

前 言

《工程数学学习指导》是为配合学生学习《工程数学》知识,根据《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写的.在编写结构上,安排了内容提要、重点难点解析、典型例题、内容和例题增补及同步自测几个项目,主要基于归纳主要知识点,解答疑惑,巩固基本运算,推广应用几个方面,以帮助学生克服学习中的困难,加深巩固对基本知识的理解与掌握,扩大数学知识的应用范围,提高数学知识的应用能力.

本章提要列出了各章的主要名词、概念、术语,要求学生能用数学语言、符号、式子加以复述;根据各章不同的问题,归纳本章涉及的公式、定理、结论,使所学内容由厚变薄,并抓住主要解题依据.重点、难点解析针对每部分的重点与难点进行阐述,以帮助学生领会重点、消除疑点,减少学习中的障碍;选择具有典型性、代表性和综合性的典型例题,作较详细的解答,加深学生对概念的理解并提高解题能力;内容与例题增补增加在所学知识范围内学生能够理解和接受的一些内容,拓宽学生知识的实际应用领域;自我测验题一方面用来弥补课后作业习题量的不足,巩固所学知识,另一方面用来检查学习效果,并达到自我提高的目的.

本书由贺利敏担任主编,负责全书整体设计及统稿,并编写了第一章、第三章、第五章及第六章,宋晓婷编写了第二章,刘琨编写了第四章.

编者衷心感谢在本书的编写和出版中给予支持和关心的各位同人,同时在编写过程中参考了近年来出版的各种教材及网上资料,在此一并致谢.由于对一些问题的认识未必周全,因此表述难免有不妥之处,真诚欢迎各位教师与学生在使用的过程中提出宝贵意见,以使本书更加适用,真正起到辅助教学的作用.

编 者

目 录

第一章	常微分方程	1
一	本章提要	1
二	重点、难点解析	2
三	典型例题	4
四	内容与例题增补	7
五	同步自测	9
第二章	拉普拉斯变换	11
一	本章提要	11
二	重点、难点解析	12
三	典型例题	14
四	内容与例题增补	17
五	同步自测	19
第三章	级数论	21
一	本章提要	21
二	重点、难点解析	23
三	典型例题	25
四	内容与例题增补	29
五	同步自测	33
第四章	线性代数	35
一	本章提要	35
二	重点、难点解析	37
三	典型例题	40
四	内容与例题增补	45
五	同步自测	46
第五章	概率论	53
一	本章提要	53
二	重点、难点解析	54
三	典型例题	58

四	内容和例题增补	61
五	同步自测	64
第六章	数理统计	67
一	本章提要	67
二	重点、难点解析.....	68
三	典型例题	71
四	内容与例题增补	74
五	同步自测	76
参考答案		78
参考文献		82

第一章 常微分方程

一 本章提要

1. 基本概念

微分方程,微分方程的阶,微分方程的解,通解,特解,初始条件,定解问题;一阶可分离变量的微分方程,一阶线性微分方程,二阶线性常系数齐次与非齐次微分方程;线性相关与线性无关.

2. 各类方程形式及求解要点

(1) 可分离变量的微分方程

形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ (或 $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$) 的微分方程叫作一阶可分离变量的微分方程.

解法:先分离变量,然后两边积分.

(2) 一阶线性齐次微分方程

形如 $y' + p(x)y = 0$ 的微分方程称为一阶线性齐次微分方程.

解法一:分离变量法.

解法二:代公式 $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ (C 为任意常数)求通解.

(3) 一阶线性非齐次微分方程

形如 $y' + p(x)y = Q(x)$, $Q(x) \neq 0$ 的微分方程称为一阶线性非齐次微分方程.

解法一:代公式 $y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right]$ (C 为任意常数)求通解.

解法二:常数变易法.

(4) 二阶常系数线性齐次微分方程

形如 $y'' + py' + qy = 0$ 的微分方程称为二阶常系数线性齐次微分方程(其中 p, q 是常数).

解法:特征根法.

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2 = r$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$
一对共轭复根 $r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

(5) 二阶常系数线性非齐次微分方程

形如 $y'' + py' + qy = f(x)$ ($f(x) \neq 0$) 的微分方程称为二阶常系数线性非齐次微分方程.

解法:通解是 $y = \bar{y} + Y$. 其中 $\bar{y}$ 是方程的一个特解, Y 是对应齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解.

$\bar{y}$ 的求解方法:待定系数法,可设特解形式决定于 $f(x)$ 的类型,具体对应如下表:

$f(x)$ 的类型	特解 $\bar{y}$ 的形式
$f(x) = P_n(x)e^{ax}$	$\bar{y} = x^k Q_n(x)e^{ax}$ 当 a 不是特征根时, $k=0$; 当 a 是特征根,但不是重根时, $k=1$; 当 a 是特征根,且为重根时, $k=2$
$f(x) = e^{ax}(a\cos\omega x + b\sin\omega x)$	$\bar{y} = x^k e^{ax}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$. 当 $\alpha \pm \omega i$ 不是特征根时, $k=0$; 当 $\alpha \pm \omega i$ 是特征根时, $k=1$

二 重点、难点解析

1. 微分方程基本概念

(1)由微分方程定义可知,微分方程的特点是,在方程中,未知函数和自变量可以出现,也可以不出现,但必须要有未知函数的导数或微分,如 $y' + xy = e^x$, $2xy' - x\ln x = 0$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 4$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 4$, $x dy + y dx = 0$ 都是微分方程,但 $y^2 - 2y - 3 = 0$, $e^y + xy = e^x$ 不是微分方程.

(2)微分方程也是方程,也有未知.微分方程中的未知是函数,能使方程恒等的函数称为微分方程的解.而过去我们所学的各类方程,如整式方程,分式方程,根式方程,三角方程,指数方程及对数方程等,它们的未知为数,即解都是常数.这一点是微分方程与其他方程根本的区别.

(3)微分方程的解为函数,学习中要注意区分通解与特解.通解为解的一般形式,包含了微分方程的所有解,而特解仅为一个具体的解.

通解和特解既有联系又有区别:

- ①通解中有任意常数 C ,特解中没有任意常数;
- ②通解中包含有无穷多个函数,特解只是一个函数;
- ③特解可由通解通过确定任意常数取值得到.

(4)要明确微分方程的阶数,即方程中出现的最高阶导数决定了微分方程的阶数.应注意阶数与方程中未知函数及其导数的幂次无关.如 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 4$ 是一阶微分方程,而 $\frac{d^3y}{dx^3} = 4$ 是三阶微分方程.

(5)在实际问题中,通过微分方程求未知函数包含了建立微分方程并确定初始条件、

解微分方程、阐述解的实际意义三个方面的问题. 所求解为微分方程的特解, 一般解题过程为先求微分方程的通解, 再通过初始条件确定通解中任意常数的取值进而得到特解.

2. 微分方程求解

微分方程求解, 首要问题是分清所给方程的类型, 不同类型的微分方程, 其求解方法有很大的不同. 换句话说, 各种类型的微分方程都有自己特定的解法, 掌握这部分内容, 方法是类型识别清楚后, 采用“对号”的解法. 有时一个微分方程也可能有多种解法可用, 注意选择最简捷的方法用以提高解题效率.

(1) 可分离变量微分方程

可分离变量微分方程是一阶微分方程中最基本、最简单的类型, 方程为 $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot$

$g(y)$ 或 $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$, 其特点为变量可分离, 即 $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, 或

$\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx$, 故相应解法称为分离变量法.

需要注意的是:

①分离变量后, 两边积分, 左边是对 y 求积分, 右边是对 x 求积分, 这是否允许? 对这个问题, 只要理解 y 是 x 的函数, 如设为 $y = h(x)$, 左边即为 $\frac{d[h(x)]}{g[h(x)]}$, 也是与 x 有关的微分式, 故两端可同时对 x 求积分. 而在左边积分中相当于使用了不定积分换元 ($y = h(x)$) 积分法.

②分离变量时, 用 $g(y)$ 去除方程两边, 可能漏掉使 $g(y) = 0$ 而满足方程的解, 这时需扩大通解中任意常数的取值范围, 使其包含漏掉的解. 若通解不能包含漏掉的解, 则需另外写出. 如 $y' = \frac{y^2 - 1}{2x}$ 分离变量得 $\frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{1}{2x}dx$ ($y \neq \pm 1$), 解得通解为 $y = \frac{1 + Cx}{1 - Cx}$, 而直接从原方程验证, $y = 1, y = -1$ 也是微分方程的解, 而通解形式不能包括 $y = -1$, 因而需加以补充.

③方程的解可以是显函数(显式解), 也可以是隐函数(隐式解).

④可分离变量微分方程求解时, 经常遇到积分后结果为对数型函数的情况, 结果的确可采用简化步骤得到.

如: 解方程 $(1 + x^2)y' - xy = 0$.

解 当 $y \neq 0$ 时, 分离变量, 得

$$\frac{1}{y}dy = \frac{x}{1+x^2}dx,$$

两边积分, 得

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1,$$

进一步化简, 得

$$\begin{aligned} |y| &= e^{C_1} \sqrt{1+x^2}, \\ y &= \pm e^{C_1} \sqrt{1+x^2}. \end{aligned}$$

因 e^C 是不为零的实数, 而 $y=0$ 也是该方程的解, 所以方程的通解是

$$y=C\sqrt{1+x^2} \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

求解简化步骤:

直接分离变量, 得

$$\frac{1}{y}dy = \frac{x}{1+x^2}dx,$$

两边积分, 并在此处作特别处理

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \ln C,$$

化简, 得

$$y=C\sqrt{1+x^2} \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

与本例有相同特点的微分方程比较常见, 为了方便解题, 我们特别约定: 解微分方程求积分时, 若原函数出现对数时可不加“|”号, 同时 C 作相应处理.

(2) 线性微分方程

线性微分方程是一类常见且简单的微分方程, 要注意辨认并掌握方程解法.

①未知函数及其导函数都是一次的, 这种方程称为线性方程. 即所谓线性, 是针对函数及其导数都是“一次幂”而讲的. 因此, 对于一般具体给出的方程, 只有明确了未知函数和自变量之后, 才能判定给定的方程是否是线性的. 例如, 以 y 为未知函数的方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-y}$ 不是线性微分方程, 若写成以 x 为未知函数的方程 $\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{y}$, 即 $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - 1$, 它是一阶线性微分方程.

②线性微分方程解的结构由二阶线性微分方程推导给出, 稍加分析, 不难发现, 相应结论对于一阶线性微分方程与二阶以上线性微分方程都是适用的.

如: $y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx$ 是一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$ 的通解, 右边第一项是对应的齐次方程 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 右边第二项是非齐次方程的一个特解. 符合线性非齐次微分方程的通解是它所对应的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解相加而成.

(3) 常系数线性微分方程

在线性微分方程中, 若未知函数及其各阶导数的系数全是常数, 这样的微分方程称为常系数线性微分方程. 二阶常系数线性微分方程是求解问题讨论最彻底的一类方程, 而其他的线性微分方程只能就所给方程再具体讨论.

三 典型例题

1. 基本概念的应用

例 1 指出下列微分方程的阶数, 并说明是否为线性方程.

$$(1) x(y')^2 - 2yy'' + x = 0; \quad (2) y'' + y' - 10y = 3x;$$

$$(3) y^{(5)} + \cos y + 3x = 0; \quad (4) yy' + y = 2x.$$

解题提示 微分方程的阶数是指方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数;而线性,是要求函数及其导数都是“一次幂”.

解 (1)是一阶非线性微分方程,因为方程中含有 y' 的平方项及 yy'' 项;

(2)是二阶线性微分方程;

(3)是五阶非线性微分方程,因为方程中含有非线性函数 $\cos y$;

(4)是一阶非线性微分方程,因为方程中含有 yy' 项,这是一个二次项.

2. 各类方程求解

例 2 判断下列微分方程的类型,并求出它们的通解.

$$(1) \frac{dy}{dx} = 3x^2 y;$$

$$(2) y' + y \cot x = x^2 \csc x;$$

$$(3) y' = \frac{1}{x-y}.$$

解题提示 求解微分方程关键在于要弄清楚方程的所属类型,在类型确定之后,根据该类型的特点求得方程的解.

解 (1) 方程是可分离变量的微分方程,分离变量后,得

$$\frac{dy}{y} = 3x^2 dx,$$

两边积分,得

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 3x^2 dx,$$

按简化步骤计算,得

$$\ln y = x^3 + \ln C,$$

从而 $y = Ce^{x^3}$.

(2) 方程是一阶线性非齐次微分方程.

方法一:用公式 $y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right]$ 求出解. 其中, $p(x) = \cot x$, $Q(x) = x^2 \csc x$,

$$y = e^{-\int \cot x dx} \left[\int x^2 \csc x e^{\int \cot x dx} dx + C \right] = \frac{1}{\sin x} \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right).$$

方法二:容易求出对应的线性齐次方程 $y' + y \cot x = 0$ 的通解是 $y = \frac{C}{\sin x}$,再用常数变易法求出原方程的通解.

设 $y = \frac{C(x)}{\sin x}$ 为原方程的通解,代入原方程中,可解得 $C(x) = \frac{1}{3} x^3 + C$.

所以原方程的通解 $y = \frac{1}{\sin x} \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right)$.

(3)从形式上看,不易确定原方程的类型,但通过转化 $\frac{dy}{dx}$ 为 $\frac{dx}{dy}$,得 $\frac{dx}{dy}=x-y$,这是以 x 为函数的一阶线性非齐次微分方程,有求解公式 $x = e^{-\int p(y)dy} \left[\int Q(y) e^{\int p(y)dy} dy + C \right]$,将 $p(y) = -1, Q(y) = -y$ 代入通解公式,积分得 $x = Ce^y + y + 1$.

故原方程的通解为 $x = Ce^y + y + 1$.

例3 求方程 $y'' + 2y' + 8y = 0$ 的通解.

解题提示 这是一个二阶常系数线性齐次方程,用特征根法求解.

解 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0$,

特征根为共轭复根 $\lambda = -1 \pm \sqrt{7}i$,

所以通解为 $y = e^{-x} (C_1 \cos \sqrt{7}x + C_2 \sin \sqrt{7}x)$.

例4 求方程 $y'' + 5y' - 6y = xe^{-6x}$ 的特解.

解题提示 二阶常系数线性非齐次方程的特解的形式是由特征根与 $f(x)$ 的类型决定.

解 对应的线性齐次方程为 $y'' + 5y' - 6y = 0$,

其特征方程为 $\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$,

特征根为 $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = 1$.

由于 -6 是特征单根,且 $f(x) = x$ 为一次多项式,所以应设非齐次方程的特解为 $\bar{y} = x(b_0x + b_1)e^{-6x}$,

代入原方程并约去 e^{-6x} ,得

$$(2b_0 - 7b_1) - 14b_0x = x,$$

比较系数,得方程组

$$\begin{cases} 2b_0 - 7b_1 = 0, \\ -14b_0 = 1, \end{cases}$$

解得 $b_0 = -\frac{1}{14}, b_1 = -\frac{1}{49}$.

所以特解为 $\bar{y} = -\frac{x}{98}(7x+2)e^{-6x}$.

例5 求方程 $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$ 的通解.

解题提示 线性非齐次方程的通解由两部分构成:一部分是对应线性齐次方程的通解,另一部分是方程本身的一个特解.

解 对应的线性齐次方程为 $y'' + y' - 2y = 0$,其特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$,解得特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$.线性齐次方程通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

由线性非齐次方程自由项 $f(x) = \cos x - 3\sin x = e^{0 \cdot x}(-3\sin x + \cos x)$,而 $0 \pm i$ 不是特征根,所以应设非齐次方程的特解

$$\bar{y} = A \sin x + B \cos x.$$

代入原方程,得

$$(A - 3B) \cos x + (-3A - B) \sin x = \cos x - 3\sin x.$$

比较 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的系数,得方程组

$$\begin{cases} A-3B=1, \\ -3A-B=-3, \end{cases}$$

解得 $A=1, B=0$, 于是方程的特解为 $\bar{y}=\sin x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=Y+\bar{y}=C_1 e^x+C_2 e^{-2x}+\sin x.$$

3. 综合应用

例 6 已知 $\int_0^1 f(tx)dt = \frac{1}{2}f(x) + 1$, 求 $f(x)$.

解题提示 右边为变量 x 的函数, 故可考虑两边对 x 求导, 得到关于 $f(x)$ 的微分方程, 求导之前, 需把 $\int_0^1 f(tx)dt$ 转化为变限积分.

解 等式两边同乘 x , 得

$$\int_0^1 f(tx)d(tx) = \frac{1}{2}xf(x) + x,$$

令 $u=tx$, 得

$$\int_0^x f(u)du = \frac{1}{2}xf(x) + x,$$

两边求导, 得

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}xf'(x) + 1,$$

$$\text{即 } f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = -\frac{2}{x}.$$

这是一阶线性非齐次微分方程, 利用公式, 得

$$f(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \left(-\frac{2}{x} \right) e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = x \left[\int \left(-\frac{2}{x^2} \right) dx + C \right] = 2 + Cx.$$

四 内容与例题增补

1. 关于常系数线性齐次微分方程的特征根法

对于确定二阶常系数线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 通解, 可以按照以下过程进行:

(1) 写出特征方程 $r^2+pr+q=0$;

(2) 求出特征根 r_1, r_2 ;

(3) 按下表写出微分方程的通解:

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 $r_1 \neq r_2$	$y=C_1 e^{r_1 x}+C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2=r$	$y=(C_1+C_2 x)e^{rx}$
一对共轭复根 $r_1=\alpha+\beta i, r_2=\alpha-\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x+C_2 \sin \beta x)$

这种结论的确定,来自于二阶常系数线性齐次微分方程解的结构定理(如果 y_1 与 y_2 是方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关的特解,那么 $y=C_1y_1+C_2y_2$ (C_1, C_2 为任意常数)就是方程的通解以及猜想形如 $y=e^{rx}$ 的函数为方程 $y''+py'+qy=0$ 的解. 这种处理,显然对于各阶常系数线性齐次微分方程都是适用的.

例 1 求微分方程 $y'+2y=0$ 的通解.

方法一(公式法):由 $p(x)=2$,代入公式 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$,可得 $y=Ce^{-2x}$.

方法二(特征根法):写出特征方程为 $r+2=0$,特征根为 $r=-2$,故 $y=e^{-2x}$ 为方程的解,通解为 $y=Ce^{-2x}$.

例 2 求微分方程 $y^{(4)}-y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^4-1=0$,

解特征方程,得特征根为 $r=\pm 1$ 与 $r=\pm i$,

故可确定微分方程的四个线性无关的解, $y_1=e^x, y_2=e^{-x}, y_3=\sin x, y_4=\cos x$,

因而原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\sin x+C_4\cos x$.

2. 可化为可分离变量的一阶微分方程

所给方程有时虽然不是可分离变量的微分方程,但经过适当的变量代换,可以化为可分离变量的方程. 常见的有以下两种情形:

(1)形如 $\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程,可设 $\frac{y}{x}=u$,即 $y=ux$,原方程可变为 $u+x\frac{du}{dx}=F(u)$,是可分离变量的微分方程.

(2)形如 $\frac{dy}{dx}=F(ax+by)$ 的方程,可设 $ax+by=u$,原方程变为 $a+bF(u)=\frac{du}{dx}$,是可分离变量的微分方程.

例 3 求 $y'=\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$ 的通解.

解 该微分方程是形如 $\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程,为此设 $u=\frac{y}{x}$,则有 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,代入原方程,得

$$x\frac{du}{dx}=\cos u,$$

上述方程是一个可分离变量的方程,分离变量,得

$$\sec u du = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分,得

$$\ln(\sec u + \tan u) = \ln x + \ln C,$$

$$\sec u + \tan u = Cx,$$

把 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式,得原方程的通解为

$$\sec \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x} = Cx.$$

例 4 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$ 的通解.

解 该微分方程是形如 $\frac{dy}{dx} = F(ax+by)$ 的方程, 为此设 $x+y=u$, 则 $y=u-x$, 所以,

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$, 于是原微分方程变为

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u}, \text{ 即 } \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u}.$$

这是一个可分离变量的微分方程, 分离变量, 得

$$\frac{u}{u+1} du = dx,$$

两边积分, 得

$$u - \ln(u+1) = x + \ln C,$$

回代原变量, 得

$$y - \ln(x+y+1) = \ln C,$$

所以 $y = \ln C(x+y+1)$.

五 同步自测

1. 填空题.

(1) 微分方程 $\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{3}{x} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = e$ 的阶数为_____.

(2) 微分方程 $y'' - 4y' + 5y = 0$ 的特征根是_____.

(3) 微分方程 $y^{(4)} = x$ 的通解为_____.

(4) 用待定系数法求微分方程 $y'' - y' = e^x$ 的一个特解时, 应设特解形式为_____, 方程的通解为_____.

(5) 微分方程相对于代数方程来说, 本质区别在于微分方程中含有_____; 且它的解在一般情况下不是_____, 而是_____.

2. 选择题.

(1) 方程()是一阶线性微分方程.

A. $dy + (x^2 y + x^2) dx = 0$;

B. $y' - y^3 = 0$;

C. $y' - \cos y = 0$;

D. $3y' + ye^y = x$.

(2) 特征根为 $r_1 = r_2 = -\sqrt{2}$ 的二阶线性齐次微分方程是().

A. $y'' + 2y' + y = 0$;

B. $y'' - 2y' + y = 0$;

C. $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$;

D. $y'' + 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$.

(3) 方程 $\frac{dy}{dx} = \ln x + y^2 \ln x$ 的通解为().

A. $y = (1 + y^2) \ln x$;

B. $y = \tan(x \ln x)$;

C. $y = \tan(x \ln x - x)$;

D. $y = \tan(x \ln x - x + C)$.

(4) 下列函数组中线性无关的是().

- A. $\ln x, \ln x^3$; B. $1, \ln x$; C. $x, \ln 2^x$; D. $\ln \sqrt{x}, \ln x$.

(5) 若 y_1 和 y_2 是二阶线性齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个特解, 则 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ (C_1, C_2 是任意常数) 是().

- A. 该方程的通解; B. 该方程的解;
C. 该方程的特解; D. 不一定是该方程的解.

(6) 微分方程 $y''' - x^2 y'' - x^5 = 1$ 的通解中应含独立的任意常数的个数为().

- A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.

(7) 用待定系数法求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = \sin x$ 的一个特解时, 应设特解的形式为().

- A. $y = B \sin x$; B. $y = A \cos x$;
C. $y = A \cos x + B \sin x$; D. $y = x(A \cos x + B \sin x)$.

(8) 微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 6, y'|_{x=0} = 10$ 的特解为().

- A. $y = 3e^x + e^{3x}$; B. $y = 2e^x + 3e^{3x}$;
C. $y = 4e^x + 2e^{3x}$; D. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

3. 求下列各微分方程的通解或在初始条件下的特解.

(1) $y' - \frac{2}{x}y = x^2 \sin 3x$;

(2) $xy' - \frac{1+y^2}{y} = 0$;

(3) $y'' + 4y' + 29y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 15$;

(4) 已知 $y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}$ 是微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个特解, 求解定解问

题 $\begin{cases} y'' + py' + qy = x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

4. 一曲线过点 $(2, 3)$, 且曲线上任意一点处所作的切线介于两坐标轴之间的部分恰为切点所平分, 求此曲线的方程.

5. 设室温为 20°C , 一物体加热到 100°C , 在 10 min 内冷却到 60°C , 问: 此物体从 100°C 降到 25°C 需要经过多少时间?

6. 向正东 1 海里处的敌舰发射制导鱼雷, 鱼雷在航行中始终对准敌舰. 设敌舰以常数 v_0 沿正北方向直线行驶, 已知鱼雷速度是敌舰速度的 2 倍, 求鱼雷的航行曲线方程, 并问敌舰航行多远时, 将被鱼雷击中?