前　言

概率论与数理统计是数学与应用数学专业和理工类及经济类专业的一门重要的基础课．为了适应教学的需要，我们集概率论与数理统计优秀任课教师的多年教学与科研经验，结合不同层次高等院校概率论与数理统计课程特点和教学要求编写了本书．概率论是从数量侧面研究随机现象的统计规律性，它是本课程的理论基础．本书第 1 至 4 章是概率论的基本内容．数理统计是处理随机数据，建立有效的统计方法，进行统计推断．本书第 5 至 8 章是数理统计的基本内容．

本书着重介绍了概率论与数理统计的概念、方法，注重交代概念的实际意义，并通过精选例题加深学生对概念的理解，体现由浅入深、启发诱导的教学方法；力求在循序渐进的学习过程中，让学生逐步掌握概率论与数理统计的基本方法；突出概率论与数理统计方法的应用，对较烦琐的理论推导适当降低要求．本书的习题分节设立，这样可使习题更具有针对性，习题数量也明显增加．在习题的安排上体现层次性，在每节后面配备的习题分两部分，一部分为基本要求(横线以上部分)，另一部分为提高要求(横线以下部分).

使用本书教学大约需要 72 学时．若课时较少，可选取部分内容组织教学，比如，概率论部分可选取第 1、2、3 章大部分内容，统计部分可选取第 5、6、7 章大部分内容，其中最小方差无偏估计、两样本的假设检验与区间估计可略去．

本书由盐城师范学院张爱武、李万斌、袁兰兰、黄娟娟等老师编写，其中，第 1、2 章由张爱武编写，第 3、4 章由袁兰兰编写，第 5、6 章由黄娟娟编写，第 7、8 章由李万斌编写，张爱武教授对全书进行了统稿．本书的编写得到了江苏省品牌专业“数学与应用数学”(盐城师范学院)和盐城师范学院校品牌专业“统计学”的经费赞助，在此表示感谢!

在编写本书过程中，参阅了不少参考文献，在此对这些文献的作者表示感谢．

书稿虽经多次修改，但仍会有不足之处，恳请读者批评指正．

编　者

目　　录

绪　论

一、必然现象与随机现象

在实践活动中经常遇到各种各样的现象，这些现象大体可分为两类：一类是确定的，例如，“在一个标准大气压下，水加热到 100 ℃时必然沸腾”“向上抛一块石头，石头必然下落”“同性电荷相斥，异性电荷相吸”等，这种在一定条件下有确定结果的现象称为必然现象(确定性现象). 另一类现象是随机的，例如，在相同的条件下，向上抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，无论如何控制上抛条件，在每次上抛之前无法肯定上抛的结果是什么，这个试验多于一种可能结果，但是在试验之前不能肯定试验会出现哪一种结果；同样地，同一门大炮，对同一目标进行多次射击(同一型号的炮弹)，各次弹着点可能不尽相同，并且每次射击之前无法肯定弹着点的确切位置. 以上所举的现象都具有随机性，即在一定条件下进行试验或观察会出现不同的结果(也就是说，多于一种可能的试验结果)，而且在每次试验之前都无法预言会出现哪一种结果(不能肯定试验会出现哪一种结果)，这种现象称为随机现象.

再看两个试验：

试验Ⅰ：一盒中有 10 个完全相同的白球，搅匀后从中摸出 1 球；

试验Ⅱ：一盒中有 10 个除颜色外其他都相同的球，其中 5 个白球，5 个黑球，搅匀后从中任意摸取 1 球.

对于试验Ⅰ来说，在球没有被取出之前，我们就能确定取出的球必是白球，也就是说，在试验之前就能判定它只有一个确定的结果，这种现象就是必然现象.

对于试验Ⅱ来说，在球没有被取出之前，不能确定试验的结果(取出的球)是白球还是黑球，也就是说一次试验的结果(取出的球)是白球还是黑球，在试验之前无法肯定. 对于这一类试验而言，似乎没有什么规律而言，但是实践告诉我们，如果我们从盒子中反复多次取球(每次取 1 球，记录球的颜色后仍把球放回盒子中搅匀)，那么总可以观察到这样的事实：当试验次数 n 相当大时，出现白球的次数 $n_{白}$ 和出现黑球的次数 $n_{黑}$ 是很接近的，比值$\frac{n_{白}}{n}\left(或\frac{n_{黑}}{n}\right)$会逐渐稳定于$\frac{1}{2}$. 出现这个结果是完全可以理解的，因为盒子中的黑球数与白球数相等，从中任意摸 1 球，取得白球或黑球的“机会”相等.

试验Ⅱ所代表的类型，有多于一种可能的结果，但在试验之前不能确定试验会出现哪一种结果，这类试验所代表的现象称为随机现象. 对于试验而言，一次试验看不出什么规律，但是“大数次”地重复这个试验，试验的结果又遵循某些规律，这些规律称为“统计规律”. 在客观世界中，随机现象是极为普遍的，例如，“某地区的年降雨量”“某电话交换台在单位时间内收到的用户的呼唤次数”“一年的经济总量”等，这些都是随机现象.

二、随机试验

如果一个试验满足下列条件：

(1)试验可以在相同的条件下重复进行(可重复性);

(2)试验的所有可能结果是明确的,可知道的(在试验之前就可以知道的),并且不止一个(明确性);

(3)每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在一次试验之前却不能肯定这次试验出现哪一种结果(不确定性).

称这样的试验是一个随机试验.为方便起见,简称为试验.后面讨论的试验都是指随机试验.

三、概率论与数理统计的研究对象

概率论是从数量侧面研究随机现象及其统计规律性的数学学科,它的理论严谨,应用广泛,并且有独特的概念和方法,同时与其他数学分支有着密切的联系,是近代数学的重要组成部分.数理统计是对随机现象统计规律的研究,就是利用概率论的结果,深入研究统计资料,观察这些随机现象并发现其内在的规律性,进而做出一定精确程度的判断,将这些研究结果加以归纳整理,形成一定的数学模型.虽然概率论与数理统计在方法上不同,但作为一门学科,它们却相互渗透,相互联系.

概率论与数理统计这门学科的应用相当广泛,不仅在天文、气象、水文、地质、物理、化学、生物、医学等学科有其应用,且在农业、工业、商业、军事、电信等部门也有广泛的应用.

四、概率论与数理统计发展简史

概率论被称为"赌博起家"的理论.

概率论产生于17世纪中叶,是一门比较古老的数学学科.有趣的是,任何一门数学分支的产生与发展都不外乎是受生产、科学或数学自身发展的推动.概率论的产生,却起始于对赌博的研究.当时两个赌徒约定赌若干局,并且谁先赢 c 局便是赢家.若一个赌徒赢 $a(a<c)$ 局,另一个赌徒赢 $b(b<c)$ 局时终止赌博,那么应当如何分赌本?最初正是一个赌徒将问题求教于巴斯葛,促使巴斯葛同费尔马讨论这个问题,从而他们共同建立了概率论的第一基本概念——数学期望.

1657年惠更斯也给出了一个与他们类似的解法.

在他们之后,对研究这种随机(或称偶然)现象规律的概率论做出了贡献的是伯努利家族的几位成员,雅科布给出了赌徒输光问题的详尽解法,并证明了被称为"大数定律"的一个定理(伯努利定理).这是研究偶然事件的古典概率论中极其重要的结果,它表明在大量观察中,事件的频率与概率是极其接近的.历史上第一个发表有关概率论论文的人是伯努利,他于1713年发表了一篇关于极限定理的论文.概率论产生后的很长一段时间内,都是将古典概型作为概率来研究的,直到1812年,拉普拉斯在他的著作《分析概率论》中给出概率明确的定义,并且还建立了观察误差理论和最小二乘法估计法.从这时开始对概率的研究,实现了从古典概率论向近代概率论的转变.

概率论在20世纪再度迅速发展起来,则是由于科学技术的发展迫切需要研究有关一个或多个连续变化着的参变量的随机变数理论即随机过程论.1906年,俄国数学家马尔可夫提出了被称为"马尔可夫链"的数学模型,对发展这一理论做出贡献的还有柯尔莫

哥洛夫(俄国)、费勒(美国);1934 年,俄国数学家辛钦又提出了一种在时间中均匀进行着的平稳过程的理论.随机过程理论在科学技术中有着重要的应用,现在已建立了马尔可夫过程与随机微分方程之间的联系.

1960 年,卡尔门建立了数字滤波论,进一步发展了随机过程在制导系统中的应用.1917 年,俄国科学家伯恩斯坦首先给出了概率论的公理体系.1933 年,柯尔莫哥洛夫又以更完整的形式提出了概率论的公理结构.

相对于其他许多数学分支而言,数理统计是一个比较年轻的数学分支,它是研究怎样去有效地收集、整理和分析带有随机性的数据,以对所观察的问题做出推断或预测,直至为采取一定的决策和行动提供依据与建议.数理统计学是伴随着概率论的发展而发展起来的.当人们认识到必须把数据看成是来自具有一定概率分布的总体,所研究的对象是这个总体而不能局限于数据本身之日,也就是数理统计学诞生之时.

从现有资料看,19 世纪中叶以前已出现了若干重要工作,特别是高斯和勒让德关于观测数据误差分析和最小二乘法的研究.到 19 世纪末,经过包括皮尔森在内的一些学者的努力,这门学科已经开始形成.

数理统计学发展成一门成熟的学科,则是 20 世纪上半叶的事,它很大程度上要归功于皮尔森、费希尔等学者的工作.特别是费希尔的贡献,对这门学科的建立起了决定性的作用.1946 年,克拉默发表的《统计学数学方法》,是第一部严谨且比较系统的数理统计学著作,可以把它作为数理统计学进入成熟阶段的标志.

我国的概率论研究起步较晚,从 1957 年开始,先驱者是许宝騄先生.1957 年暑期,许老师在北大举办了一个概率统计的讲习班,从此,我国对概率统计的研究有了较大的发展.现在概率论与数理统计是数学系各专业的必修课之一,也是工科、经济类学科学生的公共课,许多高校都设立了统计学(特别是财经类高校).近年来,我国科学家对概率统计的研究也取得了较大的成果.

第 1 章　随机事件及概率

1.1　随机事件与样本空间

随机事件与样本空间是概率论中的两个最基本的概念.

1.1.1　基本事件与样本空间

对于随机试验来说,我们感兴趣的往往是随机试验的所有可能结果.例如,掷 1 枚硬币,我们关心的是出现正面还是出现反面这两种可能结果.若我们观察的是掷 2 枚硬币的试验,则可能出现的结果有(正,正)、(正,反)、(反,正)、(反,反)四种;若掷 3 枚硬币,其结果还要复杂,但还是可以将它们描述出来的.总之,为了研究随机试验,必须知道随机试验的所有可能结果.

1.基本事件

通常,根据我们研究的目的,将随机试验的每一个可能的结果称为基本事件.因为随机事件的所有可能结果是明确的,从而所有的基本事件也是明确的.例如,在抛掷硬币的试验中,“出现反面”“出现正面”是两个基本事件,又如,在掷骰子试验中,“出现 1 点”“出现 2 点”“出现 3 点”……“出现 6 点”这些都是基本事件.

2.样本空间

基本事件的全体称为样本空间.也就是试验所有可能结果的全体是样本空间.样本空间通常用大写的希腊字母 Ω 表示.Ω 中的点即基本事件,也称为样本点,常用 ω 表示,有时也用 A,B,C 等表示.

在具体问题中,给定样本空间是研究随机现象的第一步.

例 1　一盒中有 10 个完全相同的球,分别标有号码 $1,2,3,\cdots,10$,从中任取 1 球,观察其标号,写出其样本空间.

解:令 $i=\{$取得球的标号为 $i\}$,$i=1,2,3,\cdots,10$,

则 $\Omega=\{1,2,3,\cdots,10\}$,$\omega_i=\{$标号为 $i\}$,$i=1,2,3,\cdots,10$,

$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots,\omega_{10}$ 为基本事件(样本点).

例 2　写出下列试验的样本空间:

(1)同时抛掷红色与白色的骰子各 1 颗,记录其向上一面(简称出现)的点数;

(2)同时抛掷 2 颗骰子,记录出现的点数之和.

解:(1)用有序数组(i,j)表示红色骰子出现 i 点,白色骰子出现 j 点,则样本空间可表示为

$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\cdots,(6,5),(6,6)\}$,计 36 个样本点;

(2)试验和(1)类似,但观察的内容不相同,其样本点也不相同,不难看出样本空间可表示为

$\Omega=\{2,3,4,\cdots,12\}$.

例 1 和例 2 讨论的样本空间只有有限个样本点，是比较简单的样本空间.

例 3　讨论某寻呼台在单位时间内收到的呼叫次数，可能结果一定是非负整数而且很难得到一个确切的上界数. 这样就可以把样本空间取为 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

这样的样本空间含有无穷个样本点，但这些样本点可以依照某种顺序排列起来，称它为可列样本空间.

例 4　讨论某地区的气温时，自然把样本空间取为 $\Omega=(-\infty,+\infty)$ 或 $\Omega=[a,b]$，这样的样本空间含有无穷个样本点，它充满一个区间，称它为无穷样本空间.

从这些例子可以看出，样本空间是由试验完全确定的. 由于问题的不同，样本空间可以相当简单，也可以相当复杂. 在后面的讨论中，都认为样本空间是预先给定的.

注意：对于一个实际问题或一个随机现象，考虑问题的角度不同，样本空间也可能选择得不同.

例如，掷骰子这个随机试验，若考虑的是出现的点数，则样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$；若考虑的是出现奇数点还是出现偶数点，则样本空间 $\Omega=\{$奇数，偶数$\}$.

由此说明，同一个随机试验可以有不同的样本空间.

在实际问题中，选择恰当的样本空间来研究随机现象是概率论中值得研究的一个问题.

1.1.2　随机事件

随机试验总有一定的观察目的，除了考察其所有可能结果组成的样本空间外，还需观察其他的各种各样的结果. 如在例 1 中，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,\cdots,10\}$. 研究下面这些问题：

$A=\{$球的标号为 3$\}$，$B=\{$球的标号为偶数$\}$，$C=\{$球的标号不大于 5$\}$，其中 A 为一个基本事件，而 B 与 C 则由基本事件组成.

例如，B 发生(出现)必须而且只需下列样本点 2，4，6，8，10 之一发生，它由五个基本事件组成.

同样地，C 发生必须而且只需下列样本点 1，2，3，4，5 之一发生.

A,B,C 这些结果在一次试验中既可能发生，也可能不发生，体现了随机性. 这样的结果称为随机事件，简称事件. 习惯上用大写英文字母 A,B,C 等表示. 在试验中，如果出现 A 中包含了某一个基本事件 ω，则称作 A 发生，并记作 $\omega\in A$.

我们知道，样本空间 Ω 包含了全体基本事件(样本点)，而随机事件不过是由具有某些特征的基本事件组成的. 从集合论的角度来看，一个随机事件不过是样本空间 Ω 的一个子集而已.

如例 1 中 $\Omega=\{1,2,3,\cdots,10\}$，显然 A,B,C 都是 Ω 的子集，它们可以简单地表示为

$$A=\{3\},B=\{2,4,6,8,10\},C=\{1,2,3,4,5\}.$$

因为 Ω 是由所有基本事件组成，因而在一次试验中，必然要出现 Ω 中的某一基本事件，即 $\omega\in\Omega$，也就是在试验中 Ω 必然要发生(出现). 后面用 Ω 表示一个必然事件，它本身就是 Ω 的子集. 例如，掷骰子这个随机试验，“掷出的点数不小于 1”“掷出的点数是自然数”等，它们在每次试验中必然出现，它们都是必然事件.

相应地，对于空集$\varnothing$，在任意一次试验中不能有 $\omega\in\varnothing$，也就是说$\varnothing$永远不可能发生，

所以$\varnothing$称为不可能事件. 如,在掷骰子这个试验中,“掷出的点数大于6”“掷出的点数是负数”等,它们在每次试验中都不会出现,它们都是不可能事件.

实质上,必然事件就是在每次试验中都发生的事件,不可能事件就是在每次试验中都不发生的事件. 必然事件与不可能事件的发生与否,已经失去了“不确定性”,即随机性,因而本质上不是随机事件,但为了讨论问题的方便,还是将它们看作随机事件.

例5 一批产品共10件,其中2件次品,其余为正品,从中任取3件,则$A=\{$恰有1件正品$\}$,$B=\{$恰有2件正品$\}$,$C=\{$至少有2件正品$\}$,$D=\{$3件中至少有1件次品$\}$,这些都是随机事件,而$\Omega=\{$3件中有正品$\}$为必然事件,$\varnothing=\{$3件都是次品$\}$为不可能事件.

对于这个随机试验来说,基本事件总个数为C_{10}^3.

1.1.3 事件的关系与运算

对于随机试验而言,它的样本空间Ω可以包含很多随机事件,概率论的任务之一就是研究随机事件的规律,通过对较简单事件规律的研究,再掌握更复杂事件的规律,为此需要研究事件和事件之间的关系与运算.

若没有特殊说明,认为样本空间Ω是给定的,且还定义了Ω中的一些事件,A,B,A_i $(i=1,2,\cdots)$等. 由于随机事件是样本空间的子集,因此事件的关系与运算和集合的关系与运算完全类似.

1. 事件的包含关系

定义1 若事件A发生必然导致事件B发生,则称事件B包含了A,也称A为B的子事件,记作$A\subset B$或$B\supset A$.

比如前面提到过的$A=\{$球的标号为6$\}$,这一事件就导致了事件$B=\{$球的标号为偶数$\}$的发生,因为摸到标号为6的球就意味着标号为偶数的球出现了,所以$A\subset B$.

可以给上述含义一个几何解释. 设样本空间Ω是一个长方形,用一个圆表示一个随机事件,这类图形称为维恩(Venn)图. A,B是两个事件,也就是说,它们是Ω的子集,“A发生必然导致B发生”,意味着属于A的样本点都在B中,由此可见,事件$A\subset B$的含义与集合论是一致的.

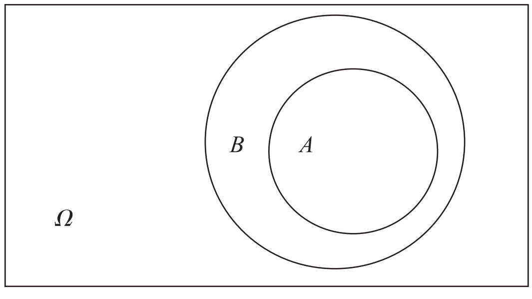


图1-1

特别地,对任何事件A,有$A\subset\Omega$,$\varnothing\subset A$.

例6 设某种动物活到20岁记为A,活到25岁记为B,则$B\subset A$. 因为该动物活到25岁,肯定先要活到20岁.

2. 事件的相等

定义 2　设 $A,B\subset\Omega$,若 $A\subset B$,同时 $B\subset A$,称 A 与 B 相等,记作 $A=B$. 相等的两个事件 A,B,总是同时发生或同时不发生. 在同一样本空间中,两个事件相等,意味着它们含有相同的样本点.

3. 并(和)事件与积(交)事件

定义 3　设 $A,B\subset\Omega$,称事件"A 与 B 中至少有一个发生"为 A 和 B 的和事件或并事件,记作 $A\cup B$,有时也记为 $A+B$,如图 1-2 所示.

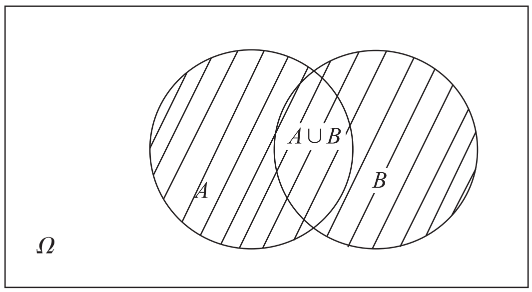


图 1-2

实质上,$A\cup B=$"A 或 B 发生".

显然,$A\cup\varnothing=A$,$A\cup\Omega=\Omega$,$A\cup A=A$,$A\subset A\cup B$,$B\subset A\cup B$.

若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$.

例 7　设某种圆柱形产品,若底面直径和高都合格,则该产品合格.

令 $A=\{$底面直径不合格$\}$,$B=\{$高不合格$\}$,则 $A\cup B=\{$产品不合格$\}$.

和事件的概念可以推广到多个事件的情形.

推广　设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,称"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并,记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

和事件的概念还可以推广到可列个事件的情形.

定义 4　设 $A,B\subset\Omega$,称"A 与 B 同时发生"这一事件为 A 和 B 的积事件或交事件,记作 AB 或 $A\cap B$,如图 1-3 所示.

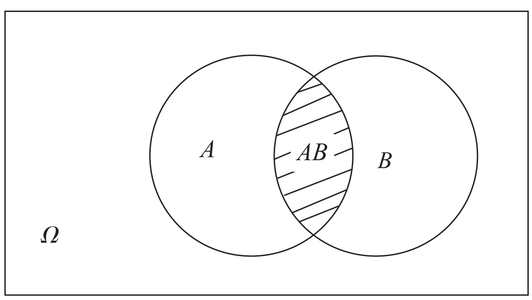


图 1-3

显然，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap\Omega=A$，$A\cap A=A$，$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$.

若 $A\subset B$，则 $A\cap B=A$.

如例 7 中，若 $C=\{$底面直径合格$\}$，$D=\{$高合格$\}$，则 $CD=\{$产品合格$\}$.

积事件的概念可以推广为多个事件的情形.

推广 设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，称"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"这一事件为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$.

同样，积事件的概念也可以推广到可列个事件的情形.

4. 差事件

定义 5 设 $A, B\subset\Omega$，称"A 发生 B 不发生"这一事件为 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$，如图 1-4 所示.

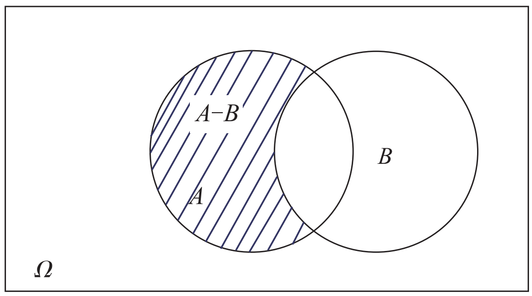


图 1-4

如例 7 中，$A-B=\{$底面直径不合格，高合格$\}$.

由集合论的相关结论有 $A-B=A-AB$，$A-\varnothing=A$.

5. 对立事件

定义 6 称"$\Omega-A$"为 A 的对立事件或称为 A 的逆事件，记作 $\overline{A}$，如图 1-5 中阴影部分所示.

$$A\cup\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing.$$

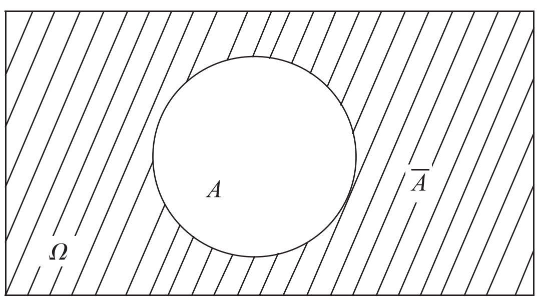


图 1-5

由此说明，在一次试验中，A 与 $\overline{A}$ 有且仅有一个发生，即不是 A 发生就是 $\overline{A}$ 发生.

显然 $\overline{\overline{A}}=A$，由此说明 A 与 $\overline{A}$ 互为逆事件，且有

$$\overline{\Omega}=\varnothing, \overline{\varnothing}=\Omega, A-B=A\overline{B}.$$

例 8　设有 100 件产品,其中 5 件产品为次品,从中任取 50 件产品. 记 $A=\{50$ 件产品中至少有 1 件次品$\}$,则 $\overline{A}=\{50$ 件产品中没有次品$\}=\{50$ 件产品全是正品$\}$.

由此说明,若事件 A 比较复杂,往往它的对立事件 $\overline{A}$ 比较简单,因此我们在讨论复杂事件时,往往可以转化为讨论它的对立事件.

6. 互不相容事件(互斥事件)

定义 7　若在一次试验中,两个事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,称 A 与 B 为互不相容事件(或互斥事件).

注意:任意两个基本事件都是互斥的.

推广　设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互斥(互不相容).

若 A,B 为对立事件,则 A,B 互斥. 若 A,B 为互斥事件,则 A,B 不一定为对立事件. 例如,在掷骰子试验中,“掷出的点数是 1”与“掷出的点数是 2”是互斥事件,但“掷出的点数是 1”这个事件的对立事件是“掷出的点数不是 1”,它包含了“掷出的点数是 2”这个事件.

7. 完备事件组

定义 8　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是有限个或可列个事件,若其满足

(1)$A_i\cap A_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots,$

(2)$\bigcup\limits_i A_i=\Omega,$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是一个完备事件组.

显然,A 与 $\overline{A}$ 是一个完备事件组.

8. 事件的运算法则

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A,AB=BA$;

(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$;

(3)分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4)对偶原则　$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i},\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$

事件间的关系与运算和集合的关系与运算是一致的,为方便起见,给出下列对照表(表 1-1).

表 1-1

记号	概率论	集合论
Ω	概率空间,必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B 相等	A 与 B 相等

续表

记号	概率论	集合论
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	A 与 B 没有相同元素

例 9　设 A,B,C 为 Ω 中的随机事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) A 与 B 发生而 C 不发生：　$AB-C$ 或 $AB\overline{C}$；

(2) A 发生，B 与 C 不发生：　$A-B-C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}$；

(3)恰有一个事件发生：　$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$；

(4)恰有两个事件发生：　$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}$；

(5)三个事件都发生：　ABC；

(6)至少有一个事件发生：　$A \cup B \cup C$ 或(3)(4)(5)之并；

(7) A,B,C 都不发生：　$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(8) A,B,C 不都发生：　$\overline{ABC}$；

(9) A,B,C 不多于一个发生：　$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup CA}$；

(10) A,B,C 不多于两个发生：　$\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$.

注意：用其他事件的运算表示一个事件，方法往往不唯一，如上例中的(9)和(10). 因此在解决实际问题时要根据需要选择一种恰当的表示方法.

例 10　试验 E：袋中有 3 个球编号为 1,2,3，从中任意摸出 1 球，观察其号码，记 $A=$ {球的号码小于 3}，$B=$ {球的号码为奇数}，$C=$ {球的号码为 3}. 试问：

(1) E 的样本空间是什么？

(2) A 与 B，A 与 C，B 与 C 是否互不相容？

(3) A,B,C 的对立事件是什么？

(4) A 与 B 的和事件、积事件、差事件各是什么？

解：设 $\omega_i=$ {摸到球的号码为 i}，$i=1,2,3$，则

(1) E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$；

(2) $A=\{\omega_1,\omega_2\}$，$B=\{\omega_1,\omega_3\}$，$C=\{\omega_3\}$，

A 与 B，B 与 C 是相容的，A 与 C 互不相容；

(3) $\overline{A}=\{\omega_3\}$，$\overline{B}=\{\omega_2\}$，$\overline{C}=\{\omega_1,\omega_2\}$；

(4) $A \cup B=\Omega$，$AB=\{\omega_1\}$，$A-B=\{\omega_2\}$.

1.1.4　事件域

前面曾经指出，事件是样本空间 Ω 的某个子集，但一般并不把 Ω 的一切子集都作为事件，因为这将会给进一步的讨论带来困难. 另外，由于讨论问题的需要，又必须把问题中感兴趣的事件都包括进来，例如，若 A 是事件，则应要求 $\overline{A}$ 也是事件；若 A,B 是事件，则 $A \cap B$，$A \cup B$，$A-B$ 等也应是事件. 用集合论的语言来说，就是样本空间 Ω 中某些子

集组成的集合类要关于运算“$\cup$”“$\cap$”和“$-$”是封闭的. 为此，我们通常根据具体问题的需要，适当选取 Ω 的一些子集组成集合类$\mathscr{F}$，要求$\mathscr{F}$对集合的逆、交、并等运算封闭，而把 Ω 中属于$\mathscr{F}$的那些子集叫作事件，把$\mathscr{F}$称作事件域.

定义 9　设 Ω 是一给定的样本空间，$\mathscr{F}$是由 Ω 的一些子集构成的集合类，$\mathscr{F}$满足下列条件：

(1)$\Omega\in\mathscr{F}$；

(2)若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$；

(3)若 $A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$.

则称$\mathscr{F}$为事件域，$\mathscr{F}$中的元素称为事件，Ω 称为必然事件.

在集合论中，满足上述三个条件的集合类称为布尔代数(σ 代数)，所以事件域是一个布尔代数. 对于样本空间 Ω，如果$\mathscr{F}$是 Ω 的一切子集的全体，显然，$\mathscr{F}$是一个布尔代数.

关于$\mathscr{F}$有如下性质：

(1)$\varnothing\in\mathscr{F}$(由条件(1)(2)可得)；

(2)若 $A,B\in\mathscr{F}$，则 $A\cap B,A\cup B,A-B\in\mathscr{F}$($A,B\in\mathscr{F}$，由(3)$A\cup B\in\mathscr{F}$，$\overline{A},\overline{B}\in\mathscr{F}$，$\overline{A}\cup\overline{B}\in\mathscr{F}$，$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=AB\in\mathscr{F}$，$A\,\overline{B}=A-B\in\mathscr{F}$)；

(3)若 $A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots$，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$($A_i\in\mathscr{F}$，$\overline{A_i}\in\mathscr{F}$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}\in\mathscr{F}$，$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$).

例 11　$\mathscr{F}=\{\varnothing,\Omega\}$是一个事件域，它所含的元素最少，称它为最小事件域.

例 12　$\mathscr{F}=\{\varnothing,A,\overline{A},\Omega\}$，其中 $A\subset\Omega$，是一个事件域.

例 13　$\mathscr{F}=\{A|A\subset\Omega\}$，即$\mathscr{F}$是由 Ω 的一切子集所构成的集合，是一个事件域，称它为最大事件域.

特别地，若 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$为有限的样本空间，则$\mathscr{F}=\{\varnothing,\{\omega_1\},\cdots,\{\omega_n\},\{\omega_1,\omega_2\},\cdots,\{\omega_{n-1},\omega_n\},\cdots,\Omega\}$是 Ω 上的最大事件域，它共有 2^n 个元素.

例 14　设 $A_i\subset\Omega$，$i=1,2,3$，$A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega$，$A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j=1,2,3$，

则$\mathscr{F}=\{\varnothing,A_1,A_2,A_3,\Omega\}$不是事件域；

但$\mathscr{F}'=\{\varnothing,A_1,A_2,A_3,A_1\cup A_2,A_1\cup A_3,A_2\cup A_3,\Omega\}$是一个事件域.

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1)抛 3 枚硬币，观察向上一面是正面还是反面；

(2)掷 3 颗骰子，记录出现的点数；

(3)连续抛 1 枚硬币，直至出现正面为止；

(4)某城市一天内的用水量.

2. 在抛 3 枚硬币的试验中，写出下列事件的集合表示：

(1)A=“至少出现一次正面”；

(2)B="最多出现一次正面";

(3)C="恰好出现一次正面";

(4)D="出现三面相同".

3. 一个工人生产了 n 个零件,以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品($1\leqslant i\leqslant n$),试用 A_i 表示下列事件:

(1)没有 1 个零件是不合格品;

(2)至少有 1 个零件是不合格品;

(3)只有 1 个零件是不合格品;

(4)至少有 2 个零件不是不合格品;

(5)恰好有 $k(1\leqslant k\leqslant n)$个零件是合格品.

4. 假设 A_1,A_2,A_3 是同一随机试验的三个事件,试通过它们表示下列各事件:

(1)只有 A_1 发生;

(2)只有 A_1 和 A_2 发生;

(3)A_1,A_2,A_3 中恰有一个发生;

(4)A_1,A_2,A_3 中至少有一个发生;

(5)A_1,A_2,A_3 都不发生.

5. 设某人向目标射击 3 次,用 A_i 表示"第 i 次射击击中目标"($i=1,2,3$),试用语言描述下列事件:

(1)$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$; (2)$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2$; (3)$(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)$.

6. 互不相容事件与对立事件有什么区别? 说出下列各对事件的关系:

(1)$|x-a|<\delta$ 与 $|x-a|\geqslant\delta$; (2)$x>20$ 与 $x<18$;

(3)20 件产品全是合格品与 20 件产品中只有 1 件次品;

(4)20 件产品全是合格品与 20 件产品中至少有 1 件次品;

(5)$x>20$ 与 $x\leqslant 22$.

7. 证明:若事件 A 与 B 为对立事件,则$\overline{A}$与$\overline{B}$也为对立事件.

8. 证明:若 A,B 为两个事件,且 $AB=\overline{AB}$,证明 A 与 B 为对立事件.

9. 指出下列各式成立的条件(用 A 与 B 的关系表达):

(1)$AB=A$; (2)$(A\cup B)-A=B$.

---

10. 设$\mathcal{F}$为一事件域,若 $A_n\in\mathcal{F}$,$n=1,2,\cdots$,试证:

(1)$\varnothing\in\mathcal{F}$;

(2)有限并$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{F}$,$n\geqslant 1$;

(3)有限交$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{F}$,$n\geqslant 1$;

(4)可列交$\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i\in\mathcal{F}$,$n\geqslant 1$;

(5)差运算 $A_1-A_2\in\mathcal{F}$.

1.2　概率定义及概率的性质

1.2.1　概率的描述性定义

对于随机试验中的随机事件，在一次试验中是否发生，虽然不能预先知道，但是它们发生的可能性是有大小之分的. 如掷 1 枚质地均匀的硬币，那么随机事件 A(正面朝上)和随机事件 B(正面朝下)发生的可能性是一样的$\left(为\frac{1}{2}\right)$；又如袋中有 8 个白球，2 个黑球，从中任取 1 球，取到白球的可能性要大于取到黑球的可能性. 一般地，对于任何一个随机事件都可以找到一个数值与之对应，该数值作为事件发生的可能性大小的度量.

定义 1　随机事件 A 发生的可能性大小的度量(数值)，称为 A 发生的概率，记为$P(A)$.

1.2.2　概率的统计定义

1. 频率的概念

对于一个随机试验来说，它发生可能性大小的度量是由自身决定的，并且是客观存在的. 概率是随机事件发生可能性大小的度量，是自身的属性. 一个根本问题是，对于一个给定的随机事件发生可能性大小的度量——概率，究竟有多大呢？

掷硬币的试验，做一次试验，事件 A(正面朝上)是否发生是不确定的，然而这是问题的一个方面，当试验大量重复做的时候，事件 A 发生的次数，也称为频数，体现出一定的规律性，约占总试验次数的一半，也可写成 n_A.

A 发生的频率$=\dfrac{频数}{试验总次数}$，与$\dfrac{1}{2}$接近.

一般地，设随机事件 A 在 n 次试验中出现了 n_A 次，比值 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$称为事件 A 在这 n 次试验中出现(发生)的频率.

历史上有人做过掷硬币的试验：

表 1-2

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K. 皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
	24 000	12 012	0.500 5

从上表可以看出，不管什么人去抛，当试验次数逐渐增多时，$f_n(A)$总是在 0.5 附近摆动而逐渐稳定于 0.5. 从这个例子可以看出，一个随机试验的随机事件 A，在 n 次试验中出现的频率 $f_n(A)$，当试验的次数 n 逐渐增大时，它在一个常数附近摆动，而逐渐稳定于这个常数. 这个常数是客观存在的，这就是频率的稳定性. “频率稳定性”的性质，不断地被人类的实践活动所证实，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性.

2. 概率的统计定义

由于频率反映了事件发生的频繁程度，其大小也能用来度量一个事件发生的可能性的大小. 基于频率的稳定性质，因此在试验的基础上可以给出概率的统计定义.

定义 2 当重复试验次数 n 足够大时，事件 A 的频率在某一常数 p 附近摆动，且随着试验次数的增大，摆动的幅度越来越小，则称常数 p 为事件 A 的概率.

频率的稳定性揭示了随机现象中隐藏的规律性，用频率的稳定值来度量事件发生的可能性大小是合适的.

注意：“频率的极限就是概率”这句话是不正确的，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=P(A)$ 不正确.

事实上，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=P(A)$ 成立，由 $\varepsilon-N$ 定义，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N\Rightarrow$ $\left|\frac{n_A}{n}-P(A)\right|<\varepsilon$.

而频率具有随机性，$\forall n>N$，并不能保证 $\left|\frac{n_A}{n}-P(A)\right|<\varepsilon$ 恒成立.

例如，当 $n_A=n$ 时，取 $\varepsilon<1-P(A)$，上述不等式就不成立.

因此，在概率论与数理统计中不能沿用数学分析或高等数学中的一般极限的定义了.

在实际使用中，由于频率的稳定性，当试验次数足够大时，人们往往用频率值作概率的近似值.

3. 频率的性质

由频率的定义 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$，$0\leqslant n_A\leqslant n$，可以得到频率的性质：

(1) 非负性：$f_n(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：若 Ω 为必然事件，则 $f_n(\Omega)=1$；

(3) 有限可加性：若 A,B 互不相容，即 $AB=\varnothing$，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

由这三条基本性质，还可以推出频率的其他性质：

(4) 不可能事件的频率为 0，即 $f_n(\varnothing)=0$；

(5) 若 $A\subset B$，则 $f_n(A)\leqslant f_n(B)$，由此还可以推得 $f_n(A)\leqslant 1$；

(6)对有限个两两互不相容的事件的频率具有可加性，即若 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant m$，$i\neq j)$，则 $f_n(\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}f_n(A_i)$.

1.2.3 概率的公理化定义

到 20 世纪初，概率论的各个领域已经得到了大量的研究成果，而人们对概率论在其他基础学科和工程技术上的应用已出现了越来越大的兴趣，但是关于概率论的一些基本概念，如事件、概率却没有明确的定义，这是一个很大的矛盾，这个矛盾使人们对概率客观含义甚至相关的结论的可应用性都产生了怀疑，由此可以说明，到那时为止，概率论作为一个数学分支来说，还缺乏严格的理论基础，这就大大妨碍了它的进一步发展.

19 世纪末以来，数学的各个分支广泛流传着一股公理化潮流，这个流派主张将假定公理化，其他结论则由它演绎导出. 在这种背景下，1933 年，俄国数学家柯尔莫哥洛夫在集合与测度论的基础上提出了概率的公理化定义，这个定义综合了前人的研究成果，明确定义了概率的基本概念，使概率论成为严谨的数学分支，对近几十年来概率论的迅速发展起了积极的作用，柯尔莫哥洛夫的公理化定义已经被广泛地接受.

在公理化结构中，概率是针对事件定义的，即对于事件域$\mathscr{F}$中的每一个元素 A 有一个实数 $P(A)$与之对应. 一般地，把这种从集合到实数的映射称为集合函数. 因此，概率是定义在事件域$\mathscr{F}$上的一个集合函数. 此外，在公理化结构中也规定概率应满足的性质，而不是具体给出它的计算公式或方法.

概率应具有什么样的性质呢？通过概率与频率之间的关系可知，概率应具有非负性、规范性、可列可加性.

从而有如下公理化定义：

定义 3　定义在事件域$\mathscr{F}$上的一个集合函数 P 称为概率. 如果它满足如下三个条件：

(1)非负性：$\forall A\in\mathscr{F}, P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性：若 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots$，且两两互不相容，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

通过描述一个随机试验的数学模型，应该具备以下三要素：

①样本空间 Ω；②事件域(σ一代数)$\mathscr{F}$；③概率($\mathscr{F}$上的规范测度)P，习惯上常将这三者写成$(\Omega,\mathscr{F},P)$，并称它是一个概率空间. 由此，给出一个随机试验，就可以把它抽象成一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$.

概率的公理化定义刻画了概率的本质. 概率是集合(事件)的函数，若在事件域$\mathscr{F}$上给出一个函数，当这个函数能满足上述三条公理，就称为概率；当这个函数不能满足上述三条公理中的任一条，就被认为不是概率.

1.2.4　概率的性质

由概率的非负性、规范性和可列可加性，可以得出概率的其他一些性质：

(1)不可能事件的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$.

证明：因为可列个不可能事件的和事件仍为不可能事件，所以

$$\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\cdots\cup\varnothing\cup\cdots,$$

因为不可能事件与任何事件是互不相容的，故由可列可加性得到

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots,$$

从而由 $P(\Omega)=1$，得到 $P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots=0$，

再由非负性，有 $P(\varnothing)=0$.

注意　概率的规范性及性质(1)反过来不一定成立. 反例在后面给出.

(2)概率具有有限可加性，即若 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

证明：对 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\varnothing,\varnothing,\cdots$应用可列可加性，得到

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\cdots\cup\varnothing\cup\cdots)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

特别地，若 $A\overline{A}=\varnothing, A\cup\overline{A}=\Omega$，有

(3)对任一随机事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4)若 $A\supset B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

证明:因为 $A\supset B$,则 $A=B\cup(A-B)$.

又 $B\cap(A-B)=\varnothing$,

所以 $$P(A)=P(B)+P(A-B),$$

即 $$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

推论 1 若 $A\supset B$,则 $P(A)\geqslant P(B)$;

推论 2 对任一事件 A,$P(A)\leqslant 1$;

推论 3 对 $A,B\in\mathcal{F}$,则 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

(5)对任意两个事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明:因为 $A\cup B=A\cup(B-A)$,而 A 与 $B-A$ 互不相容,由有限可加性及性质(4)得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推论 1 对任意两个事件 A,B,有 $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

用数学归纳法可证得.

推论 2 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个随机事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right).$$

此公式称为概率的一般加法公式.

特别地,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

推论 3 对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

从性质(2)可知,由可列可加性可以推出有限可加性,但是一般来说,由有限可加性并不能推出可列可加性,这两者之间的差异可以用另一个形式来描述.

设 $A_n\in\mathcal{F}(n=1,2,\cdots)$且 $A_n\subset A_{n+1}$,则称$\{A_n\}$是$\mathcal{F}$中的一个单调不减的集合序列.

定义 4 对于$\mathcal{F}$上的集合函数 P,若对$\mathcal{F}$中的任一单调不减的集合序列$\{A_n\}$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)$,则称集合函数 P 在$\mathcal{F}$上是下连续的,其中$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

类似可定义上连续性.

定理 若 P 是$\mathcal{F}$上非负的、规范的集合函数,则 P 具有可列可加性的充要条件是:

(1)P 是有限可加的;

(2)P 在$\mathcal{F}$上是下连续的.

该定理也称为连续性公理.

例 1 设 A,B 互不相容,且 $P(A)=p$,$P(B)=q$,求 $P(A\cup B)$,$P(\overline{A}\cup B)$,$P(AB)$,$P(\overline{A}B)$,$P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解:因为 A,B 互不相容,所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=p+q,$$
$$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})=1-p,$$
$$P(AB)=0,$$

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=q,$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-p-q.$$

例 2　设 $P(A)=p,P(B)=q,P(A\cup B)=r$,求 $P(AB),P(\overline{A}B),P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解:由概率性质知

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=p+q-r,$$
$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=q-(p+q-r)=r-p,$$
$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(AB)=1-p-q+r.$$

例 3　设 A,B,C 为三个事件,且 $AB\subset C$,证明 $P(A)+P(B)-P(C)\leqslant 1$.

证明:因为 $AB\subset C$,所以 $P(AB)\leqslant P(C)$,又 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

故
$$P(A)+P(B)-P(C)\leqslant P(A\cup B)\leqslant 1,$$
即
$$P(A)+P(B)-P(C)\leqslant 1.$$

例 4　设 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=\dfrac{1}{8},P(BC)=P(AC)=0$,求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解:由一般加法公式,有

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$,

又 $ABC\subset BC$,所以 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(BC)=0$,于是 $P(ABC)=0$,从而有

$$P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

例 5　设 A,B,C 为任意三个事件,证明 $P(AB)+P(AC)-P(BC)\leqslant P(A)$.

证明:因为 $A\supset A\cap(B\cup C)$,所以

$$P(A)\geqslant P(A\cap(B\cup C))=P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC),$$

又 $P(ABC)\leqslant P(BC)$,

故
$$P(AB)+P(AC)-P(BC)\leqslant P(A).$$

习题 1.2

1. 设 $P(A)=0.4,P(A\cup B)=0.7$,且 A 与 B 互不相容,求 $P(B)$.

2. 设 $P(A)=\dfrac{1}{3},P(B)=\dfrac{1}{2}$,当(1)$A$ 与 B 互不相容,(2)$A\subset B$,(3)$P(AB)=\dfrac{1}{6}$时,求 $P(B\overline{A})$.

3. $P(A)=\dfrac{1}{3},P(B)=\dfrac{1}{4},P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$,求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

4. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=P(BC)=0,P(AC)=\dfrac{1}{8}$,求:

(1)事件 A,B,C 全不发生的概率;

(2)事件 A,B,C 至少有一个发生的概率.

5. 设事件 A 与 B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$,且 $P(A)=p$,求 $P(B)$.

6. 设 $P(A)=0.5, P(B)=0.4, P(A-B)=0.3$，求 $P(A\cup B)$ 和 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

7. 设 A, B 是两个事件，且 $P(A)=0.6, P(B)=0.7$，求：

(1)在什么条件下 $P(AB)$ 取得最大值？最大值是多少？

(2)在什么条件下 $P(AB)$ 取得最小值？最小值是多少？

8. 设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，试证 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.

---

9. 对任意事件 A, B, C，证明：

(1) $P(AB)+P(AC)-P(BC)\leqslant P(A)$；

(2) $P(AB)+P(AC)+P(BC)\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-1$.

10. (1)已知 A_1 与 A_2 同时发生则 A 发生，证明 $P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$；

(2)若 $A_1, A_2, A_3\subset A$，证明 $P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2$.

1.3 古典概型与几何概型

1.3.1 古典概型

先讨论一类最简单的随机试验，它具有下述特征：

(1)样本空间的元素(基本事件)只有有限个，不妨设为 n 个，记为 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$；

(2)每个基本事件出现的可能性是相等的，即有 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$.

称这种数学模型为古典概型.

古典概型在概率论中具有非常重要的地位，一方面它比较简单，既直观又容易理解；另一方面它概括了许多实际内容，有很广泛的应用.

对上述古典概型，它的样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，事件域$\mathcal{F}$为 Ω 的所有子集的全体，这时连同 $\Omega, \varnothing$ 在内，$\mathcal{F}$中含有 2^n 个事件，并且从概率的有限可加性知 $1=P(\Omega)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_n)$，

于是 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}$.

$\forall A\in\mathcal{F}$，若 A 是 k 个基本事件之和，即 $A=\omega_{i_1}\cup\omega_{i_2}\cup\cdots\cup\omega_{i_k}$，则

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{A\text{ 包含的有利场合数}}{\text{基本事件总数}}.$$

所以在古典概型中，事件 A 的概率是一个分数，其分母是样本点(基本事件)总数 n，而分子是事件 A 包含的基本事件数 k.

例如，将 1 枚硬币连续掷两次就是这样的试验，也是古典概型，它有四个基本事件：(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反). 每个基本事件出现的可能结果都是$\frac{1}{4}$.

但将 2 枚硬币一起掷，这时试验的可能结果为(正，反)，(反，反)，(正，正)，但它们出现的可能性却是不相同的，(正，反)出现的可能性为$\frac{1}{2}$，而其他的两个事件的可能性为$\frac{1}{4}$. 它不是古典概型，对此历史上曾经有过争论，达朗贝尔曾误认为这三种结果的出现是

等可能的.

判别一个概率模型是否为古典概型,关键是看"等可能性"条件是否满足. 对此,通常根据实际问题的某种对称性进行理论分析,而不是通过试验来判断.

由古典概型的计算公式可知,在古典概型中,若 $P(A)=1$,则 $A=\Omega$;若 $P(A)=0$,则 $A=\varnothing$.

不难验证,古典概型具有非负性、规范性和有限可加性.

利用古典概型的公式计算事件的概率,关键是要求基本事件总数 n 和 A 的有利事件数 k,而求 n 和 k 则需要利用排列和组合的有关知识,且有一定的技巧性. 计算中经常要用到两条基本原理——乘法原理和加法原理及排列、组合等公式,现简介如下:

乘法原理:完成一件工作分 m 个步骤,第一步骤有 n_1 种方法,第二步骤有 n_2 种方法,……,第 m 步骤有 n_m 种方法,那么完成这件工作共有 $n_1n_2\cdots n_m$ 种方法.

加法原理:完成一件工作有 m 个独立的途径,第一个途径有 n_1 种方法,第二个途径有 n_2 种方法,……,第 m 个途径有 n_m 种方法,那么完成这件工作共有$(n_1+n_2+\cdots+n_m)$种方法.

以上述两个原理为基础,可以推导出如下的排列、组合等公式.

1. 排列

从 n 个元素中取出 r 个元素来排列,既要考虑每次取到哪个元素,又要考虑取出的顺序,根据取法分为两类:

(1)有放回选取,这时每次选取都是在全体元素中进行,同一元素可被重复选中,这种排列称为有重复排列,总数为 n^r 种.

(2)不放回选取,这时一元素一旦被选出便立刻从总体中除去,这种排列称为选排列,总数为 $\mathrm{A}_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$. 特别地,$\mathrm{A}_n^n=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$,称为 n 个元素的全排列.

2. 组合

(1)从 n 个元素中取出 r 个元素的组合是不考虑元素的顺序的,其组合总数为

$$\mathrm{C}_n^r=\frac{\mathrm{A}_n^r}{\mathrm{A}_r^r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

(2)把 n 个不同的元素分为 k 个部分,第一部分有 r_1 个,第二部分有 r_2 个,……,第 k 部分有 r_k 个,即 $r_1+r_2+\cdots+r_k=n$,则不同的分法有$\dfrac{n!}{r_1!\,r_2!\,\cdots r_k!}$种,此称为多项系数,因为它是$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ 展开式中 $x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}$ 的系数. 当 $k=2$ 时,即为组合数 C_n^r.

(3)若 n 个元素中有 n_1 个带足标"1",n_2 个带足标"2",……,n_k 个带足标"k",且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$,从这 n 个元素中取出 r 个,使得带足标"i"的元素有 $r_i(r_i\leqslant n_i,1\leqslant i\leqslant k)$个,而 $r_1+r_2+\cdots+r_k=r$,这时不同取法的总数为 $\mathrm{C}_{n_1}^{r_1}\mathrm{C}_{n_2}^{r_2}\cdots\mathrm{C}_{n_k}^{r_k}$.

3. 常用等式

由$(1+1)^n=\sum\limits_{r=0}^{n}\mathrm{C}_n^r1^r1^{n-r}$,得 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$.

古典概型问题大致可分为三类.

(1)摸球问题

例 1 在盒子中有 5 个球(3 个白球、2 个黑球),从中任取 2 个. 分别求取出的 2 个球都是白球的概率及 1 白和 1 黑的概率.

分析:从 5 个球中任取 2 个,共有 C_5^2 种不同取法,可以将每一种取法作为一个样本点,则样本点总数 C_5^2 是有限的. 由于摸球是随机的,因此各样本点出现的可能性是相等的,因此这个问题是古典概型.

解:设 A={取到的 2 个球都是白球},B={取到的 2 个球是 1 白和 1 黑},基本事件总数为 C_5^2.

A 包含的基本事件数为 C_3^2,$P(A)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$;

B 包含的基本事件数为 $C_3^1C_2^1$,$P(B)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{5}$.

由此例我们初步体会到解决古典概型问题的两个要点:

①首先要判断问题是否属于古典概型问题,即要判断样本空间是否有限和基本事件是否等可能;

②计算古典概型的关键是"计数",这主要利用排列和组合的知识.

在研究古典概型问题时常利用摸球模型,因为古典概型中的大部分问题都能形象地用摸球模型来描述. 若把黑球作为废品,白球看为正品,则这个模型就可以描述产品的抽样检查问题. 假如产品分为更多等级,例如一等品、二等品、三等品,等外品等,则可以用有多种颜色的摸球模型来描述.

例 2 在盒子中有 10 个相同的球,分别标上号码 1,2,…,9,10,从中任摸 1 球,求此球的号码为偶数的概率.

解一:令 i={所取球的号码为 i},$i=1,2,\cdots,10$,则 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$,故基本事件总数 $n=10$.

设 A={所取球的号码为偶数},因而 A 含有 5 个基本事件,

所以
$$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

解二:令 A={所取球的号码为偶数},则 $\overline{A}$={所取球的号码为奇数},因而 $\Omega=\{A,\overline{A}\}$,

故 $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

此例说明了在古典概型问题中,选取适当的样本空间,可使我们的解题过程变得简捷.

例 3 一套 5 册的选集,随机地放到书架上,求各册书自左至右或自右至左恰好为 1,2,3,4,5 的顺序的概率.

解:将 5 本书看成 5 个球,这就是一个摸球模型,基本事件总数为 5!.

令 A={各册自左至右或自右至左恰好成 1,2,3,4,5 的顺序},A 包含的基本事件数为 2,

所以
$$P(A)=\frac{2}{5!}=\frac{1}{60}.$$

例 4　从不含大、小王的 52 张扑克牌中取出 13 张牌来，求有 5 张黑桃、3 张红心、3 张方块、2 张草花的概率是多少.

解：基本事件数为 C_{52}^{13}，令 A 表示 13 张牌中有 5 张黑桃、3 张红心、3 张方块、2 张草花，A 包含的基本事件数为 $C_{13}^{5}C_{13}^{3}C_{13}^{3}C_{13}^{2}$，

所以
$$P(A)=\frac{C_{13}^{5}C_{13}^{3}C_{13}^{3}C_{13}^{2}}{C_{52}^{13}}\approx 0.012\ 93.$$

(2)分房问题

例 5　设有 n 个人，每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的任意 1 间去住($n\leqslant N$)，求下列事件的概率：

①$A=\{$指定的 n 个房间各有 1 人住$\}$；

②$B=\{$恰好有 n 个房间各有 1 人住$\}$.

解：因为每一个人有 N 个房间可供选择(没有限制每间房住多少人)，所以 n 个人住的方式共有 N^n 种，它们是等可能的.

①n 个人分到指定的 n 间房中去住，保证每间房中有 1 人住；第 1 人有 n 种分法，第 2 人有($n-1$)种分法，……，最后 1 人只能分到剩下的 1 间房中去住，共有 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ 种分法，即 A 含有 $n!$ 个基本事件.

所以
$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

②n 个人分到 n 间房中，保证每间只有 1 人，共有 $n!$ 种分法，而 n 间房未指定，故可以从 N 间房中任意选取，共有 C_N^n 种取法.

所以
$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}.$$

注意：分房问题中的人与房子一般都是有个性的，这类问题是将人一个个地往房间里分配. 处理实际问题时要分清什么是“人”，什么是“房子”，一般不可颠倒. 常遇到的分房问题有：n 个人相同生日问题，n 封信装入 n 个信封问题(配对问题)，掷骰子问题等. 分房问题也称为球在盒子中的分布问题.

从上述几个例子可以看出，求解古典概型问题的关键是在寻找基本事件总数和有利事件数. 有时正面求较困难时，可以转化求它的对立面，要讲究一些技巧.

例 6　某班级有 $n(n<365)$个人，问：至少有 2 个人的生日在同一天的概率是多大？

解：假定一年按 365 天计算，将 365 天看成 365 个“房间”，那么问题就归结为分房问题.

令 $A=\{$至少有 2 个人的生日在同一天$\}$，则 A 的情况比较复杂(2 人，3 人，……生日在同一天)，但 A 的对立事件 $\overline{A}=\{n$ 个人的生日全不相同$\}$则较简单，这就相当于分房问题中的②“恰有 n 个房间，其中各住 1 人”.

$$P(\overline{A})=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}\ (N=365).$$

因为
$$P(A)+P(\overline{A})=1,$$

所以
$$P(A)=1-\frac{N!}{N^n(N-n)!}(N=365).$$

这个例子就是历史上有名的“生日问题”. 对于不同的一些 n 值,计算得相应的 $P(A)$ 如表 1-3：

表 1-3

n	10	20	23	30	40	50
$P(A)$	0.12	0.41	0.51	0.71	0.89	0.97

上表所列出的答案让大家感到惊讶,因为“一个班级中至少有 2 个人生日相同”这个事件发生的概率并不如大多数人想象得那样小,而是足够大. 从表中可以看出,当班级人数达到 23 时,就有一半以上的概率会发生这件事情,而当班级人数达到 50 时,竟有 97% 的概率会发生上述事件,当然这里所讲的半数以上,有 97%都是对概率而言的,只是在大数次的情况下(就要求班级人数相当多),才可以理解为频率.

这个例子告诉我们“直觉”并不可靠,从而更有力地说明了研究随机现象统计规律的重要性.

例 7 在电话号码簿中,某人任取 1 个号码(电话号码由 7 个数字组成),求取到的号码是由完全不同的数字组成的概率.

解:此时将 0～9 这 10 个数字看成“房子”,电话号码看成“人”,这就可以归结为“分房问题②”.

令 A={取到的号码由完全不同的数字组成},

则
$$P(A)=\frac{\mathrm{A}_{10}^{7}}{10^7}.$$

当然这个问题也可以看成摸球问题,将这 10 个数字看成 10 个球的编号,从中有放回地取 7 次,要求 7 次取得的数字都不相同.

(3)随机取数问题

例 8 从 1,2,3,4,5 这 5 个数中等可能地、有放回地连续抽取 3 个数字,试求下列事件的概率：

A={3 个数字完全不相同}；

B={3 个数字中不含 1 和 5}；

C={3 个数字中 5 恰好出现了 2 次}；

D={3 个数字中至少有 1 次出现 5}.

解:基本事件数为 5^3.

A 的有利事件数为 A_5^3,故 $P(A)=\dfrac{\mathrm{A}_5^3}{5^3}=0.48$；

B 的有利事件数为 3^3(3 个数只能出现 2,3,4),故 $P(B)=\dfrac{3^3}{5^3}=0.216$；

3 个数字中 5 恰好出现 2 次,可以是 3 次中的任意 2 次,出现的方式为 C_3^2 种,剩下的 1 个数只能从 1,2,3,4 中任意选 1 个数字,有 A_4^1 种选法,故 C 的有利事件数为 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{A}_4^1$,所以 $P(C)=\dfrac{\mathrm{C}_3^2\mathrm{A}_4^1}{5^3}=\dfrac{12}{125}=0.096$；

事件 D 包含了 5 出现 1 次,5 出现 2 次,5 出现 3 次三种情况,故 D 的有利事件数为

$$C_3^1 \cdot 1 \cdot (A_4^1)^2 + C_3^2 \cdot 1^2 \cdot A_4^1 + C_3^3 \cdot 1^3,$$

故
$$P(D)=\frac{C_3^1 \cdot 1 \cdot (A_4^1)^2 + C_3^2 \cdot 1^2 \cdot A_4^1 + C_3^3 \cdot 1^3}{5^3}=0.488,$$

或可以转化为求 D 的对立事件$\overline{D}$的概率

$$\overline{D}=\{3\text{ 个数字中 }5\text{ 一次也不出现}\},$$

说明 3 次抽取都是在 1,2,3,4 中任取 1 个数字,故含有 4^3 个基本事件,

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-\frac{4^3}{5^4}=0.488.$$

例 9　在 0,1,2,…,9 这 10 个数字中无重复地任取 4 个数字,试求取得的 4 个数字能组成 4 位偶数的概率.

解:设 $A=\{$取得的 4 个数字能组成 4 位偶数$\}$,

从 10 个数中任取 4 个数字进行排列,共有 A_{10}^4 种排列方式,所以共有 A_{10}^4 个基本事件.

下面考虑 A 包含的基本事件数,分两种情况考虑,一种是 0 排在个位上,有 A_9^3 种选法;另一种是 0 不排在个位上,有 $A_4^1A_8^1A_8^2$ 种. 所以 A 包含的基本事件数为 $A_9^3+A_4^1A_8^1A_8^2$,故

$$P(A)=\frac{A_9^3+A_4^1A_8^1A_8^2}{A_{10}^4}=\frac{41}{90}\approx 0.4556.$$

或先从 0,2,4,6,8 这 5 个偶数中任选 1 个排在个位上,有 A_5^1 种排法,然后从剩下的 9 个数字中任取 3 个排在剩下的 3 个位置上,有 A_9^3 种排法,故个位上是偶数的排法共有 $A_5^1A_9^3$ 种,但在这种 4 个数字的排列中包含了“0”排在首位的情形,故应减去这种情况的排列数。

故 A 的有利场合数为 $A_5^1A_9^3-A_4^1A_1^1A_8^2$,同样可求出事件 A 的概率.

例 10　任取 1 个正整数,求该数的平方数的末位数字是 1 的概率.

分析:不能将正整数的全体取为样本空间,否则样本空间是无限的.

解:因为 1 个正整数的平方的末位数只取决于该正整数的末位数,这些正整数的末位数可以是 0,1,2,…,9 这 10 个数字中的任 1 个. 任取 1 个正整数的含义,就是这 10 个数字是等可能出现的,换句话说,可以取样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,9\}$.

记 $A=\{$该数的平方的末位数字是 1$\}$,那么 A 包含的基本事件数为 2,即 $A=\{1,9\}$,

故
$$P(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

下面我们看一个稍微复杂的例子.

例 11　某人一次写了每封一张信纸的 n 封信,又写了 n 个信封,如果他任意将 n 张信纸装入 n 个信封中,问:至少有一封信的信纸和信封是一致的概率是多少?

解:令 $A_i=\{$第 i 张信纸恰好装进第 i 个信封$\}$,$i=1,2,\cdots,n$,则

$$P(A_i)=\frac{1}{n},1\leqslant i\leqslant n,\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1,$$

$$P(A_iA_j)=\frac{1}{n(n-1)},1\leqslant i<j\leqslant n,\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)=\mathrm{C}_n^2\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2!}.$$

同理,得
$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)=\mathrm{C}_n^3\frac{1}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{3!},$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\mathrm{C}_n^n\frac{1}{n!}=\frac{1}{n!}.$$

由概率的一般加法公式有

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\\&=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

当 n 充分大时,它近似为 $1-\mathrm{e}^{-1}$.

这个例子就是历史上有名的"匹配问题"或"配对问题".

1.3.2 几何概型

一个随机试验,如果它的数学模型是古典概型,那么描述这个试验的样本空间 Ω、事件域$\mathcal{F}$和概率 P 已在前面得到解决. 在古典概型中,试验的结果是有限的,受到了很大的限制. 在实际问题中,经常遇到试验结果是无限的情形. 例如,若我们在一个面积为 S_Ω 的区域Ω 中,等可能地任意投点,这里等可能的确切意义是这样的:在区域 Ω 中有任意一个小区域A,若它的面积为 S_A,则点落在 A 中的可能性大小与 S_A 成正比,而与 A 的位置及形状无关. 如果点落在区域 A 这个随机事件记为 A,则由 $P(\Omega)=1$ 可得,$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}$. 这一类概率称为几何概率.

若一个试验具有下列两个特征:

(1)每次试验的结果是无限多个,且全体结果可用一个有度量的几何区域来表示;

(2)每次试验的各种结果的发生是等可能的.

则称这种随机试验所表示的数学模型为几何概型.

例如,我们在一个面积为 S_Ω 的区域Ω 中,等可能地任意投点,这就是一个几何概型.

如果在一条线段上等可能投点,那么只需要将面积改为长度;如果在一个立体区域内等可能投点,则只需将面积改为体积.

设几何概型的样本空间可表示成有度量的区域,仍记为 Ω,事件 A 所对应的区域仍以A 表示($A\subset\Omega$),则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}}.$$

这个定义称为概率的几何定义,由上式所确定的概率称为几何概率.

例 12 (会面问题)甲、乙两人约定在 6 时—7 时之间在某处会面,并约定先到者应等候另一人一刻钟,过时即可离去,求两人能会面的概率.

解:设甲、乙到达的时刻分别为 6 时 x 分和 6 时 y 分,则 $0\leqslant x\leqslant 60,0\leqslant y\leqslant 60$.

两人能会面的充要条件是

$$|x-y|\leqslant 15.$$

在平面上建立直角坐标系（图 1－6），则 (x,y) 的所有可能结果是边长为 60 的正方形，而可能会面的时间由图中阴影部分表示. 这是一个几何概率问题，所以

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

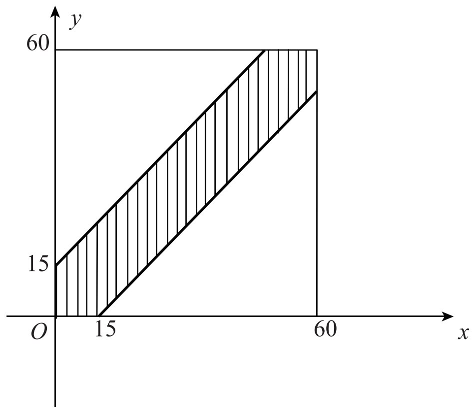


图 1－6

例 13　［蒲丰(Buffon)投针问题］平面上画有等距离的平行线，平行线间的距离为 $a(a>0)$，向平面任意投掷一根长为 $l\ (l<a)$ 的针，试求针与平行线相交的概率.

解：如图 1－7，假设 x 表示针的中点与最近一条平行线的距离，φ 表示针与此直线间的交角，则 $0\leqslant x\leqslant \frac{a}{2}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

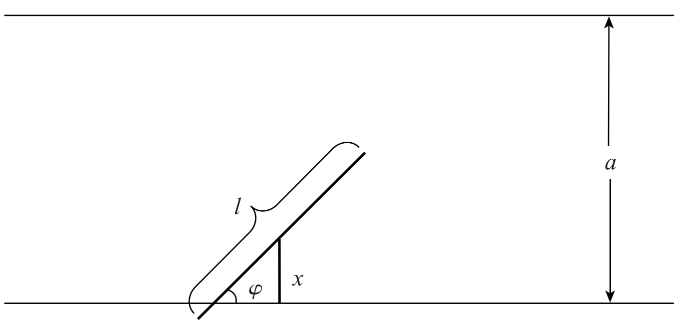


图 1－7

由这两式可以确定 x,φ 平面上的一个矩形 Ω，

$$\Omega=\left\{(\varphi,x)\ \middle|\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\right\}.$$

这时，针与平行线相交的条件为 $x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi$，这个不等式表示的区域 A 是图1－8中的阴影部分，

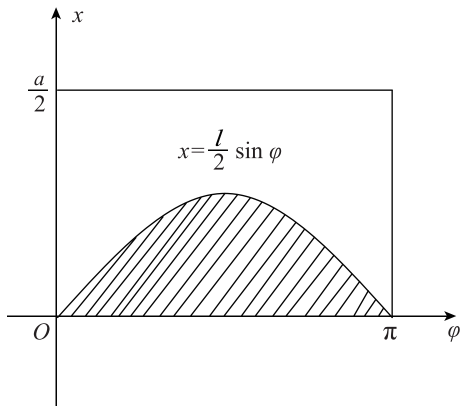


图 1-8

$$A=\left\{(\varphi,x)\,\middle|\,x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi\right\},$$

由等可能性可知，$P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\pi\frac{a}{2}}=\dfrac{2l}{\pi a}.$

若 l,a 为已知，则以 π 值代入上式，即可计算出 $P(A)$的值. 反过来，若已知 $P(A)$的值，也可以用上式去求 π. 而关于 $P(A)$的值，可以用频率来近似得到它. 如果投针 N 次，其中针与平行线相交 n 次，则频率为$\dfrac{n}{N}$，于是 $\pi\approx\dfrac{2lN}{na}$.

这是一个颇为奇妙的方法，只要设计一个随机试验，使一个事件的概率与某一未知数有关，然后通过重复试验，以频率近似概率即可以求未知数的近似数. 当然，试验次数要相当多. 随着计算机的发展，人们用计算机来模拟所设计的随机试验，使得这种方法得以广泛应用. 将这种计算方法称为随机模拟法，也称为蒙特—卡洛法.

几何概率的意义及计算是与几何图形的面积、长度和体积(测度)密切相关的，因此所考虑的事件应是某种可定义测度的集合，这类集合的并、交，也应该是事件，甚至对它们的可列次并、交也应该有这个要求. 例如，在[0,1]中投一点的随机试验，若记 A 为该点落入$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$中这个事件，而以 A_n 记该点落在$\left[\dfrac{1}{2^{n+1}},\dfrac{1}{2^n}\right]$中这一事件，$n=1,2,\cdots$，则

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

如果所投点落入某区间的概率等于该区间的长度，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

这里涉及事件及概率的可列运算.

综上所述，几何概率应具有如下性质：

(1)对任何事件 A，$P(A)\geqslant0$；

(2)$P(\Omega)=1$；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

前两个性质与古典概型相同，而有限可加性则可推广到可列个事件成立，这个性质称为可列可加性.

例 14　甲、乙二人相约在 12 时—13 时之间见面，两人可以在这 1 小时内的任何时刻到达，则事件 A＝“甲、乙在同一时刻到达”的概率是多大？

解：设甲、乙到达的时刻分别为 x 和 y，由几何概型知样本空间

$$\Omega=\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60\}.$$

事件 A 可表述为 $A=\{(x,y) \mid x=y\}$. 由几何概率中概率求法知样本空间的度量 $|\Omega|=60^2$，事件 A 的度量为 $|A|=0$，所以 $P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}=0$.

很明显，事件 A 是可能发生的，即甲、乙有可能同时到达，事件 A 并不是一个不可能事件.

此例表明，若 $P(A)=0$，事件 A 不一定是不可能事件.

习题 1.3

1. 一个袋子中装有 10 个大小相同的球，其中 3 个黑球，7 个白球，求：

(1)从袋子中任取 1 球，这个球是黑球的概率；

(2)从袋子中任取 2 球，恰好为 1 个白球、1 个黑球的概率以及 2 个球全为黑球的概率.

2. 抛掷 2 枚硬币，求至少出现 1 个正面的概率.

3. 掷 2 颗骰子，求下列事件的概率：

(1)点数之和为 7；

(2)点数之和不超过 5；

(3)2 个点数中 1 个恰好是另 1 个的 2 倍.

4. 从一副不包括大、小王的 52 张扑克牌中任取 4 张，求下列事件的概率：

(1)全是黑桃；

(2)同花；

(3)没有 2 张同一花色；

(4)同色.

5. 将 3 个球随机放入 4 个杯子中，则杯子中球的个数最多为 1，2，3 的概率各是多少？

6. 口袋中有 10 个球，分别标有号码 1～10，现从中不放回地任取 3 个，记下取出球的号码，试求：

(1)最小号码为 5 的概率；

(2)最大号码为 5 的概率.

7. 在 1～2 000 的整数中随机地取 1 个数，则取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8

整除的概率是多少？

8. 从数字 1，2，…，9 中可重复地任取几次，试求所取得的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率.

9. 任取 1 个整数，求下列事件的概率：

(1)该数的平方的末位数字是 1；

(2)该数的 4 次方的末位数字是 1；

(3)该数的立方的最后两位数字都是 1.

10. 0，1，2，…，9 这 10 个数字中任意读 1 个数字，假设每个数字被读到的概率相同，先后读了 7 个数，试求下列事件的概率：

(1)A_1＝“指定的 1 个 7 位数”；

(2)A_2＝“7 个数字全不相同”；

(3)A_3＝“不含 1 和 9”；

(4)A_4＝“9 恰好出现 2 次”.

11. 10 个人中有一对是夫妇，他们随意坐在一张圆桌周围，求该夫妇正好坐在一起的概率.

12. 从 5 双不同的鞋中任取 4 只，这 4 只鞋子中至少有 2 只能配成 1 双的概率是多少？

13. 任取 2 个真分数，求它们的乘积不大于$\dfrac{1}{4}$的概率.

14. 在区间(0，1)中随机地取 2 个数，求事件“2 个数之和小于$\dfrac{6}{5}$”的概率.

15. 甲、乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的. 如果甲船的停泊时间为 1 小时，乙船的停泊时间为 2 小时，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少.

16. 在半径为 R 的圆内画平行弦，如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的，即交点在直径上的一个区间内的可能性与该区间的长度成比例，求任意画弦的长度大于 R 的概率.

---

17. 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B，C 分别是将 1 枚骰子接连掷 2 次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

18. 将 n 个完全相同的球随机放入 N 个盒子中，试求：

(1)指定的某个盒子中恰有 k 个球的概率；

(2)恰好有 m 个空盒的概率；

(3)指定的 m 个盒子中恰好有 j 个球的概率.

19. 设有一列火车共有 n 节车厢，某站有 $k(k\geqslant n)$ 个旅客上这列火车，并随机选择车厢，求每一节车厢至少有一个旅客的概率.

20. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$(a 为正常数)内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于$\dfrac{\pi}{4}$的概率.

1.4 条件概率的计算公式

1.4.1 条件概率

前面讨论了事件和概率这两个概念. 对于给定的一个随机试验,要求出一个指定的随机事件 $A\in\mathcal{F}$的概率 $P(A)$,需要花很大的力气. 现将讨论继续深入,设两个事件 $A,B\in\mathcal{F}$,则有加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

特别地,当 A,B 为互不相容的两个事件时,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,此时由 $P(A)$及 $P(B)$即可求得 $P(A\cup B)$. 但在一般情形下,为求得 $P(A\cup B)$,还应该知道 $P(AB)$. 因而很自然想到,能不能通过 $P(A)$,$P(B)$求得 $P(AB)$. 先看一个简单的例子.

例 1 考虑有 2 个孩子的家庭,假定男、女出生率一样,则 2 个孩子(依大小排列)的性别分别为(男,男),(男,女),(女,男),(女,女)的可能性是一样的.

若记 $A=\{$随机抽取一个这样的家庭有一男一女$\}$,则 $P(A)=\dfrac{1}{2}$. 但如果事先知道这个家庭至少有一个女孩,则上述事件的概率为$\dfrac{2}{3}$.

这两种情况下算出的概率不同,这也很容易理解,因为在第二种情况下,我们多知道了一个条件. 记 $B=\{$随机抽取一个这样的家庭至少有一个女孩$\}$,因此我们算出的概率是“在已知事件 B 发生的条件下,事件 A 发生”的概率,这个概率称为条件概率,记为 $P(A|B)$.

$$P(A|B)=\frac{2}{3}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

这虽然是一个特殊的例子,但是容易验证对一般的古典概型,只要 $P(B)>0$,上述等式总是成立的. 同样,对几何概率上述关系式也成立.

1. 条件概率的定义

定义 若$(\Omega,\mathcal{F},P)$是一个概率空间,$B\in\mathcal{F}$,且 $P(B)>0$,对任意 $A\in\mathcal{F}$,称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$为在已知事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

2. 性质

不难验证条件概率 $P(\cdot|B)$具有概率的三个基本性质:

(1)非负性:$\forall A\in\mathcal{F}$,$P(A|B)\geqslant 0$.

(2)规范性:$P(\Omega|B)=1$.

(3)可列可加性:$\forall A_i\in\mathcal{F}(i=1,2,\cdots)$,且 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$互不相容,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \mid B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i \mid B).$$

由此可知,对给定的一个概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$和事件 $B\in\mathcal{F}$,如果 $P(B)>0$,则条件概率 $P(\cdot|B)$也是$(\Omega,\mathcal{F})$上的一个概率测度. 特别地,当 $B=\Omega$ 时,$P(\cdot|B)$就是原来的概率测度 $P(\cdot)$,所以不妨将原来的概率看成条件概率的极端情形. 还可以验证:

(4)$P(\varnothing|B)=0$.

(5)$P(A|B)=1-P(\overline{A}|B)$.

(6)$P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$.

1.4.2 乘法公式

由条件概率的定义可知,当 $P(A)>0$ 时,$P(AB)=P(A)P(B|A)$.

同理,当 $P(B)>0$ 时,$P(AB)=P(B)P(A|B)$.

这两个公式称为乘法公式.

乘法公式可以推广到 n 个事件的情形,当 $P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时,

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

例 2 甲、乙两市都位于长江下游,据一百多年来的气象记录,在一年中的雨天的比例,甲市占 20%,乙市占 18%,两地同时下雨占 12%. 记 $A=\{$甲市出现雨天$\}$,$B=\{$乙市出现雨天$\}$. 求:

(1)两市至少有一市是雨天的概率;

(2)乙市出现雨天的条件下,甲市也出现雨天的概率;

(3)甲市出现雨天的条件下,乙市也出现雨天的概率.

解:(1)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.20+0.18-0.12=0.26$;

(2)$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.12}{0.18}\approx 0.67$;

(3)$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.12}{0.20}=0.60$.

此例表明,甲、乙两市出现雨天是有联系的.

例 3 (抽签问题)有一张电影票,7 个人抓阄决定谁得到它,则第 i 个人抓到票的概率是多少?

解:设 $A_i=\{$第 i 个人抓到电影票$\}(i=1,2,\cdots,7)$,

显然 $P(A_1)=\dfrac{1}{7}$,$P(\overline{A}_1)=\dfrac{6}{7}$.

如果第 2 个人抓到票的话,必须是第 1 个人没有抓到票. 这就是说 $A_2\subset\overline{A}_1$,所以 $A_2=A_2\overline{A}_1$,于是可以利用概率的乘法公式. 因为在第 1 个人没有抓到票的情况下,第 2 个人有希望在剩下的 6 个阄中抓到电影票,所以

$$P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{1}{6},$$

$$P(A_2)=P(A_2\overline{A}_1)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{7},$$

类似可得,$P(A_3)=P(A_3\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\dfrac{6}{7}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{7}$,

……

$$P(A_7)=\frac{1}{7}.$$

注意:抽签问题或抓阄问题机会均等,不必争先恐后.

1.4.3　全概率公式

先看一个具体例子.

例 4　外形相同的球分别装在 2 个袋子里，设甲袋中有 6 个白球、4 个红球，乙袋中有 3 个白球、6 个红球，现在先从每袋中各任取 1 个球，再从取出的 2 个球中任取 1 个球，求此球是白球的概率.

解：令 $B=\{$最后取出的球是白球$\}$，显然 B 是否发生与取出的 2 个球中有 0 个或 1 个或 2 个白球有关，因此，如果令 $A_i=\{$先取出的 2 个球有 i 个白球$\}$，$i=0,1,2$，
则 $B=BA_0\cup BA_1\cup BA_2$，由概率的有限可加性有

$$P(B)=P(BA_0)+P(BA_1)+P(BA_2),$$

再由乘法公式有

$$P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{7}{15}.$$

上例中采用的方法是概率论中颇为有用的方法. 为了求比较复杂事件的概率，往往可以先把它分解为两个（或若干个）互不相容的、较简单事件的并，待求出这些较简单事件的概率，再利用加法公式，即得所要求的复杂事件的概率，将这种方法一般化便得到下述定理：

定理 1　设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一列互不相容的事件，且有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$（称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个剖分），则对任何事件 A，有 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$.

证明：因为 $A=A\Omega=A(\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(AB_i)$，且 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一列互不相容的事件，所以 $AB_1,AB_2,\cdots,AB_n$ 是互不相容的，所以由有限可加性可得

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{n}AB_i)=\sum_{i=1}^{n}(AB_i),$$

再由乘法公式 $P(AB_i)=P(B_i)P(A|B_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

对于全概率公式，要注意以下三点：

(1)全概率公式的最简单形式为：如果 $0<P(B)<1$，则

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B}).$$

(2)全概率公式可以推广到可列个事件的情形，即

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$是一列互不相容的事件，且有 $P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i=\Omega$，则对任何事件 A，有 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B_i)P(A\mid B_i)$.

(3)条件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个剖分，可改写为 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互不相容，且 $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$，全概率公式仍然成立.

例 5 某工厂有四条生产线生产同一种产品，四条生产线的产量分别占总产量的15%，20%，30%，35%，而这四条生产线的不合格品率分别为 5%，4%，3%，2%. 现在从出厂的产品中任取一件，恰好抽到不合格品的概率为多少？

解：设B_i＝{从出厂的产品中任取一件是第 i 条生产线生产的}，$i=1,2,3,4$，

A＝{从出厂的产品中任取一件，恰好为不合格品}.

由题意有 $P(B_1)=15\%$，$P(B_2)=20\%$，$P(B_3)=30\%$，$P(B_4)=35\%$，

$P(A|B_1)=5\%$，$P(A|B_2)=4\%$，$P(A|B_3)=3\%$，$P(A|B_4)=2\%$.

由全概率公式有
$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A\mid B_i)\\&=15\%\times5\%+20\%\times4\%+30\%\times3\%+35\%\times2\%\\&=0.031\,5.\end{aligned}$$

注意：一般地，能用全概率公式解决的问题都有以下特点：

(1)该随机试验可以分为两步，第一步试验有若干个可能结果，在第一步试验结果的基础上，再进行第二步试验，又有若干个结果；

(2)如果要求与第二步试验结果有关的概率，则用全概率公式.

例 6 某保险公司认为，人可以分为两类，第一类是容易出事故的，另一类是比较谨慎的. 保险公司的统计数字表明，一个容易出事故的人在一年内出一次事故的概率为0.04，而对于比较谨慎的人这个概率为 0.02. 如果第一类人占总人数的 30%，那么一客户在购买保险单后一年内出一次事故的概率为多少？已知一客户在购买保险单后一年内出了一次事故，那么他属于哪一类型的人？

解：设A＝{客户购买保险单后一年内出一次事故}，B＝{他属于容易出事故的人}，由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})\\&=0.3\times0.04+(1-0.3)\times0.02=0.026.\end{aligned}$$

由条件概率公式有 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{6}{13}$，

同理可得 $P(\overline{B}|A)=\dfrac{7}{13}$.

他属于比较谨慎的人可能性较大.

1.4.4 贝叶斯公式

在上面的计算中，事实上已经建立了一个极为有用的公式：

定理 2 若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一列互不相容的事件，且$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，$P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任一事件 A，$P(A)>0$，有 $P(B_i\mid A)=\dfrac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}$.

这个公式通常称为贝叶斯公式或逆概率公式.

证明：由条件概率定义有

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)},$$

对上式的分子用乘法公式，分母用全概率公式

$$P(AB_i)=P(A|B_i)P(B_i),$$

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j),$$

即得

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}.$$

贝叶斯公式在概率论与数理统计中有着多方面的应用. 假定 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是导致试验结果的“原因”，$P(B_i)$称为先验概率，它反映了各种“原因”发生的可能性的大小. 一般是以往经验的总结，在这次试验前已经知道，现在若试验产生了事件 A，这个信息将有助于探讨事件发生的“原因”. 条件概率 $P(A|B_i)$称为后验概率，它反映了试验之后对各种“原因”发生的可能性大小的新知识. 例如，在医疗诊断中，有人为了诊断病人到底是患了 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中的哪一种病，对病人进行观察与检查，确定了某个指标(比如体温、脉搏、转氨酶含量等)，他想用这个指标来帮助诊断，这时可以用贝叶斯公式来计算有关概率. 首先确定先验概率 $P(B_i)$，实际上是确定患各种疾病的概率大小，以往的资料可以给出一些初步数据(称为发病率)；其次要确定 $P(A|B_i)$，这当然要依靠医学知识. 一般地，有经验的医生 $P(A|B_i)$掌握得比较准，从概率论的角度看，$P(B_i|A)$的概率较大，病人患 B_i 种病的可能性较大，应多加考虑. 在实际工作中，检查指标 A 一般有多个，综合所有的后验概率，会对诊断有很大的帮助. 在实现计算机自动诊断或辅助诊断中，这种方法是有实用价值的.

例 7　用甲胎蛋白法普查某地居民肝癌发病情况，令 $C=\{$被检验者患肝癌$\}$，$A=\{$甲胎蛋白法检查结果为阳性$\}$，则 $\overline{C}=\{$被检验者未患肝癌$\}$，$\overline{A}=\{$甲胎蛋白法检查结果为阴性$\}$. 由过去资料知 $P(A|C)=0.95$，$P(\overline{A}|\overline{C})=0.90$，又已知某地居民的肝癌发病率 $P(C)=0.0004$，在普查中查出一批甲胎蛋白法检查结果为阳性的人，求这批人中患有肝癌的概率 $P(C|A)$.

解：由贝叶斯公式有

$$P(C|A)=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\overline{C})P(A|\overline{C})}=\frac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+0.9996\times0.1}\approx0.0038.$$

由此例可知道，经甲胎蛋白法检查结果为阳性的人群中，真正患肝癌的人还是很少的(只占 0.38%). 可以把 $P(C|A)=0.0038$ 和已知的 $P(A|C)=0.95$ 及 $P(\overline{A}|\overline{C})=0.90$对比一下.

结论：虽然检验法相当可靠，但是被诊断为肝癌的人确实患肝癌的可能性并不大.

注意：一般地，能用贝叶斯公式解决的问题都有以下特点：

(1)该随机试验可以分为两步，第一步试验有若干个可能结果，在第一步试验结果的基础上，再进行第二步试验，又有若干个结果；

(2)如果要求与第一步试验结果有关的概率，则用贝叶斯公式.

在上面介绍的条件概率的几个公式中，乘法公式是用来求积事件的概率，全概率公

式是用来求一个复杂事件的概率,而贝叶斯公式可以用来求条件概率.

习题 1.4

1. 在一批产品中,一、二、三等品各占 60%,30%,10%,从中任意取出 1 件,结果不是三等品,求取到的是一等品的概率.

2. 设 10 件产品中有 4 件不合格,从中任取 2 件,已知所取 2 件产品中有 1 件不合格,求另 1 件也是不合格品的概率.

3. 设某种动物活到 10 岁的概率为 0.8,活到 15 岁的概率为 0.4,问:现在为 10 岁的这种动物活到 15 岁的概率是多少?

4. 设 $P(\overline{A})=0.3$,$P(B)=0.4$,$P(A\overline{B})=0.5$,求 $P(B|A\cup\overline{B})$.

5. 已知 $P(A)=\dfrac{1}{4}$,$P(B|A)=\dfrac{1}{3}$,$P(A|B)=\dfrac{1}{2}$,求 $P(A\cup B)$.

6. 设 A,B 为两个事件,$P(A)=0.7$,$P(B)=0.5$,$P(A-B)=0.3$,求 $P(B|\overline{A})$.

7. 在有 3 个小孩的家庭中,已知至少有 1 个女孩,求该家庭至少有 1 个男孩的概率(设男孩与女孩是等可能的).

8. 为了防止意外,在矿内同时装有两种报警系统Ⅰ和Ⅱ,两种报警系统单独使用时,系统Ⅰ和Ⅱ有效的概率分别为 0.92 和 0.93;在系统Ⅰ失灵的条件下,系统Ⅱ仍然有效的概率为 0.85.求:

(1)两种报警系统Ⅰ和Ⅱ都有效的概率;

(2)在系统Ⅱ失灵的条件下,系统Ⅰ有效的概率;

(3)当发生意外时,两个报警系统至少有一个有效的概率.

9. 已知 $P(A|B)=0.7$,$P(A|\overline{B})=0.3$,$P(B|A)=0.6$,求 $P(A)$.

10. 某射击小组共有 20 名射手,其中一级射手 4 人,二级射手 8 人,三级射手 7 人,四级射手 1 人,一、二、三、四级射手通过选拔进入决赛的概率分别为 0.9,0.7,0.5,0.2.求在小组内任选一名射手,该射手能通过选拔进入决赛的概率.

11. 12 个乒乓球中有 9 个是新的,3 个旧的.第一次比赛取出 3 个,用完后放回去,第二次又取出 3 个,求第二次取到的 3 个球中有 2 个新球的概率.

12. 有两箱同种类的零件,第一箱装了 50 只,其中 10 只一等品;第二箱装 30 只,其中 18 只一等品.现从两箱中任挑出一箱,然后从该箱中取零件 2 次,每次任取 1 只,作不放回抽样,求:

(1)第一次取到的是一等品的概率;

(2)在第一次取到的零件是一等品的条件下,第二次取到的也是一等品的概率.

13. 玻璃杯成箱出售,每箱 20 只,各箱次品数为 0,1,2 的概率分别为 0.8,0.1,0.1.一顾客欲买下一箱玻璃杯,售货员随机取出一箱,顾客开箱后随机取 4 只进行检查,若无次品,则购买,否则退回,求:

(1)顾客买下该箱玻璃杯的概率;

(2)在顾客买的一箱中确实没有次品的概率.

14. 发报台分别以概率 0.8 及 0.2 发出“.”及“—”,由于通信系统受到干扰,当发出信号“.”时,收报台分别以概率 0.8 及 0.2 收到“.”及“—”;当发出信号“—”时,收报台分别以概率 0.9 及 0.1 收到“—”及“.”. 求当收报台收到“.”时,发报台确实发出信号“.”的概率;当收到“—”时,发报台确实发出“—”的概率.

15. 某学生做一道有 4 个选项的单项选择题时,如果他不知道问题的正确答案,就作随机猜测. 现从试卷上看是答对了,试在以下情况下求该学生确实知道正确答案的概率.

(1)学生知道正确答案和随机猜测的概率都是$\frac{1}{2}$;

(2)学生知道正确答案的概率是 0.2.

16. 甲口袋有 a 只黑球,b 只白球;乙口袋中有 n 只黑球,m 只白球.

(1)从甲口袋中任取 1 只放入乙口袋,然后再从乙口袋任取 1 只球,试求最后从乙口袋取出的是黑球的概率;

(2)从甲口袋中任取 2 只放入乙口袋,然后再从乙口袋任取 1 只球,试求最后从乙口袋取出的是黑球的概率.

---

17. 甲、乙两选手进行乒乓球比赛,甲选手发球成功后,乙选手回球失误的概率为 0.3;若乙选手回球成功,甲选手回球失误的概率为 0.4;若甲选手回球成功,乙选手再次回球失误的概率为 0.5. 试计算这几个回合中,乙选手输掉 1 分的概率.

18. 从 1,2,3,4 中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,求$P(Y=2)$.

19. 在 n 个袋中各有 6 只白球,4 只黑球,还有一个口袋中有 5 只白球,5 只黑球,从这 $(n+1)$个袋中随机取 1 袋,再从取出的袋中取 2 只球,2 只球都是白球,在这种情况下,有 5 只黑球和 3 只白球留在袋中的概率为$\frac{1}{7}$,求 n.

20. 设 $P(A)>0$,试证 $P(B|A)\geqslant 1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)}$.

1.5　独立性与伯努利概型

1.5.1　事件的独立性

独立性是概率论中一个重要的概念,利用独立性可以简化事件概率的计算. 下面先讨论两个事件的独立性,然后再讨论多个事件的独立性.

1. 独立性的概念

(1)两个事件的独立性

先看一个具体的例子:

例 1　设袋中有 5 个球(3 新 2 旧),每次从中取 1 个,有放回地取 2 次,记 $A=\{$第一次取得新球$\}$,$B=\{$第二次取得新球$\}$,求 $P(A)$,$P(B)$,$P(A|B)$.

解:显然 $P(A)=\frac{3}{5}$,$P(B)=\frac{3}{5}$,$P(A|B)=\frac{3}{5}$.

$P(A|B)=P(B)$，由此可得 $P(AB)=P(A)P(B)$.

定义 1 设 $A,B\in\mathcal{F}$，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A,B 是相互独立的，简称为 A,B 独立.

根据定义，两个事件的独立性，实质上就是一个事件的发生，不影响另一个事件的发生. 必然事件 Ω 和不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件都是相互独立的，因为必然事件与不可能事件的发生与否，的确不受任何事件的影响，也不影响其他事件是否发生.

例 2 分别掷 2 枚均匀的硬币甲、乙，令 $A=\{$硬币甲出现正面$\}$，$B=\{$硬币乙出现正面$\}$，验证事件 A,B 是相互独立的.

证明：$\Omega=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$，$A=\{$(正，正)，(正，反)$\}$，

$B=\{$(反，正)，(正，正)$\}$，$AB=\{$(正，正)$\}$，

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B).$$

所以 A,B 是相互独立的.

在实际问题中，人们常用直觉来判断事件间的“相互独立”性. 事实上，分别掷 2 枚硬币，硬币甲出现正面与否和硬币乙出现正面与否，相互之间没有影响，因而它们是相互独立的. 当然，有时直觉并不可靠.

例 3 一个家庭中有男孩，又有女孩，假定生男孩和生女孩是等可能的，令 $A=\{$一个家庭中有男孩，又有女孩$\}$，$B=\{$一个家庭中最多有 1 个女孩$\}$. 对下述两种情形，讨论 A 和 B 的独立性.

①家庭中有 2 个小孩；

②家庭中有 3 个小孩.

解：①有 2 个小孩的家庭：

$\Omega=\{$(男，男)，(男，女)，(女，男)，(女，女)$\}$，$A=\{$(男，女)，(女，男)$\}$，

$B=\{$(男，男)，(男，女)，(女，男)$\}$，$AB=\{$(男，女)，(女，男)$\}$，

于是 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(AB)=\frac{1}{2}$.

由此可知 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，

所以 A 与 B 不独立.

②有 3 个小孩的家庭：$\Omega=\{$(男，男，男)，(男，男，女)，(男，女，男)，(女，男，男)，(男，女，女)，(女，女，男)，(女，男，女)，(女，女，女)$\}$.

由等可能性可知，这 8 个基本事件的概率都是 $\frac{1}{8}$，这时 A 包含了 6 个基本事件，B 包含了 4 个基本事件，AB 包含了 3 个基本事件.

$$P(AB)=\frac{3}{8},P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

显然 $P(AB)=P(A)P(B)$，于是 A 与 B 相互独立.

(2)多个事件的独立性

定义 2 设三个事件 A,B,C 满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A,B,C 相互独立.

由三个事件的独立性可知，若 A,B,C 相互独立，则它们两两相互独立. 反之不一定成立.

例 4　一个均匀的正四面体，其第一面染成红色，第二面染成白色，第三面染成黑色，第四面上同时染上红、黑、白三色，以 A,B,C 分别记投一次四面体，出现红、白、黑颜色的事件，则

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$
$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4},$$
$$P(ABC)=\frac{1}{4}.$$

故 A,B,C 两两相互独立.

但此时不能推出 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，也就是说由 A,B,C 两两相互独立不能推出 A,B,C 相互独立.

同样地，由 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 不能推出 A,B,C 两两相互独立.

事件的独立性可以推广到多个随机事件的情形.

定义 3　对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若对于所有可能的组合 $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$ 有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),$$
$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),$$
$$\cdots\cdots$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

从定义 3 可知，若 n 个事件相互独立，则必须满足 (2^n-n-1) 个等式. 显然 n 个事件相互独立，则它们中的任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件也相互独立.

2. 事件独立性的性质

定理 1　四对事件 $\{A,B\},\{\overline{A},B\},\{A,\overline{B}\},\{\overline{A},\overline{B}\}$ 中有一对相互独立，则其他三对也相互独立.

证明：不失一般性. 设事件 A 与 B 独立，仅证 $\overline{A}$ 与 B 相互独立，其余情况证明类似.

因为 $P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$，又 A 与 B 独立，

所以
$$P(AB)=P(A)P(B),$$
从而
$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(A)P(B)=P(B)[1-P(A)]=P(\overline{A})P(B),$$

所以，$\overline{A}$ 与 B 相互独立.

用数学归纳法可以证明：

定理 2　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则将其中任意 m 个 $(1\leqslant m\leqslant n)$ 换成其对立事件，则所得 n 个事件也相互独立. 特别地，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\cdots,\overline{A}_n$ 也相互独立.

3. 事件独立性的应用

(1)相互独立事件至少发生其一的概率的计算

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) \\ &= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_n).\end{aligned}$$

这个公式与非独立的场合相比，要简便得多，它在实际问题中经常用到.

例 5 假设每个人血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%，混合 100 个人的血清，求此血清中含有肝炎病毒的概率.

解：设 $A_i = \{$第 i 个人血清中含有肝炎病毒$\}$，$i = 1, 2, \cdots, 100$，可以认为 $A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ 相互独立，所求的概率为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}) = 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_{100}) = 1 - 0.996^{100} \approx 0.33.$$

虽然每个人含有病毒的概率都很小，但是混合后，则有很大的概率. 在实际工作中，这类效应值得充分重视.

例 6 张、王、赵同学各自独立地去解一道数学难题，他们解出的概率为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$，求：

①恰有一人解出的概率；

②难题被解出的概率.

解：设 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 分别表示张、王、赵同学解出难题这 3 个事件，由题设知，A_1, A_2, A_3 相互独立.

①令 $A = \{3$ 人中恰有 1 人解出难题$\}$，

则 $$A = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3,$$

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) \\ &= P(A_1) P(\overline{A}_2) P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) P(A_2) P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) P(A_3) \\ &= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{13}{30}.\end{aligned}$$

②令 $B = \{$难题被解出$\}$，

则 $$\begin{aligned}P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) P(\overline{A}_3) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

(2)在可靠性理论中的应用

对于一个电子元件，它能正常工作的概率 p 称为它的可靠性；元件组成系统，系统正常工作的概率称为该系统的可靠性. 随着电子技术的迅猛发展，关于元件和系统可靠性的研究已发展成为一门新的学科——可靠性理论. 概率论是研究可靠性理论的重要工具.

例 7 如果构成系统的每个元件的可靠性均为 r，$0 < r < 1$，且各元件能否正常工作是相互独立的，试求下面两种系统的可靠性.

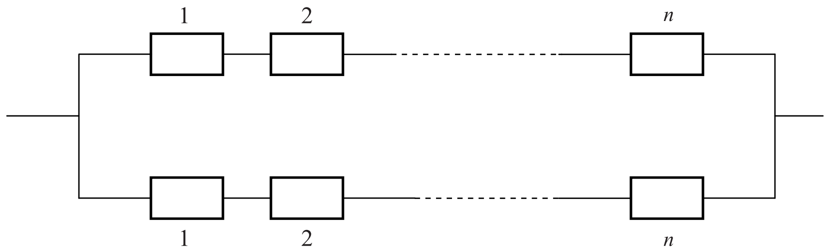


图 1－9

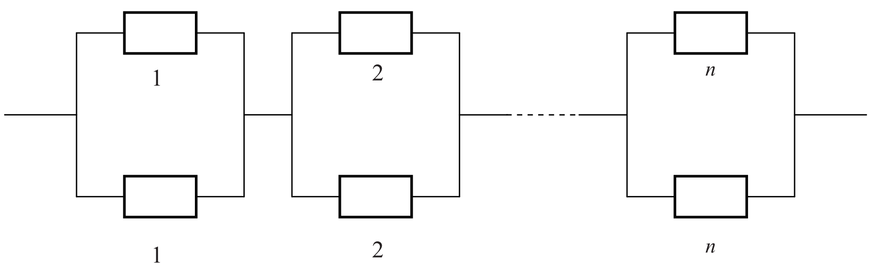


图 1－10

解:(1)每条通路要能正常工作,当且仅当该通路上各元件正常工作,故其可靠性为 $R_c=r^n$,即通路发生故障的概率为 $1-r^n$. 由于系统是由两通路并联而成,两通路同时发生故障的概率为 $(1-r^n)^2$,因此上述系统的可靠性为

$$R_s=1-(1-r^n)^2=r^n(2-r^n).$$

(2)每对并联元件的可靠性为 $R'=1-(1-r)^2=r(2-r)$,

系统由 n 对并联元件串联而成,故其可靠性为

$$R_s'=(R')^n=r^n\ (2-r)^n.$$

利用数学归纳法可以证明,当 $n\geqslant 2$ 时,$(2-r)^n>2-r^n$. 所以 $R_s'>R_s$.

因此,虽然上面两个系统同样由 $2n$ 个元件构成,作用也相同,但是第二种构成方式比第一种方式可靠性大. 寻找可靠性较大的构成方式也是可靠理论的研究课题之一.

1.5.2　伯努利概型

1. 试验的独立性

如果两次试验的结果是相互独立的,称两次试验是相互独立的. 当然,两次试验是相互独立的,由此产生的事件也是相互独立的.

2. 伯努利概型

(1)伯努利试验

若试验 E 只有两个可能的结果 A 及 $\overline{A}$,则称这个试验为伯努利试验.

(2)伯努利概型

设随机试验 E 具有如下特征:

①每次试验是相互独立的;

②每次试验有且仅有两种结果:事件 A 和事件 $\overline{A}$;

③每次试验的结果发生的概率相同,即 $P(A)=p$,$P(\overline{A})=1-p=q$,在每次试验中保

持不变.

称试验 E 表示的数学模型为伯努利概型. 若将试验 E 做了 n 次,则这个试验也称为 n 重伯努利试验,记为 E^n.

由此可知,"一次抛掷 n 枚相同的硬币"的试验可以看作是一个 n 重伯努利试验.

一个伯努利试验的结果可以记作

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n).$$

其中,$\omega_i(1\leqslant i\leqslant n)$或者为 A,或者为$\overline{A}$,因而这样的 ω 共有 2^n 个,它们的全体就是伯努利试验的样本空间 Ω.

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\in\Omega.$$

如果 $\omega_i(1\leqslant i\leqslant n)$中有 k 个 A,则必有$(n-k)$个$\overline{A}$. 于是,由独立性得 $P(\omega)=p^kq^{n-k}$.

如果要求"n 重伯努利试验中事件 A 出现 k 次"这一事件的概率,记 $B_k=\{n$ 重伯努利试验中事件 A 出现 k 次$\}$,

由概率的可加性 $P(B_k)=\sum\limits_{\omega\in B_k}P(\omega)=\mathrm{C}_n^kp^kq^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n.$

在 n 重伯努利试验中,事件 A 至少发生一次的概率为 $1-q^n$(可以转化为它的对立事件来求).

例 8 金工车间有 10 台同类型的机床,每台机床配备的电功率为 10 kW,已知每台机床工作时,平均每小时实际开动 12 min,且开动与否是相互独立的. 现因当地电力供应紧张,供电部门只提供 50 kW 的电力给这 10 台机床. 这 10 台机床能够正常工作的概率为多大?

解:50 kW 电力可同时供给 5 台机床开动,因而 10 台机床中同时开动的台数不超过 5 台时都可以正常工作,而每台机床只有"开动"与"不开动"的两种情况,且开动的概率为 $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$,不开动的概率为$\frac{4}{5}$. 设 10 台机床中正在开动着的机床台数为 X,则$P(X=k)=\mathrm{C}_{10}^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}$,$0\leqslant k\leqslant 10$. 于是同时开动着的机床台数不超过 5 台的概率为

$$P(X\leqslant 5)=\sum_{k=0}^{5}P(X=k)=\sum_{k=0}^{5}\mathrm{C}_{10}^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}=0.994.$$

由此可知,这 10 台机床能正常工作的概率为 0.994,也就是说,这 10 台机床的工作基本上不受电力供应紧张的影响.

例 9 某人有一串 m 把外形相同的钥匙,其中只有一把能打开家门. 有一天该人头脑不清后回家,下意识地每次从 m 把钥匙中随便拿一把去开门,那么该人第 k 次才把门打开的概率为多少?

解:因为该人每次从 m 把钥匙中任取一把(试用后不做记号又放回),所以能打开门的一把钥匙在每次试用中恰被选中的概率为$\frac{1}{m}$,易知,这是一个伯努利试验,在第 k 次才把门打开,意味着前面 $k-1$ 次都没有打开,于是由独立性即得

$$P(\text{第 }k\text{ 次才将门打开})=\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{m}=\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{k-1}.$$

例 10　(巴拿赫火柴问题)某数学家常带有两盒火柴(左、右衣袋中各放一盒),每次使用时,他在两盒中任抓一盒,问:他首次发现一盒空时,另一盒有 r 根的概率是多少?($r=0,1,2,\cdots,N$,N 为最初盒子中的火柴数)

解:设选取左边衣袋为"成功",于是相继选取衣袋,就构成了 $p=\frac{1}{2}$的伯努利试验.当某一时刻为先发现左袋中没有火柴而右袋中恰有 r 根火柴的事件,相当于恰有 $N-r$ 次失败发生在第 $2N-r$ 根火柴,其中从左袋中取了 N 根,并且在 $2N-r+1$ 次取火柴还要从左袋中取,才能发现左袋已经取完,因此

$$P(\text{发现左袋空而右袋还有 }r\text{ 根})=C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r-N}\cdot\frac{1}{2}=C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r+1}.$$

由对称性,首次发现右袋中没有火柴而左袋中恰有 r 根的概率为 $C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r+1}$.

故所求的概率为

$$p=2C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r+1}.$$

习题 1.5

1.两射手独立地向同一目标射击,设甲、乙击中目标的概率分别为 0.9 和 0.8,求:

(1)两人都击中目标的概率;

(2)目标被击中的概率;

(3)恰好有一人击中目标的概率.

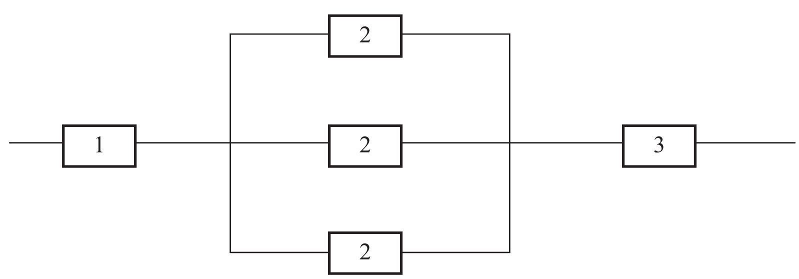
2.甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,命中率分别为 0.6 和 0.7,现已知目标被击中,求它是甲击中的概率.

3.3 人独立地解一道数学难题,他们能单独解出的概率分别为$\frac{1}{5}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,求此难题被解出的概率.

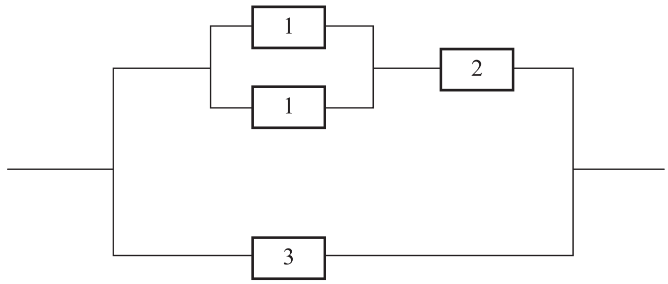
4.设 A,B,C 相互独立,证明 A 与 $B\cup C$ 独立,A 与 $B-C$ 也独立.

5.求下列系统(如图所示)的可靠度,假设元件的可靠度为 p_i,各元件正常工作或失效相互独立.

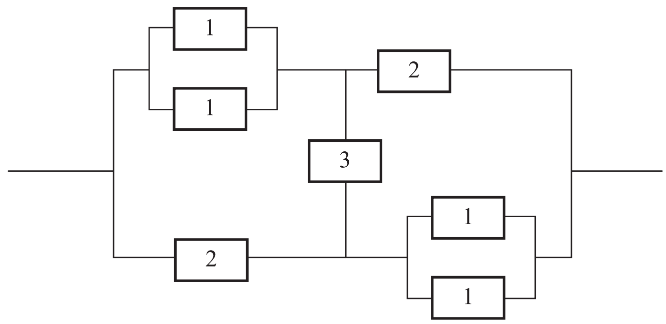
(1)



(2)



(3)



6. 甲、乙两人进行乒乓球比赛,每局甲胜的概率为 p,$p\geqslant\frac{1}{2}$. 对甲而言,采用三局两胜制有利,还是采用五局三胜制有利? 设各局胜负相互独立.

7. 若事件 A 与 B 相互独立且互不相容,试求 $\min\{P(A),P(B)\}$.

8. 设 $P(A)=0.4$,$P(A\cup B)=0.7$,在以下情况下求 $P(B)$:

(1)A,B 互不相容;(2)A,B 独立;(3)$A\subset B$.

9. 设 A,B,C 两两独立,且 $ABC=\varnothing$.

(1)如果 $P(A)=P(B)=P(C)=x$,试求 x 的最大值;

(2)如果 $P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,且 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,求 $P(A)$.

10. 事件 A,B 独立,A 与 B 都不发生的概率为$\frac{1}{9}$,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,求 $P(A)$,$P(B)$.

11. 1 人的血型为 A,B,AB,O 型的概率分别为 0.37,0.21,0.08,0.34,现任意挑选 4 人,试求:

(1)此 4 人的血型全不相同的概率;

(2)此 4 人的血型全部相同的概率.

12. 一大楼装有 5 个同类型的供水设备. 调查表明,在任一时刻 t,每个供水设备被使用的概率为 0.1,求在同一时刻:

(1)恰有 2 个设备被使用的概率; (2)至少有 3 个设备被使用的概率;

(3)至多有 3 个设备被使用的概率; (4)至少有 1 个设备被使用的概率.

13. 一射手对同一目标独立地进行 4 次射击，若至少命中 1 次的概率为$\frac{80}{81}$，试求该射手进行 1 次射击的命中率.

14. 甲袋中有 1 个黑球、2 个白球，乙袋中有 3 个白球. 每次从两袋中各取 1 个，交换放入另一袋中，求交换 n 次后，黑球仍在甲袋中的概率.

15. 假设一厂家生产的每台仪器，若合格的概率为 0.7，则可直接出厂；若合格的概率为 0.3，则需进行测试，经测试后，合格的概率为 0.8 可以出厂，合格的概率为 0.2，则定为不合格品不能出厂. 现该厂生产了 $n(n\geqslant 2)$ 台仪器(假设各台仪器的生产过程是相互独立的)，求：

(1)全部能出厂的概率；

(2)其中恰有 2 台不能出厂的概率；

(3)其中至少有 2 台不能出厂的概率.

---

16. 设 A,B 是两随机事件，且 $0<P(A)<1, P(B)>0$，证明 A 与 B 相互独立的充要条件为 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$.

17. 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，且 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，证明 A 与 B 独立.

18. 一条自动生产线连续生产 n 件产品不出故障的概率为$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$，$n=0,1,2,\cdots$，假设产品的优质品率为 $p(0<p<1)$，如果各件产品是否为优质品相互独立：

(1)计算生产线在两次故障间共生产 k 件($k=0,1,2,\cdots$)优质品的概率；

(2)已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品，求它共生产 m 件产品的概率.

19. 设每次试验中 A 发生的概率为 $\varepsilon>0$，在 n 次独立重复试验中，事件 A 至少发生一次的概率记为 p_n，求$\lim\limits_{n\to\infty}p_n$.

本章概要

1. 必然现象和随机现象是自然界、社会生产和日常生活中广泛存在的两类现象，概率论与数理统计是揭示和研究随机现象统计规律的数学学科.

2. 随机事件是概率论的基本概念，它与集合论的知识相类似，借助集合的知识可以比较直观地了解事件的关系和运算.

3. 概率是概率论中另一个基本概念，频率的稳定性是概率统计定义的基础，概率的公理化定义实质上是一个定义在事件域上的集合函数，从公理化定义出发，可以得到概率的相关性质.

4. 从条件概率出发，可以得到概率的乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式.

5. 古典概型、几何概型和伯努利概型是概率论三个特殊的概型.

6. 事件的独立性是概率论的重要概念之一，这个概念在概率论和数理统计中经常用到.

常用术语

随机现象　随机事件　事件之间的关系和运算　完备事件组　概率的定义　概率的性质　古典概型　几何概型　伯努利概型　条件概率　乘法公式　全概率公式　贝叶斯公式　事件的独立性

常用公式

1. 概率的计算

(1)古典概率计算公式

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

(2)几何概率计算公式

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}}.$$

(3)概率的加法公式

对任意两个事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

2. 有关条件概率的计算公式

(1)条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}(P(B)>0),$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}(P(A)>0).$$

(2)乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)(P(A)>0),$$
$$P(AB)=P(B)P(A|B)(P(B)>0).$$

(3)全概率公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一列互不相容的事件,且有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$(也称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个剖分),则对任何事件 A,有 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$.

(4) 贝叶斯公式

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一列互不相容的事件,且

$$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega,P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n,$$

则对任一事件 A,$P(A)>0$,有 $P(B_i\mid A)=\dfrac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}$.

3. 事件的独立性

事件 A,B 相互独立的充要条件是 $P(AB)=P(A)P(B)$.

4. 伯努利公式

设在每次试验中事件 A 发生的概率为 p，则在 n 重伯努利试验中事件 A 出现 k 次的概率

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n.$$