代入内层函数并计算(或整理)

B. 先计算内层函数的值,再将内层函数值(或将内层函数表达式)作为外层函数自变量的取值代入外层函数并计算(或整理)

(4)本节中所谓的复合函数的分解含义和分解方法是().

A. 将复合函数分解为简单函数,即将复合函数分解为有限个基本初等函数的四则运算而得到的函数.其分解方法是按从外层到里层的顺序进行

B. 将复合函数分解为简单函数,即将复合函数分解为有限个基本初等函数的四则运算而得到的函数.其分解方法是按从里层到外层的顺序进行

2. 填空题.

(1)若设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则 $f[f(x)] =$ _____.

(2)若设 $f(x) = 3x + 5$, 则 $f[f(x) - 2] =$ _____.

(3)若设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f[f(x)] =$ _____.

(4)若设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x^2}$, 则 $f(x) =$ _____.

(5)若设 $f(x) = \ln x, g(x) = e^{2x+1}$, 则 $f[g(x)] =$ _____.

3. 写出下列函数的复合过程.

(1) $y = 3^{\tan^2 x}$; (2) $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$;

(3) $y = (1-2x)^{99}$.

第三节

极限概念

教学建议:建立函数概念之前,要从“牛顿流数术”所显示出的缺陷出发,引导学生发现问题,产生质疑,引起深入思考,深刻认识极限概念的本质,锻炼学生获取知识和形成概念的能力.

极限理论是论证微积分理论和结论可靠性的重要工具.虽然微积分概念与理论体系是按定积分、微分、极限这样的先后顺序通过实际问题 and 几何直观,以及在不断质疑的过程中逐渐完善起来的,但为了方便读者的学习,将极限理论安排在本章讲解,形成一条完整的知识链,也便于满足想继续提高学业水平的读者,通过这样的学习打下坚实的理论基础.当然,对于以应用为目的的读者来说,如果想在短时间内掌握微积分的主要内容和知识体系,可以跳过这些内容,先学习后面章节的内容,这样可以降低学习的难度.

一、背景问题

牛顿在解决物理问题时,遇到了这样的问题,即若某物体的运行轨迹为 $s(t) = t^3$, 如何求该物体在运行过程中某一时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$? (这里做了简化处理)

为了解决这个问题,牛顿巧妙地采用了变量连续变化的技术处理方法——“流数术”.

牛顿流数术(求导)的大概思想是求 t^3 在 $t = t_0$ 时刻的流数(现在称为“导数或变化率”).

为此,在量 t 因流动(变化)从 t_0 变成 $t_0 + \Delta t$ 的同时, t^3 由 t_0^3 变成 $(t_0 + \Delta t)^3$,

而 $(t_0 + \Delta t)^3 = t_0^3 + 3(\Delta t)t_0^2 + 3(\Delta t)^2 t_0 + (\Delta t)^3$,

所以 $\Delta s(t) = (t_0 + \Delta t)^3 - t_0^3 = 3(\Delta t)t_0^2 + 3(\Delta t)^2 t_0 + (\Delta t)^3$.

先令 $\Delta t \neq 0$, 则 $\Delta s(t)$ 与 Δt 之比为

$$\frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = 3t_0^2 + 3(\Delta t)t_0 + (\Delta t)^2.$$

再令增量 Δt 消失(即 $\Delta t = 0$), 它们的最终比为 $3t_0^2$.

于是,推导出 t^3 在 t_0 时刻的瞬时速度(或流数、导数),

即 $(t^3)'|_{t=t_0} = 3t_0^2$.

对牛顿的流数术做进一步分析,我们发现其中存在着致命的缺陷,即

(1) 当 $\Delta t \neq 0$ 时, $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = 3t_0^2 + 3(\Delta t)t_0 + (\Delta t)^2$ 有意义.

(2) 当增量 Δt 消失(即 $\Delta t = 0$)时, $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$ 无意义,因为 0 不能作为分母.

上述 $\Delta t \neq 0$ 与 $\Delta t = 0$ 的假设矛盾,所得到的结论会成立(可靠)吗?

为了证明牛顿流数术的可靠性,科学家们为此付出了几十年的努力,最终发现并理解了牛顿流数术的内在本质,即 t 向 t_0 流动的变化,其本质含义是 $\Delta t \neq 0$ 且无限接近于 0 的过程,而不是先令 $\Delta t \neq 0$, 然后再令增量 Δt 消失(即 $\Delta t = 0$)这一矛盾的假设. 由于这一深刻的认识,既完美回答了牛顿流数术的可靠性问题,也为创立极限理论(微积分理论可靠性的论证工具)奠定了坚实的思想基础.

下面,我们将从函数极限的概念出发,系统介绍和展现极限理论的主要内容.

二、极限的概念

在学习极限的过程中,要逐步体会四句话的内涵,即“从静止看运动,从有限看无限,从近似看精确,从量变看质变”. 理解了这四句话的内涵,也就理解了极限概念的精髓.

1. 当 $x \rightarrow \infty (\pm \infty)$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

(1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

为了建立函数极限的概念,我们先考察函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数值的变化情况,如图 1-3-1 所示.

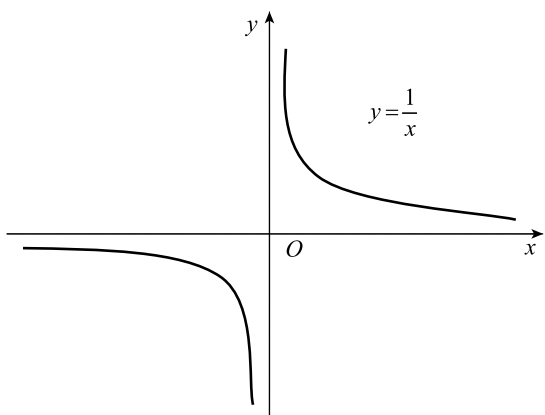


图 1-3-1

从图 1-3-1 中,我们不难看出,当 $x \rightarrow \infty$ (即 $|x|$ 无限增大) 时,函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图像向两边无限延伸的同时,无限接近于 x 轴. 也就是说, $f(x)$ 无限接近于一个确定的值 0, 即 $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ (当 $x \rightarrow \infty$ 时).

对于函数 $f(x)$ 在自变量 $x \rightarrow \infty$ 时的这一特性,做如下的一般性概括,于是有

定义 1-3-1 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ ($a > 0$) 内有定义. 如果当 $|x|$ 无限增大(即 $x \rightarrow \infty$) 时,函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A , 那么这个常数 A 就叫作当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, 函数 } f(x) \rightarrow A.$$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 观察函数 $y = \frac{\sin x}{x}$ 的图像(图 1-3-2), 我们会发现当 $x \rightarrow \infty$ 时, $|y|$ 的值震荡幅度无限减小, 即 $y \rightarrow 0$, 因此, 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

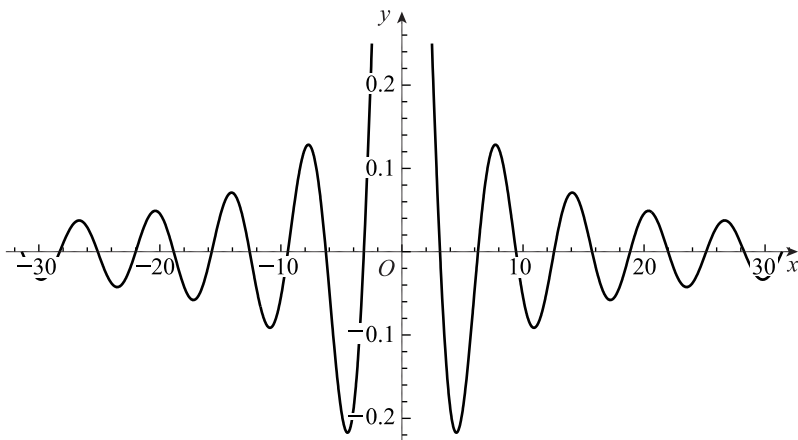


图 1-3-2

Mathematica 程序

```
Clear[x,y]
```

```
Plot[y=Sin[x]/x,{x,-10π,10π}]
```

(2) 当 $x \rightarrow \pm \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

定义 1-3-2 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ ($a > 0$) 内有定义. 如果当 x 无限增大(即 $x \rightarrow +\infty$) 时, 函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A , 那么这个常数 A 就叫作当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, 函数 } f(x) \rightarrow A.$$

定义 1-3-3 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -a)$ ($a > 0$) 内有定义. 如果当 x 无限减小(即 $x \rightarrow -\infty$) 时, 函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A , 那么这个常数 A 就叫作当 $x \rightarrow -\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 或当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, 函数 } f(x) \rightarrow A.$$

例如, 观察函数 $y = \arctan x$ 的图像(图 1-3-3)可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

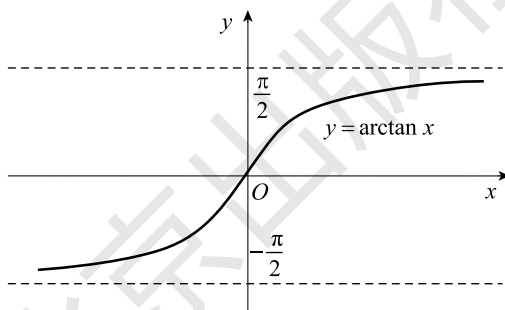


图 1-3-3



通过对比定义 1-3-1、定义 1-3-2、定义 1-3-3 及图 1-3-1、图 1-3-2、图 1-3-3 可得:

定理 1-3-1 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 存在的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}}$,

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

观察图 1-3-4 也容易得出上述结论.

Mathematica 程序

```
Clear[x,y]
```

```
Plot[y=E^(1/x),{x,-4,4},AxesLabel->{"x","y"},AxesOrigin->{0,0},Grid-  
Lines->Automatic]
```

其中,

AxesLabel→{"x","y"}表示给横坐标标注为“x”、纵坐标标注为“y”.

AxesOrigin→{0,0}表示图像横坐标与纵坐标原点位置在(0,0)点.

GridLines→Automatic 表示给图形(图 1-3-4)加上网格图.

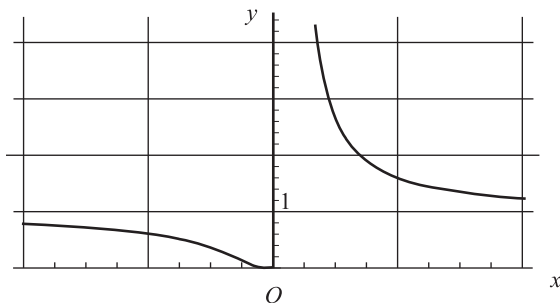


图 1-3-4

2. 当 $x \rightarrow x_0 (x_0^\pm)$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

(1) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

为了便于读者理解 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义, 我们先从图 1-3-5 和图 1-3-6 观察两个具体的函数.

从图 1-3-5 中不难看出, 当 x 从 1 的两边无限接近于 1 (即 $x \rightarrow 1$) 时, $f(x) = x + 1$ 无限接近于 2;

从图 1-3-6 中同样可以看出, 当 x 从 1 的两边无限接近于 1 (即 $x \rightarrow 1$) 时, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 也无限接近于 2.

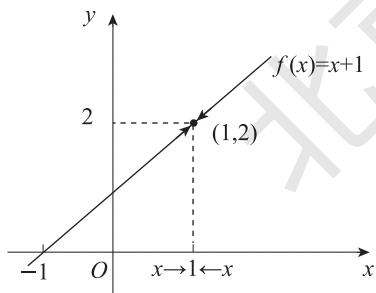


图 1-3-5

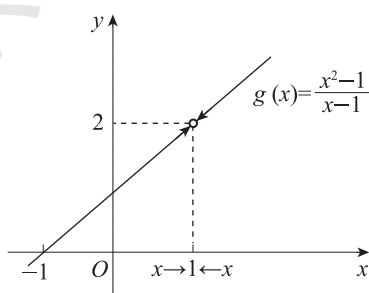


图 1-3-6



我们注意到 $f(x) = x + 1$ 和 $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 是两个不同的函数, $f(x) = x + 1$ 在 $x = 1$ 处有定义, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 处无定义. 这就是说, 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 值的变化趋势 (即极限) 与其在 $x = 1$ 处是否有定义无关, 只与函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 $x = 1$ 处左、右附近的函数值有关. 综合上述结论可得:

定义 1-3-4 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内有定义. 如果当 x 无限接近于 x_0 (即 $x \rightarrow x_0$) 时, 函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A (即 $f(x) \rightarrow$

A), 那么这个常数 A 就叫作当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时, 函数 } f(x) \rightarrow A.$$

由定义可知: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$;

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

(2) 当 $x \rightarrow x_0^\pm$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

定义 1-3-5 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左邻域 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内有定义. 如果当 x 从 x_0 左侧无限地接近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A , 那么这个常数 A 就叫作当 $x \rightarrow x_0^-$ 时函数 $f(x)$ 的左极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 当 } x \rightarrow x_0^- \text{ 时, 函数 } f(x) \rightarrow A.$$

定义 1-3-6 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内有定义. 如果当 x 从 x_0 右侧无限地接近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A , 那么这个常数 A 就叫作当 $x \rightarrow x_0^+$ 时函数 $f(x)$ 的右极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 当 } x \rightarrow x_0^+ \text{ 时, 函数 } f(x) \rightarrow A.$$

说明 从前面举例以及极限定义 1-3-4、定义 1-3-5 和定义 1-3-6 中可以看出, $x \rightarrow x_0$ ($x_0^\pm$) 的含义是 x 无限接近于点 x_0 , 但永远不会等于 x_0 , 即 $x - x_0 \neq 0$. 因此, 求 $x \rightarrow x_0$ ($x_0^\pm$) 时的函数极限时, 若分子与分母都有因式 $x - x_0$, 可以先约去该因式再求极限.

$$\text{例如, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

由定义 1-3-4 到定义 1-3-6 可知:

定理 1-3-2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

由于分段函数在不同定义区间内函数的表达式不同, 直接应用极限定义求解很不方便, 这时利用定理 1-3-2 研究分段函数在分段点处的极限是否存在非常有用.

例 3 已知 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, 确定 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是否存在.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

虽然, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的左、右极限都存在, 但由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x),$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

* 了解性内容: 极限的三个性质.

性质 1(唯一性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么极限值唯一.

性质 2(极限点附近的保序性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$.

(1) 如果 $A < B$, 那么在 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内, 恒有 $f(x) < g(x)$.

(2) 如果在 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内, 恒有 $f(x) \leq g(x)$, 那么恒有 $A \leq B$.

性质 3(极限点附近的有界性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么在 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内, $f(x)$ 是有界的.

三、用 Mathematica 软件中的函数命令求极限

Mathematica 计算极限的命令是 Limit, 它的使用方法如表 1-3-1 所示:

表 1-3-1

命令格式	说明
Limit[expr, x → x ₀]	当 x 趋向于 x ₀ 时, 求 expr 的极限
Limit[expr, x → x ₀ , Direction → 1]	当 x 趋向于 x ₀ 时, 求 expr 的左极限
Limit[expr, x → x ₀ , Direction → -1]	当 x 趋向于 x ₀ 时, 求 expr 的右极限

趋向的点可以是常数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{3x - 6}$.

解 Mathematica 程序

Limit[Sqrt[x^2+2]/(3x-6), x→Infinity]

运行结果

Out[] = $\frac{1}{3}$.

思考题

1. 在利用极限定义求极限时, 我们是用什么方法求极限的? 其依据是什么? (提示: 图像、数值计算)
2. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限为什么和点 x_0 处的函数值无关?

习题 1-3

1. 用观察法指出下列函数的极限(极限存在时给出极限值, 极限不存在时说明理由).

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \cot x.$$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 3, \\ 3x-1, & x \geq 3, \end{cases}$ 求当 $x \rightarrow 3$ 时, $f(x)$ 的左、右极限, 并说明 $f(x)$ 在该点的极限是否存在.

$$3. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} -2-x, & x \leq 1, \\ x, & 1 < x < 2, \\ 2x-2, & x \geq 2, \end{cases} \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow -5} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

第四节

无穷小量与无穷大量

教学建议: 本节教学重点应在了解引入“无穷小量”目的及意义的基础上讲解, 有利于读者理解教材知识结构编排和逻辑关系, 更好地促进读者学习探索的主动性.

第三节中各种极限的概念都是以描述性概念给出的, 虽然减小了初学者的理解困难, 但为以后证明微积分结论带来不便. 为了弥补这一不足, 下面引进无穷小量概念等内容, 使得以此为基础, 推导、证明微积分结论变得相对容易. 因此, 微积分学也被称为无穷小量分析.

上节的举例中我们发现, 一些函数在自变量的某个变化过程中, 它的极限为“0”, 我们对这类极限问题给出如下概念:

一、无穷小量

1. 无穷小量的定义

定义 1-4-1 如果当 $x \rightarrow x_0 (x_0^{\pm})$ [或当 $x \rightarrow \infty (\pm\infty)$] 时, 函数 $f(x)$ 的极限为 0, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (x_0^{\pm})} f(x) = 0 \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty (\pm\infty)} f(x) = 0),$$

则称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0 (x_0^{\pm})$ [或当 $x \rightarrow \infty (\pm\infty)$] 时的无穷小量, 简称无穷小.

例如, 函数 $f(x) = x+2$ 是当 $x \rightarrow -2$ 时的无穷小, 函数 $g(x) = \frac{1}{x}$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小(图 1-4-1).

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Mathematica 程序

```
Clear[x,y]
```

```
Show[Plot[x+2,{x,-4,4}],Plot[1/
x,{x,-4,4}],AxesLabel->{"x","y"},
AxesOrigin->{0,0}]
```

说明

Show[{g₁,g₂,...}]命令,能把多个函数

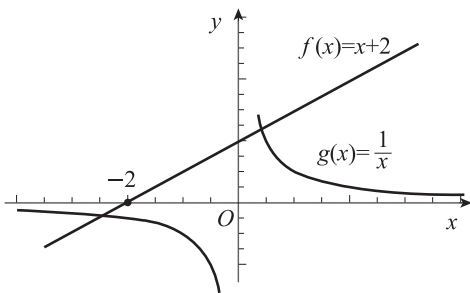


图 1-4-1

图像显示在一个坐标系中.

注意 对无穷小量的准确把握,要注意以下三点:

- (1)说明一个函数是无穷小量,一定要指明自变量的变化趋势.
- (2)极限为0的函数都是无穷小,但无穷小不一定都恒等于0.
- (3)常数中只有0可以当作无穷小,任何非0常数,不管其绝对值多么小都不是无穷小.

以上结论请读者用无穷小的极限定义举例说明原因.

2. 无穷小量的性质

在自变量的同一个变化过程中,有

性质1 两个无穷小量的代数和仍为无穷小.

性质2 两个无穷小量之积仍为无穷小.

性质3 有界函数与无穷小之积仍为无穷小.

例1 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 即 $\frac{1}{x}$ 为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小; $|\sin x| \leq 1$, 即 $\sin x$ 为有界函数,

所以由性质3知 $\frac{1}{x} \cdot \sin x = \frac{\sin x}{x}$ 为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

再由无穷小定义得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

例2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, 即 x^2 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小; $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 即 $\sin \frac{1}{x}$ 为有界函数,

所以由性质3知 $x^2 \sin \frac{1}{x}$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

再由无穷小定义得 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

3. 无穷小与函数极限之间的关系

定理1-4-1 在自变量的同一变化 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 过程中,具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和. 反之,如果函数可以表示为一个常数与无穷小之和,那么该常数就是这个函数的极限. 即

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad (\text{其中 } A \text{ 为常数}, \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

说明 定理1-4-1 主要用于结论可靠性(或正确性)证明.

练习:请仿照定理1-4-1 写出当 $x \rightarrow \infty$ ($\pm\infty, x_0^\pm$) 时的其他五种情形.

二、无穷大量

定义1-4-2 如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时,函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大,则称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大量,简称无穷大. 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

说明 (1) $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷大的函数 $f(x)$, 按通常的定义来说极限是不存在的. 因为 ∞ 是不存在的, 是大脑中的一个概念, 但为表述这一趋势状态, 我们说“函数的极限是无穷大, 并记为 ∞ (或 $\pm\infty$)”. 这个符号特点是没有终点, 正好表达了无穷的含义.

(2) 无穷大定义中只给出两种无穷大定义, 同样可以定义其他极限过程的无穷大. 读者可以作为练习来完成.

(3) 无穷大是一个无界函数, 但无界函数未必是某个极限过程的无穷大. 例如, $y = x \sin x$ 是无界函数, 但 $x \rightarrow \infty$ 时它不是无穷大 (为什么? 有兴趣的读者可以作为研究性课题来完成).

定理 1-4-2 (无穷大与无穷小的关系)

(1) 若 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小. 即

$$\text{若 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

(2) 若 $f(x)$ 在去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内不等于 0, 且 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大. 即

$$\text{若 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

说明 (1) 无穷大与无穷小之间的关系不是充分必要的关系.

(2) 其他极限过程的无穷大与无穷小关系定义由读者作为练习来完成.

(3) 判断函数的极限过程为无穷大, 必须用此定理来判定.

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5}{3x^2 + 2x}$.

$$\text{解 因为 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x}{2x^3 + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{5}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2}}{2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^3}} = \frac{0+0}{2+0} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5}{3x^2 + 2x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x}{2x^3 + 5}} = \infty.$$

思考题

1. 为什么无穷小的倒数不一定是无穷大?
2. 在 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 无界函数是否一定是无穷大量?

习题 1-4

1. 观察下列各题,哪些是无穷小,哪些是无穷大?

(1) $\frac{1+2x}{x^2}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时; (2) $\frac{x+1}{x^2-9}$, 当 $x \rightarrow 3$ 时;

(3) $2^{-x}-1$, 当 $x \rightarrow 0$ 时; (4) $\ln |x|$, 当 $x \rightarrow 0$ 时;

(5) $2\sin x \cos x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时; (6) $e^{\frac{1}{x}}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时;

(7) $\cot x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时; (8) e^{-x} , 当 $x \rightarrow -\infty$ 时.

2. 下列函数在什么变化过程中是无穷小,在什么变化过程中是无穷大?

(1) $\tan x$; (2) $\frac{x+1}{x^2}$;

(3) $\frac{1}{(x-1)^2}$; (4) 2^{-x} .

3. 求下列函数的极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{1 - \cos \frac{2}{x}}$; (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin x}{x}$.

第五节 极限的运算

教学建议:本节教学重点应从分析建立极限运算法则的目的意义出发,在深入分析初等函数构成结构的基础上,获取所需法则类型和数量,培养读者发现知识和构建知识体系能力.

知道了极限的概念之后,如何去求一个函数的极限呢?我们在第一节中已经发现,求极限时,所使用的方法主要是观察法和以往从数值计算中获得的经验.用观察法求极限往往要借助于函数的图像,经验法往往要借助于数值计算,但对于复杂的函数,要画出其图像和对其进行数值计算,对我们来说往往是一件极其困难的事情.为此,我们有必要寻找能够把复杂函数变为简单函数的运算规律(或称为法则).下面是我们依据初等函数的结构特点,给出的极限的运算法则.这些法则已被数学工作者证明是正确的,我们这里仅对部分法则给予证明,其他法则的证明读者可作为练习来完成.

一、极限的四则运算法则(在自变量的同一变化过程中且极限都存在)

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则有如下运算法则:

法则 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$.

法则 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = kA$ (其中 k 为常数).

法则 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B.$

法则 4 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$ (其中 $B \neq 0$).

证明 仅以法则 1 作为示范.

据定理 1-4-1 知, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B,$

所以, 存在无穷小 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ 使得

$$f(x) = A + \alpha(x), g(x) = B + \beta(x) \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时)}.$$

于是, $f(x) \pm g(x) = (A \pm B) + [\alpha(x) \pm \beta(x)]$ (当 $x \rightarrow x_0$ 时),

再由无穷小性质 1 知 $\alpha(x) \pm \beta(x)$ 仍为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} [\alpha(x) \pm \beta(x)] = 0,$

因此, 由定理 1-4-1 得 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$ 法则 1

得证.

说明 (1) 法则 1 和法则 2 可以推广到任意有限个的情形.

(2) 由法则 3 可以得出: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, n$ 为正整数, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n = A^n.$$

(3) 在使用法则 4 时, 分子、分母的极限必须都存在, 且分母极限不能为 0 [从极限的保序(号)性角度寻找答案, 读者可以作为练习来验证].

二、复合函数的极限运算(读者要从举例中仔细理解其含义)

定理 1-5-1 设复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 的去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内有定义. 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0, \text{ 且 } \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A,$$

则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] \stackrel{u = \varphi(x)}{=} \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

说明 (1) 将定理中的 $x \rightarrow x_0$ 换为 $x \rightarrow \infty$, 也有同样的结果. 请读者尝试写出来. 此外, 这个定理表明在极限运算过程中可以做变量替换, 将复杂函数转换为简单函数再求极限.

(2) 后面讲了函数的连续概念之后, 复合函数极限运算还有一种形式, 到时候请留意并理解其中的含义.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x + 3} \\ &= \frac{2^3 - 1}{2^2 - 5 \times 2 + 3} = -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4.\end{aligned}$$

$$\text{例 3 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}.$$

解 令 $u = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, 则 $x \rightarrow 0$ 时, $u \rightarrow 1$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3 - 1}{u^2 - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u^2 + u + 1)(u - 1)}{(u + 1)(u - 1)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 + u + 1}{u + 1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

用 Mathematica 程序求极限

Clear[x]

Limit[$\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, x→0]

运行并输出结果为: out[] = $\frac{3}{2}$.

$$\text{例 4 求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 1}.$$

解 由于分子、分母极限不存在, 因此不能用商的极限运算法则. 先用 x^2 去除分子、分母, 然后再求极限, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2}}{3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$$\text{例 5 求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^3 - x^2 + 5}.$$

解 先将分子、分母同除以 x^3 , 然后求极限, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^3 - x^2 + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3}} = 0.\end{aligned}$$

$$\text{例 6 求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 2x + 5}.$$

解 先将 $\frac{x^2-2x+5}{2x^3-x^2+1}$ 的分子、分母同除以 x^3 , 然后求极限, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x+5}{2x^3-x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3}}{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}} = 0,\end{aligned}$$

因此, 由无穷大与无穷小之间的关系定理, 得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-x^2+1}{x^2-2x+5} = \infty$.

由例 4、例 5、例 6 所给出的方法和结果, 可以得到如下结论:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, m = n, \\ 0, m > n, \\ \infty, m < n \end{cases} \quad (\text{其中 } a_n, b_m \neq 0; m, n \in \mathbf{N}).$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1})$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}} \quad (\text{利用平方差公式}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

分析 这是“ $\infty - \infty$ ”型未定式极限问题, 由于 ∞ 的含义为不存在, 因此不能运用极限运算法则求极限. 通过根式转移把它转化为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型再计算.

习题 1-5

1. 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+3}{x-6};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x+2)^2};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x};$

(4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4};$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1};$

(6) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25};$

(7) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3};$

(8) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h};$

(9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (n \text{ 为正整数}).$

2. 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{1-4x^2};$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2 - 5x^3};$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{1 - x^2};$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(1-2x)^3};$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+1)^{30}}{(6x+1)^{50}}.$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x - 2, & x \leq 1, \\ \frac{1}{1-2x}, & x > 1. \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$

* 4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - k}{x - 3} = 4$, 求 k 的值.

第六节 两个重要极限及无穷小量的比较

教学建议:本节应让读者了解,任何事物不仅仅遵循普遍性原理,其特殊性有时可能更多一些,通过深层次分析提升读者的认知层次和拓展读者的认知视野,使读者对学习“不定型极限”问题的必要性引起足够重视.

凡事总有例外,下面将要介绍的两个重要极限就不满足运算法则的条件,因此不能用极限的四则运算法则进行计算.为此,需要寻找新的求极限方法,于是我们先引入两个求极限准则,然后利用这两个准则求这两个重要极限.

一、极限存在的两个准则

准则 1(夹逼准则) 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内有定义,并且在此邻域内满足:

(1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x);$

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A.$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$

这个准则的意义:当函数 $f(x)$ 的极限求解困难时,通过将复杂函数 $f(x)$ 做适当放大和缩小寻找两个新函数 $g(x)$ 和 $h(x)$,将 $f(x)$ 夹在中间,并且这两个新函数的极限容易求得而且相等,从而求出函数 $f(x)$ 的极限.

准则 2(单调有界准则) 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调且有界, 则极限 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在.

准则 2 中的区间 (a, b) 也可改为 $(-\infty, b)$ 或 $(a, +\infty)$, 相应的结论仍然成立.

这个准则的意义: 当函数 $f(x)$ 的极限求解困难时, 若能证明该函数在极限趋势下, $f(x)$ 是单调、有界的, 则可断定它的最小上界或最大下界为其极限; 也可设出其极限, 通过对等式两端同时求极限, 解含有其极限的方程来求出其极限.

例如, $y = \arctan x$ 是单调、有界的, $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, 因此有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

二、两个重要极限

在本书里主要把这两个重要极限当作求极限的公式, 用来求解与其相关的, 而且不符合极限运算法则的“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ 1^∞ ”型求极限问题.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

下面就 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 利用准则 1 给予证明.

证明 图 1-6-1 为三角函数在单位圆中的表示 ($0 < x < \frac{\pi}{2}$).

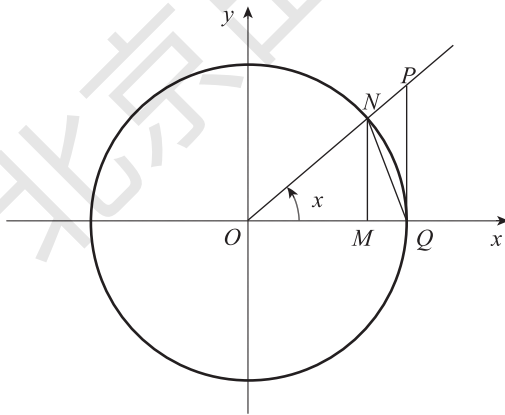


图 1-6-1

依据准则 1 的要求和三角函数在单位圆上的表示, 构造如下的不等关系:

$$S_{\triangle OQN} < S_{\text{扇形} OQN} < S_{\triangle OQP} \quad (\text{中间为扇形面积}),$$

于是, 有

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

即

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, 上式同样成立.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$, 所以由准则 1 知,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

注意 这个重要极限是“ $\frac{0}{0}$ ”型, 它解决了这种形式的不符合极限运算法则 4 问题的求解极限的方法. 为了以此为基础, 解决这类更复杂(即复合结构)的函数极限问题, 我们把它形象地写成

$$\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1 \text{ (其中, } \varphi(x) \text{ 代表同一代数式)}$$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 4x}{4x}} \cdot \frac{3x}{4x} \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right), \end{aligned}$$

由例 2 知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

无理数 $e = 2.718\ 281\ 828 \cdots$ 无论在数学理论或实际问题应用中都有重要的作用.

对于这个极限, 可以用定理 1-6-2 予以证明. 这里列出 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的数值表(表 1-6-1)

和图 1-6-2, 通过观察其变化趋势认可这一结论.

表 1-6-1

x	1	2	3	4	5	10	100	1 000	10 000	...
$(1+\frac{1}{x})^x$	2	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	...

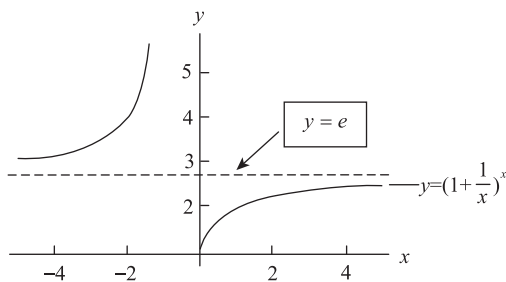


图 1-6-2

从表 1-6-1 和图 1-6-2 可以看出, 当 x 无限增大时, 函数 $(1+\frac{1}{x})^x$ 大致趋势为无限接近于无理数 e , 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

注意 这个重要极限是“ 1^∞ 型”, 它解决了这种形式的不符合极限运算法则问题的求解极限方法. 为了以此为基础, 解决这类更复杂(即复合结构)的函数极限问题, 我们把它形象地写成

$$\lim_{\varphi(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = e. \quad (\text{其中, } \varphi(x) \text{ 代表同一代数式})$$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{\frac{x}{3} \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3 = \left[\lim_{\frac{x}{3} \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3 = e^3.$$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{-x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1} \\ &= \left[\lim_{-x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1}. \end{aligned}$$

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x}\right)^x$.

解 所求极限是“ 1^∞ ”型, 令 $\frac{2-x}{3-x} = 1 + \frac{1}{u}$, 解得 $x = u + 3$, 且当 $x \rightarrow \infty$ 时, $u \rightarrow \infty$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+3} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \left(1 + \frac{1}{u}\right)^3\right]$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^3 = e \cdot 1 = e.$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2+x)^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (2+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \cdot e^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{x} \ln(1 + \sin x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sin x) \cdot \frac{1}{\sin x}} = e^{1 \cdot \ln e} = e. \end{aligned}$$

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &\stackrel{\text{令 } e^x - 1 = t}{x = \ln(1+t)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\ln e} = 1. \end{aligned}$$

三、无穷小量的比较

在前面已经讨论了两个无穷小的和、差、积仍然是无穷小,但两个无穷小之比,结果是什么呢?例如,在牛顿流数术所举例子中,我们注意到 $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$ 的分子、分母都是当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的无穷小,即 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s(t) = 0, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t = 0$. 又如,当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha = 3x, \beta = x^2$ 及 $\gamma = \sin x$ 都是无穷小,但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2} = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$. 它们的比值极限都不同,为什么会出现这些差异呢?读者可以在 $x \rightarrow 0$ 的过程中,取一系列的值 $x = 0.1, 0.01, 0.001, \dots$, 对比 $\frac{x^2}{3x}, \frac{3x}{x^2}, \frac{\sin x}{3x}$ 中分子、分母的数值计算结果,会发现虽然这些变量都是当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小,但不同的无穷小趋于零的速度不同,正是这些速度的差异导致了比值极限结果的差异. 为了比较无穷小趋于零速度的快慢,我们引入下面的无穷小阶概念.

定义 1-6-1 设在 $x \rightarrow x_0$ 的极限过程中, α 与 β 都是无穷小,即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0,$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C$ (C 为常数, 且 $\alpha \neq 0$), 那么

(1) 若 $C = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$ (当 $x \rightarrow x_0$ 时, 此时也称 α 是比 β 低阶的无穷小).

(2) 若 $C \neq 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, β 与 α 是同阶的无穷小. 特别地, 若 $C = 1$, 称 α 与 β 是等价的无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$ (当 $x \rightarrow x_0$ 时).

(3) 若 $C = \infty$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, β 是比 α 低阶的无穷小, 记作 $\alpha = o(\beta)$.

注意 当 $x \rightarrow x_0^\pm$ 及 $x \rightarrow \infty (\pm\infty)$ 时, 无穷小阶的比较定义, 可仿照定义 1-6-1 给

出,请读者作为练习来完成.

例如, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 即 $\sin x \sim x (x \rightarrow 0)$;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, 即 $\ln(1+x) \sim x (x \rightarrow 0)$;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$, 即 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} (x \rightarrow 0)$;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, 即 $e^x - 1 \sim x (x \rightarrow 0)$.

例 10 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$.

证明 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$.

例 11 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$.

证明 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{x}{n}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x} - 1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + \sqrt[n]{1+x} + 1)}{\frac{x}{n}(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + \sqrt[n]{1+x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{x}{n}(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + \sqrt[n]{1+x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n}{(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + \sqrt[n]{1+x} + 1)}$$

$$= \frac{n}{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} + 1}$$

$$= \frac{n}{n} = 1,$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$.

等价无穷小在求解两个无穷小之比的极限时有重要的作用. 对此, 给出如下无穷小替换定理:

定理 1-6-1 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 与 α' 、 β 与 β' 是等价的无穷小,

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta'}{\alpha}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta'}{\alpha}$;

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta'}{\alpha} = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = \infty$.

注意 (1) 求极限时等价无穷小的替换规则是分别对分子、分母做整体等价替换, 它可以扩充到对分子或分母的乘积因子分别进行等价无穷小替换.

(2) 当分子或分母为和、差形式时, 不能对各部分分别做等价替换, 读者应通过例题仔细体会定理的含义.

例 12 用等价无穷小求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解 错解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$ (见例 10)、 $\sin x \sim x$,

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0.$$

$$\text{正解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3}.$$

因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$ (见例 10)、 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

注意 此题与例 3 进行比较, 可见结论正确. 这也验证了无穷小量替换定理的正确性.

例 13 用等价无穷小量求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)\tan x^3}{x^2 \sin x^2}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x} = 1$, 即 $e^x - 1 \sim x (x \rightarrow 0)$,

又因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x^3 \sim x^3$ 、 $\sin x^2 \sim x^2$,

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)\tan x^3}{x^2 \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^3}{x^2 \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

思考题

1. 在无穷小等价替换定理中, 当分子或分母为几部分代数之和时, 能否分别做等价替换呢?

2. 等价无穷小替换的含义是什么?

习题 1-6

1. 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan x}{x^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x};$$

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$ (x 为任意实数, 且 $x \neq 0$).

2. 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^x$;

(3) $\lim_{y \rightarrow 0} (1 - 2y)^{\frac{1}{y}}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\csc x}$;

(7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\sec x}$.

3. 比较下列各题中两个无穷小的阶.

(1) 当 $x \rightarrow 1$ 时, $x^2 - 1$ 与 $\frac{x-1}{x}$;

(2) 当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{1-x^2}{1+x}$ 与 $1-x$;

(3) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x-1}$ 与 $\frac{1}{x^2-1}$;

(4) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n+1}$.

4. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 4x}{8(1 - \cos^2 x)}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + x^2}{\tan 5x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^n}{(\sin x)^m}$.

第七节

函数的连续性及闭区间上连续函数的性质

教学建议:用唯物辩证法的观点方法,对背景问题深入分析,辨析变量的运动变化与相对静止之间的矛盾与内在联系,获取连续的概念. 深刻理解函数连续概念的本质与意义,有利于为后续学习和深刻理解导数概念和定积分概念提供思想基础.

微积分以初等函数为主要研究对象,其中初等函数的连续性又对微积分概念的建立起着基础性和决定性作用. 为了准确描述和深刻理解连续的内在含义,也为了理解函数连续对于建立导数和定积分概念的基础性、决定性作用,本节将对函数的连续性进行深入分析,并利用极限对函数的连续性给出精确定义.

一、函数的连续性

1. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的连续性

背景问题

在自然界中,树木的生长、一天之中某个地点温度的变化等;在建筑领域中,建筑物的风蚀老化、地基沉降引起的建筑物倾斜及形变等;在机械领域中,机械零件的锈蚀、机械零件的磨损等. 这些现象不胜枚举,都给我们以渐变(或所谓连续)的印象. 但这些现象背后的本质特征是什么呢?

问题分析

首先,我们注意到树木生长的高度、某个地点一天之中的温度变化、建筑物风蚀老化及倾斜形变的程度、机械零件的锈蚀及磨损程度等(这些量我们用 y 来表示),都与一个时间(用 x 表示)变化过程紧密关联. 没有时间的变化,这些量就不会发生变化. 也就是说,它们都是一个关于时间的函数,即 $y = f(x)$.

其次,我们也体会到这些量如果经过了较长的时间,改变量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 的变化就比较大. 例如,我们经常会遇到这样的问题:几年不见,小树苗长成参天大树;好久没来,这栋楼房已经这么破旧了;等等. 同样是这些问题,如果经过较短的时间,其改变量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 的变化就比较小.

从上述问题的分析中,我们发现,这些现象都有一个共同的本质属性,即当 x 在 x_0 处的改变量 $\Delta x (\neq 0)$ 无限接近 0 时,相应地, $y = f(x)$ 在 x_0 处的改变量 Δy 也无限地接近 0, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

于是,我们对于上述问题的共同本质属性加以概括,得到如下的定义:

定义 1-7-1 设函数 $y = f(x)$ 在邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义. 如果当 x 在 x_0 处的改变量 $\Delta x (\neq 0)$ 无限地接近 0 时 ($x_0 + \Delta x \in U(x_0, \delta)$), 函数 $y = f(x)$ 的改变量 Δy 也无限地接近 0, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \text{ 或 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续. 如图 1-7-1 所示.

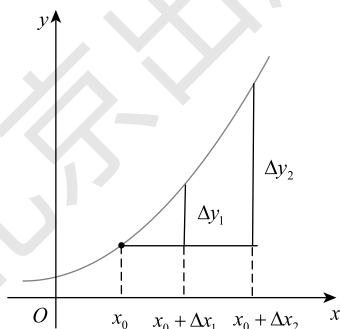


图 1-7-1

说明:函数连续定义 1-7-1 揭示了如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续,则自变量 x 越接近点 x_0 ,函数值 $f(x)$ 就越接近于 $f(x_0)$,即函数 y 在连续点 x_0 附近可近似看作一个常量.

对定义 1-7-1 的分析:

由于 $\Delta x = x - x_0$, 因此 $x = x_0 + \Delta x$. 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $x \rightarrow x_0$.

又由于 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$,

$$f(x) = [f(x) - f(x_0)] + f(x_0),$$

因此,有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) = f(x_0)$.

因此,根据函数极限定义知,函数连续性定义 1-7-1 具有如下三层含义:

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $f(x)$ 在点 x_0 处及其左右附近有定义;

(2) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;

(3) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

依据上述分析, 可知函数连续定义也可以做如下描述:

定义 1-7-2 设函数 $y = f(x)$ 在邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义. 如果函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限存在, 且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

例 1 证明函数 $y = 2x + 1$ 在点 $x = 1$ 处是连续的.



函数在 x_0 点的连续性的定义

证明 方法 1: 因为函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 所以函数在邻域 $U(1, \delta)$ 内有定义. 设自变量在 $x = 1$ 处有增量 Δx , 则函数相应的增量为

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = [2(1 + \Delta x) + 1] - (2 \times 1 + 1) = 2\Delta x,$$

$$\text{因为 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\Delta x = 0,$$

所以由函数连续定义 1-7-1 知, 函数 $y = 2x + 1$ 在点 $x = 1$ 处是连续的.

方法 2: 因为函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 所以函数在邻域 $U(1, \delta)$ 内有定义. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3,$$

$$\text{而 } f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3,$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1),$$

所以由函数连续定义 1-7-2 知, 函数 $y = 2x + 1$ 在点 $x = 1$ 处是连续的.

例 2 判断函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 在点 $x = x_0$ 处的连续性.

解 因为函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 所以函数在邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 - \lim_{x \rightarrow x_0} 2x + 1 = x_0^2 - 2x_0 + 1,$$

$$\text{而 } f(x_0) = x_0^2 - 2x_0 + 1,$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0^2 - 2x_0 + 1 = f(x_0),$$

所以函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

2. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的左、右连续性

(1) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

(2) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

3. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的左、右连续性与连续性的关系

定理 1-7-1 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

4. 函数 $y = f(x)$ 在区间内的连续性

若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点处都连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \forall x_0 \in (a, b),$$

则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 区间 (a, b) 称为函数的连续开区间.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 在 (a, b) 内连续, 且在右端点 b 处左连续, 又在左端点 a 处右连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a),$$

则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

如果函数在其整个定义域内连续, 则称这个函数为连续函数. 连续函数的直观印象是, 其图像为一条不间断的曲线.

二、函数的间断点

世界上的事物总是以一种矛盾的形式存在着. 连续和间断就是一对矛盾的两个方面, 间断也是自然界中一种普遍存在的现象. 对间断的进一步深入分析, 可以进一步加深对连续内涵的把握.

由定义 1-7-2 可看出, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 必须同时满足以下三个条件:

(1) 函数 $f(x)$ 在包括 x_0 点的一个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;

(3) 上述极限值等于函数在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$.

从上述条件容易得出, 如果函数 $f(x)$ 不满足上述三个条件之一, 就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是不连续的, 或称间断的. 点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点, 或称间断点.

例 3 如图 1-7-2 所示, 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 处无定义, 所以点 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点. 但函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的极限存在, 即

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2. \end{aligned}$$

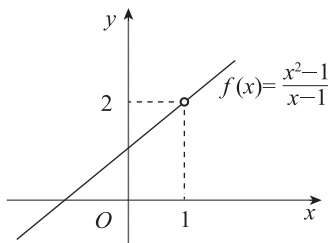


图 1-7-2

例 4 判断函数 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处的连续性.

解 由题易知函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有定义, 且 $f(0)=0$,

而右极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$,

左极限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2-1) = -1$,

即左、右极限不相等, 所以极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

因此, 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断(即不连续), 如图 1-7-3 所示.

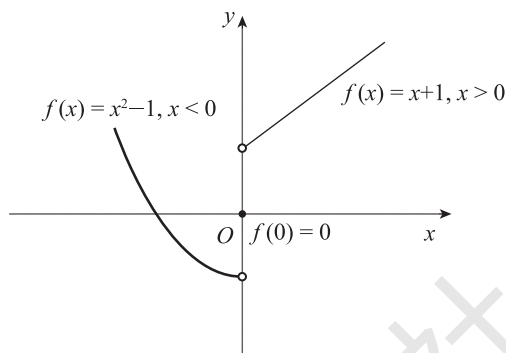


图 1-7-3



Mathematica 程序

```
Clear[x,]
```

```
Show[Plot[x+1,{x,-4,4}],Plot[x^2-1,{x,-4,0}],AxesLabel{"x","y"},AxesOrigin{0,0}]
```

说明 Show[{ $g_1, g_2, \dots$ }]命令, 能把多个函数图像显示在一个坐标系中.

例 5 正切函数 $y = \tan x$ 在点 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处无定义, 所以正切函数在点 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处间断(图 1-7-4).

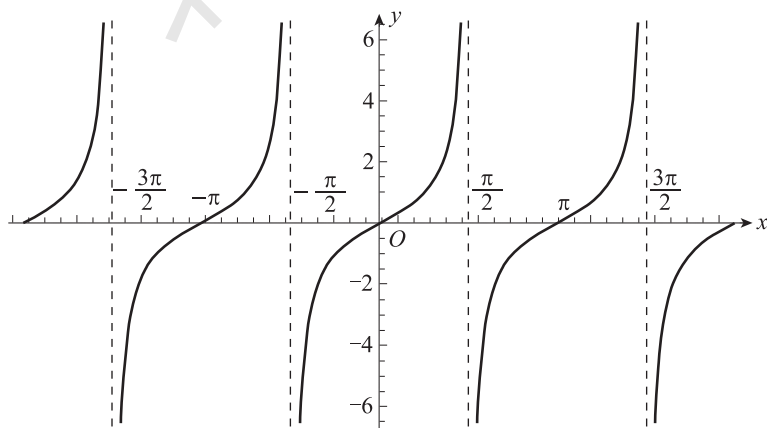


图 1-7-4

Mathematica 程序

```
Clear[x,y]
```

```
Plot[y=Tan[x],{x,-2π,2π}]
```

通过对上述几个间断点例题的观察,可以看出,间断点有着不同的类型,我们通常将间断点分成两类:

(1)第一类间断点. 如果函数 $y = f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限都存在,则称点 x_0 为该函数的第一类间断点.

在第一类间断点中,如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在),则称点 x_0 为该函数的第一类可去型间断点. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$,则称点 x_0 为该函数的第一类跳跃型间断点.

(2)第二类间断点. 如果函数 $y = f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在,则称点 x_0 为函数的第二类间断点. 一般包括孤立型间断点、无穷型间断点、震荡型间断点三类.

例如,例 5 中函数 $y = \tan x$ 在间断点 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处有 $\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$ (虽然 ∞ 为不存在,但有确定的变化趋势),因此 $y = \tan x$ 的所有间断点为无穷型.

又如,函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, 在点 $x = 0$ 处, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 既不存在,也不趋于 ∞ (即在 $x \rightarrow 0$ 时,函数值在一定范围内反复震荡,没有确定的变化趋势),因此点 $x = 0$ 是函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 的震荡型间断点,如图 1-7-5 所示.

Mathematica 程序

```
Clear[x,y]
```

```
Plot[y=Sin[1/x],{x,-1,1}]
```

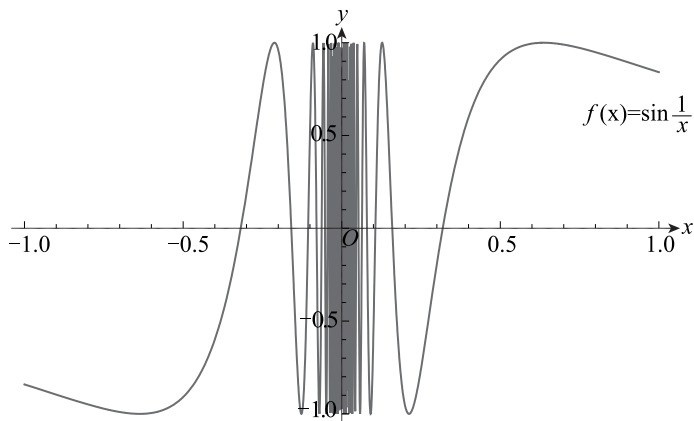


图 1-7-5

三、初等函数的连续性

由函数连续定义及初等函数的图像可以断定,基本初等函数在其定义区间内处处连续.

再由极限的四则运算法则、复合函数的极限运算法则及函数在点 x_0 处的连续定义,可得以下初等函数连续定理:

定理 1-7-2 若函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均在点 x_0 处连续,则 $f(x) \pm g(x)$ 、 $f(x) \cdot g(x)$ 、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) 均在点 x_0 处连续.

定理 1-7-3 若函数 $f(u)$ 在点 u_0 处连续, $g(x)$ 在点 x_0 处连续且 $u_0 = g(x_0)$, 则复合函数 $f[g(x)]$ 也在点 x_0 处连续.

证明 因为函数 $f(u)$ 在点 u_0 处连续, $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 所以根据函数连续定义有 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

又根据复合函数极限运算法则知:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] \stackrel{\text{令 } u = g(x)}{=} \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) \stackrel{g(x_0) = u_0}{=} f[g(x_0)].$$

由函数的连续定义可得:复合函数 $f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续.

由定理 1-6-1、基本初等函数连续性及初等函数定义可以得出:

定理 1-7-4 所有初等函数在其定义区间内处处连续.

说明 定理 1-7-4 给我们提供了求初等函数极限和判断初等函数连续性的一个重要而简单的方法.

(1)如果 $f(x)$ 是初等函数,且 x_0 是其定义区间内的点,则该点即为该函数的连续点,且函数在点 x_0 的函数值就是该点的极限值,即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 这时求函数连续点的极限时就可以采用直接代入法进行求解,而且在求复合函数极限时,函数符号“ f ”和极限符号“ $\lim$ ”可以交换次序.

例如,上述证明中的证明过程可以改写为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = f[g(x_0)].$$

(2)在讨论初等函数的连续性时,只需求出初等函数的定义域,定义域中所包含的区间即为函数的连续区间.

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 4x^2 + 1)$.

解 因为函数 $f(x) = e^x + 4x^2 + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 所以根据定理 1-7-4 知,函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内处处连续,而 $x = 0$ 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一点,因此 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续,因此根据连续定义有

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 4x^2 + 1) = 1 + 4 \times 0 + 1 = 2.$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(x^2 + 1)$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(x^2 + 1) = \arctan \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = \arctan(\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1)$
 $= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$

四、闭区间上连续函数的性质

定理 1-7-5(最值存在定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一定存在最大值和最小值, 如图 1-7-6 所示.

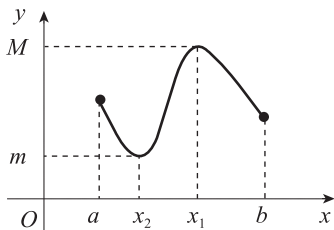


图 1-7-6

即如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\exists x_1 \in [a, b]$, 使得 $\forall x \in [a, b]$, 总有 $f(x) \leq f(x_1)$ 成立; 同时 $\exists x_2 \in [a, b]$, 使得 $\forall x \in [a, b]$, 总有 $f(x) \geq f(x_2)$ 成立.

此时 $f(x_1)$ 、 $f(x_2)$ 分别称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, x_1 、 x_2 则称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值点和最小值点. 函数的最大值和最小值统称为最值, 最大值点和最小值点统称为最值点.

注意 (1) 最值存在定理表明, 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一定存在着最大值点和最小值点.

(2) 最值点的个数及最值点在区间 $[a, b]$ 上的位置和确定方法, 定理没有给出.

定理 1-7-6(介值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, M 和 m 分别为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则对于介于 m 和 M 之间的任一实数 c (即 $m < c < M$), 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = c$, 如图 1-7-7 所示.

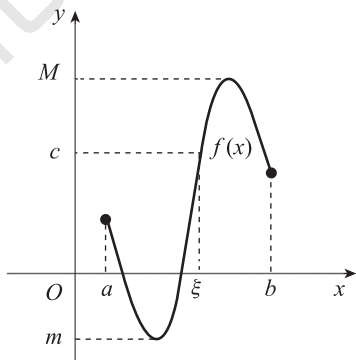


图 1-7-7

推论(零点定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且两个端点处函数值 $f(a)$ 、 $f(b)$ 异号, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 如图 1-7-8 所示.

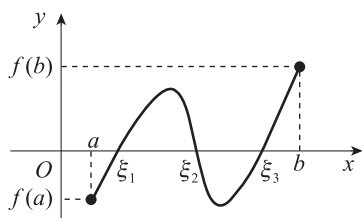


图 1-7-8

注意 和定理 1-7-5 一样, 定理 1-7-6 及其推论也只能说明当条件满足时, 其结论一定成立, 但其介值点和零点的数量及位置以及求解方法, 定理和推论并没有给出.

例 8 证明方程 $x^5 - 3\sin x - 1 = 0$ 在区间 $(1, 2)$ 内至少有一个实根.

证明 因为 $f(x) = x^5 - 3\sin x - 1$ 是初等函数且定义域为 $x \in (-\infty, +\infty)$, 因此它在 $[1, 2]$ 上是连续的.

又因为 $f(1) = 1^5 - 3\sin 1 - 1 = -3\sin 1 < 0$,

$f(2) = 2^5 - 3\sin 2 - 1 > 2^5 - 4 > 0$,

所以根据推论可知, 至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^5 - 3\sin \xi - 1 = 0 \quad (1 < \xi < 2).$$

上式说明, 方程 $x^5 - 3\sin x - 1 = 0$ 在区间 $(1, 2)$ 内至少有一个实根 ξ .

习题 1-7

1. 依据定理 1-7-4, 证明下列函数在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续函数.

(1) $y = \cos x$;

(2) $y = 2x^2 - 3x + 1$.

2. 已知 $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-5x+6}$, 求 $f(x)$ 的连续区间, 并求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

3. 求下列函数的间断点, 并说明间断点的类型.

(1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;

(2) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$;

(3) $f(x) = \sin x \cos \frac{1}{x}$;

(4) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $f(x) = \frac{\tan 2x}{x}$;

(6) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

4. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x, & x < 0, \\ k, & x = 0, \\ 1 + x \sin \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

当 k 取何值时, 函数 $f(x)$ 在其定义域内连续?

为什么?

5. 用函数连续性极限法则求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{\sqrt{x^2-2x+10}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + x^2}{e^x + 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a^2+x) - \ln a^2}{x} (a > 0);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \arctan(x \cot x);$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x).$$

6. 证明方程 $8x^3 - 12x^2 + 6x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内至少有一个实根.

7. 证明方程 $x = a \sin x + b (a > 0, b > 0)$ 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.

北京出版社