"十二五"职业教育规划教材

工程数学

GONGCHENG SHUXUE

主 编 贺利敏

北京出版集团公司
北 京 出 版 社

工程数学
主编 贺利敏
北京出版集团公司
北京出版社

内容提要

本书按照教育部《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》文件精神，并结合专业教学对数学内容的基本需求及学生的实际接受能力，由具有丰富教学经验的一线教师编写而成。内容包括常微分方程、拉普拉斯变换、级数论、线性代数、概率论、数理统计、数学模型七部分。选材及体系确定注重各种数学分支所解决的不同问题，充分体现数学知识的应用功能。通过数学实训让学生了解数学解题新工具，通过数学模型培养学生用数学知识解决实际问题的意识与能力。

本书可作为高职高专各类专业通用教材，不同专业可根据专业需求，选择相应模块学习。

图书在版编目（CIP）数据

工程数学 / 贺利敏主编. -- 北京 : 北京出版社，2016.2（2023 重印）

ISBN 978-7-200-11874-2

I. ①工… II. ①贺… III. ①工程数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ① TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 007829 号

工程数学

GONGCHENG SHUXUE

主　编：贺利敏
出　版：北京出版集团公司
　　　　北 京 出 版 社
地　址：北京北三环中路 6 号
邮　编：100120
网　址：www.bph.com.cn
总发行：北京出版集团公司
经　销：新华书店
印　刷：定州市新华印刷有限公司
版　次：2016 年 2 月第 1 版　2023 年 12 月修订　2023 年 12 月第 5 次印刷
开　本：787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　张：12.5
字　数：245 千字
书　号：ISBN 978-7-200-11874-2
定　价：29.00 元

质量监督电话：010-82685218　010-58572341　010-58572393

目　录

第一章

常微分方程

在利用数学知识研究自然界的各种现象和实际问题时,有时可以首先确定未知函数及其变化率之间的关系式,从而得到未知函数表达式.这种问题的讨论就是本章要学习的微分方程.

§1.1 常微分方程基本概念

一、两个实例

例1 已知直角坐标系中的一条曲线通过点(0,1),且在曲线上任意一点 $P(x,y)$ 处的切线斜率等于 $4x$,求该曲线的方程.

解 设所求曲线方程为 $y=f(x)$,根据题意,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x\text{,即 }\mathrm{d}y=4x\mathrm{d}x,$$

上式两边积分,得

$$y=2x^2+C,$$

由于曲线通过点(0,1),解得

$$C=1.$$

所求曲线方程为

$$y=2x^2+1.$$

例2 列车在平直的线路上以 20 m/s 的速度行驶,当制动时列车获得加速度 $-0.4\ \mathrm{m/s^2}$,求列车开始制动后的运动方程.

解 设列车开始制动后的运动方程为 $s=s(t)$,根据题意,有

$$s''(t)=-0.4,\ s'(0)=20,\ s(0)=0.$$

求解可得

$$s'(t)=-0.4t+C_1,\ s(t)=-0.2t^2+C_1t+C_2.$$

再将条件 $s(0)=0$, $s'(0)=20$ 代入上式可得

$$C_1=20,C_2=0.$$

所求列车开始制动后的运动方程为

$$s=-0.2t^2+20t.$$

二、微分方程基本概念

凡含有未知函数导数(或微分)的方程叫作微分方程.我们把未知函数为一元函数的微分方程称为常微分方程,未知函数为多元函数的微分方程称为偏微分方程.本章只讨论常微分方程,简称为微分方程.出现在微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

上面两个例子中 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x$ ($\mathrm{d}y=4x\mathrm{d}x$)为一阶常微分方程,$s''(t)=-0.4$ 为二阶常微分方程.

能使微分方程成立的函数,称为微分方程的解.一般地,如果微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,那么这样的解叫作微分方程的通解.在通解中若任意常数取某定值,或利用附加条件求出任意常数应取的值,这样所得的解称为微分方程的特解.确定通解中任意常数的附加条件称为初始条件.微分方程与其初始条件构成的问题,称为初值问题.求解某初值问题,就是求微分方程的特解.

上面两个例子中 $y=2x^2+C$ 和 $s(t)=-0.2t^2+C_1t+C_2$ 分别为其对应微分方程的通解;$y=2x^2+1$ 和 $s=-0.2t^2+20t$ 分别为其对应微分方程的特解.

例 3 验证函数 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 是微分方程

$$y''+y=0$$

的通解,并求出满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 和 $y'|_{x=0}=-1$ 的特解.

解 因为 $$y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

所以 $$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x,$$

$$y''=-C_1\cos x-C_2\sin x.$$

将 y, y'' 代入微分方程左端,有

$$y''+y=-C_1\cos x-C_2\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x=0,$$

即 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

又 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 中含有两个独立的任意常数,因此它是方程 $y''+y=0$ 的通解.

把初始条件 $y|_{x=0}=1$ 和 $y'|_{x=0}=-1$ 分别代入 y 和 y',得

$$\begin{cases}C_1\cos 0+C_2\sin 0=1,\\-C_1\sin 0+C_2\cos 0=-1.\end{cases}$$

解此方程组,得

$$C_1=1,\ C_2=-1.$$

因此,方程 $y''+y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 和 $y'|_{x=0}=-1$ 的特解为

$$y=\cos x-\sin x.$$

例 4 求微分方程 $y'''=\mathrm{e}^{2x}+x$ 的通解.

解 这个方程的特点是右边仅为自变量的表达式,根据高阶导数的含义,本题求解只

需连续积分三次.

$$y''=\int(\mathrm{e}^{2x}+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

$$y'=\int\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}x^2+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{24}x^4+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3,$$

原方程的通解为

$$y=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{24}x^4+Cx^2+C_2x+C_3\left(C=\frac{C_1}{2}\right).$$

本题解法适用于所有形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的微分方程,只需连续积分 n 次即得通解.

例 5　求微分方程 $y''=\sin 2x$ 满足 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=0$ 的特解.

解　方程两边积分,得

$$y'=\int\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1.$$

将 $y'|_{x=0}=0$ 代入上式,得

$$C_1=\frac{1}{2}.$$

因此

$$y'=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}.$$

两边再积分,得

$$y=-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+C_2.$$

将 $y|_{x=0}=1$ 代入上式,得

$$C_2=1.$$

所求方程的特解为

$$y=-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+1.$$

练习题 1.1

1. 指出下列方程中哪些是微分方程,并说明它们的阶数.

(1) $y^2-\cos xy=1$;　　(2) $y^{(4)}=2x$;

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3xy^2=x^3$;　　(4) $(2x+y)\mathrm{d}x=x\mathrm{d}y$;

(5) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3\cos x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sin x=0$;　　(6) $y-4(y'')^3-xy'=0$.

2. 下列函数均是所给微分方程的解,判断是通解还是特解.

(1) $y'-y=0,y=C\mathrm{e}^x$;　　(2) $y''+4y=0,y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$;

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0, y=\sin x$;　　(4) $y''-2y'+y=0, y=C_1e^x-3C_2xe^x$.

3. 求下列微分方程的通解.

(1) $y''=\frac{1}{x}(x>0)$;　　(2) $y'''=x^2+\sin 2x$.

4. 求微分方程 $y''-e^{-x}=0$ 满足$y|_{x=0}=y'|_{x=0}=1$ 的特解.

§1.2　一阶可分离变量的微分方程

定义　形式为

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)(\text{或 } f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0)$$

的微分方程叫作一阶可分离变量的微分方程.

这类微分方程的特点是可以将两个不同变量的函数与其微分分离到方程的两边.

解法如下：

(1)分离变量：$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$;

(2)两边积分：$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$;

(3)求出积分，若$G(y)$为$\frac{1}{g(y)}$关于积分变量y的一个原函数，$F(x)$为$f(x)$关于积分变量x的一个原函数，即可得到微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$的通解为

$$G(y)=F(x)+C.$$

求解可分离变量微分方程的方法称为分离变量法.

例 1　求方程$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$的通解.

解　将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^y},$$

分离变量，得

$$e^ydy=e^xdx.$$

两边积分，得

$$\int e^ydy=\int e^xdx.$$

求出积分，得

$$e^y=e^x+C(C\text{为任意常数}).$$

例 2　解方程$(1+x^2)y'-xy=0$.

解　分离变量，得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

两边积分，得

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1.$$

进一步化简，得

$$|y|=\mathrm{e}^{C_1}\sqrt{1+x^2}.$$

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\sqrt{1+x^2}.$$

因 e^{C_1} 是不为零的实数，而 $y=0$ 也是该方程的解，
所以方程的通解为

$$y=C\sqrt{1+x^2}\ (C\text{为任意常数}).$$

说明　(1)在用分离变量法解可分离变量的微分方程的过程中，分离变量时需有 $g(y)\neq 0$，才可用它除方程两边，这样得到的通解，不包含使 $g(y)=0$ 的解. 这时需要扩大任意常数 C 的取值范围，使其失去的解仍包含在通解中.

(2)例 2 若采用以下解法，可直接得到结果，即
分离变量，得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

两边积分，此处做特别处理，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C.$$

化简，得

$$y=C\sqrt{1+x^2}\ (C\text{为任意常数}).$$

与例 2 有相同特点的微分方程比较常见，为了方便解题，我们特别约定：解微分方程求积分时，若原函数出现对数时可不加“|　|”号，同时对 C 做相应处理.

例 3　求微分方程 $(1+\mathrm{e}^x)y'=y\mathrm{e}^x$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

解　分离变量，得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$$

两边积分，得

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x),$$

$$\ln y=\ln(1+\mathrm{e}^x)+\ln C\ (\text{特别处理}),$$

所以

$$y=C(1+\mathrm{e}^x).$$

代入初始条件 $y|_{x=0}=1$，得

$$C=\frac{1}{2}.$$

所求特解为

$$y=\frac{1}{2}(1+e^{x}).$$

练习题 1.2

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$； (2) $y'\tan x-y=0$；

(3) $xy'-y\ln y=0$； (4) $(e^{x+y}-e^{x})dx+(e^{x+y}+e^{y})dy=0$.

2. 求微分方程 $2x\sin y dx+(x^2+3)\cos y dy=0$ 满足初值条件 $y|_{x=1}=\frac{\pi}{6}$ 的特解.

§1.3 一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程的定义

形如 $y'+p(x)y=Q(x)$ 的方程称为一阶线性微分方程. 其中 $p(x)$ 和 $Q(x)$ 都是 x 的连续函数，$Q(x)$ 称为自由项.

当 $Q(x)=0$ 时，方程 $y'+p(x)y=0$ 称为一阶线性齐次微分方程；

当 $Q(x)\neq 0$ 时，方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 称为一阶线性非齐次微分方程.

二、一阶线性微分方程的解法

1. 一阶线性齐次微分方程

观察方程 $y'+p(x)y=0$，它是一个可分离变量的微分方程. 用分离变量法求解，得

$$\int\frac{dy}{y}=\int-p(x)dx,$$

求得其通解为

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}\ (C\text{ 为任意常数}).$$

2. 一阶线性非齐次微分方程

方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 的解可用“常数变易法”求得，这种方法是将齐次微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的通解中的任意常数 C 换为 x 的函数 $C(x)$，再代入原方程，能够求出 $C(x)$，也就得到了非齐次微分方程的解.

设 $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$ 为方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 的解并代入方程，得

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}+C(x)e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x))+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=Q(x).$$

整理,得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=Q(x).$$

所以

$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

两边积分,得

$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C.$$

将此代入 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$,得到方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 的通解计算公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\ (C\text{ 为任意常数}).$$

例 1　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=3x$ 的通解.

解　首先确定 $p(x)=2x, Q(x)=3x$,
代入公式,得

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left(\int 3x\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-x^2}\left(\int 3x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2}+C\mathrm{e}^{-x^2}\\&=C\mathrm{e}^{-x^2}+\frac{3}{2}\ (C\text{ 为任意常数}).\end{aligned}$$

例 2　求方程 $y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

解　根据方程,首先确定 $p(x)=\cos x$, $Q(x)=\mathrm{e}^{-\sin x}$,

所以

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int\cos x\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{e}^{\int\cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-\sin x}\left(\int\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\sin x}(x+C).\end{aligned}$$

把 $y|_{x=0}=1$ 代入上式,得

$$C=1.$$

故满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解为

$$y=\mathrm{e}^{-\sin x}(x+1).$$

例 3　求经过原点,在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$ 的曲线方程.

解　设所求曲线方程为 $y=f(x)$,根据题意,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x+y.$$

这是一个一阶线性非齐次微分方程,根据方程,首先确定 $p(x)=-1$, $Q(x)=2x$.

所以

$$y=\mathrm{e}^{-\int -\mathrm{d}x}\left(\int 2x\mathrm{e}^{\int -\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$= e^x(-2xe^{-x}-2e^{-x}+C)$$
$$=-2x-2+Ce^x.$$

由于曲线通过点（0,0），解得

$$C=2.$$

所求曲线方程为

$$y=-2x-2+2e^x.$$

练习题 1.3

1. 求下列微分方程的通解.

（1）$y'-2y=6$；（2）$y'-\frac{2}{x}y=\frac{1}{2}x$；

（3）$y'-3xy=2x$；（4）$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

（1）$y'+5y=-4e^{-3x}$，$y|_{x=0}=-4$；（2）$y'-y\tan x=\sec x, y|_{x=0}=1$.

§1.4　二阶线性常系数齐次微分方程

一、二阶线性常系数齐次微分方程及其解的性质

定义 1　形如 $y''+py'+qy=0$ 的微分方程称为二阶线性常系数齐次微分方程(其中 p，q 是常数).

定义 2　设 y_1，y_2（$y_2\neq 0$）是定义在同一区间上的两个函数，当 $\frac{y_1}{y_2}=k$（k 为常数)时，称 y_1 与 y_2 线性相关；当 $\frac{y_1}{y_2}\neq k$（k 为常数)时，称 y_1 与 y_2 线性无关.

定理　（齐次线性微分方程解的结构）　如果 y_1 与 y_2 是方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关的特解，那么 $y=C_1y_1+C_2y_2$（C_1，C_2 为任意常数)就是方程的通解.

若 $y_1=e^{3x}$ 与 $y_2=e^{-x}$ 都是方程 $y''-2y'-3y=0$ 的解，则 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$ 为该方程的通解.

二、二阶线性常系数齐次微分方程的通解求法

求方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，关键在于求出方程的两个线性无关的特解 y_1 和 y_2. 分析 $y''+py'+qy=0$，其左端是 y''、py' 与 qy 三项之和，p，q 为常数，而右端为 0，因此，要使等式成立，y''，y' 与 y 必是相同形式的函数，显然指数函数 $y=e^{rx}$（r 为常数)符合要求，

只要选择适当的 r 值就可以了.

为此,将 $y=\mathrm{e}^{rx}$, $y'=r\mathrm{e}^{rx}$ 与 $y''=r^2\mathrm{e}^{rx}$ 同时代入方程 $y''+py'+qy=0$,得

$$\mathrm{e}^{rx}(r^2+pr+q)=0.$$

因为 $\mathrm{e}^{rx}\neq 0$,

所以
$$r^2+pr+q=0.$$

这是待定常数 r 需满足的条件. 称代数方程 $r^2+pr+q=0$ 为方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程. 特征方程的根称为特征根.

由于一个一元二次方程的根可能有三种情况,下面将根据特征根的不同情况,确定微分方程 $y''+py'+qy=0$ 三种不同形式的通解.

(1)特征方程有两个不相等的实根 $r_1\neq r_2$.

此时 $y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$, $y_2=\mathrm{e}^{r_2x}$ 是方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关特解,所以方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

(2)特征方程有两个相等的实根 $r_1=r_2=r$.

此时只能得到方程 $y''+py'+qy=0$ 的一个特解 $y_1=\mathrm{e}^{rx}$,还需要确定一个与 $y_1=\mathrm{e}^{rx}$ 线性无关的特解.

可证 $y_2=x\mathrm{e}^{rx}$ 是方程 $y''+py'+qy=0$ 的另一个特解,且与 $y_1=\mathrm{e}^{rx}$ 线性无关,所以方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}.$$

(3)特征方程有一对共轭的复根 $r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$, $r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$($\alpha,\beta$ 为实数,$\beta\neq 0$).

可以证明,$y_1=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ 是方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关特解,所以方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

综上所述,求二阶线性常系数齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解过程如下:

①写出特征方程 $r^2+pr+q=0$;

②求出特征根 r_1, r_2;

③按下表写出微分方程的通解:

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 $r_1\neq r_2$	$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2=r$	$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}$
一对共轭复根 $r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$, $r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$	$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 1　求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解　所给方程的特征方程为 $r^2-2r-3=0$,它有两个不相等的特征根 $r_1=-1$, $r_2=3$. 微分方程有两个线性无关的特解为 $y_1=\mathrm{e}^{-x}$ 与 $y_2=\mathrm{e}^{3x}$.

所以微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}.$$

例 2 求方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解.

解 所给方程的特征方程为 $r^2-4r+4=0$，它有两个相等的特征根 $r_1=r_2=2$，所以方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}.$$

例 3 求方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+5y=0$ 的通解.

解 所求方程的特征方程为 $r^2+2r+5=0$，它有共轭复根

$$r_1=-1+2i, r_2=-1-2i,$$

即

$$\alpha=-1, \beta=2.$$

对应的两个线性无关的解为

$$y_1=e^{-x}\cos 2x, \ y_2=e^{-x}\sin 2x,$$

所以方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

例 4 求方程 $y''-6y'+8y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 和 $y'|_{x=0}=0$ 的特解.

解 所求方程的特征方程为 $r^2-6r+8=0$，它有两个不相等的特征根 $r_1=2$，$r_2=4$，因此，方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}.$$

对 y 求导，得

$$y'=2C_1e^{2x}+4C_2e^{4x}.$$

将初始条件 $y|_{x=0}=1$ 和 $y'|_{x=0}=0$ 代入以上两式，得

$$C_1=2, \ C_2=-1.$$

所以方程的特解为

$$y=2e^{2x}-e^{4x}.$$

练习题 1.4

1. 下列函数组在其定义域内哪些是线性无关的？

(1) $x^3, \sqrt[3]{x}$；　　(2) $\ln(x^2+1)$, $\ln(x^2+1)^3$；

(3) $\sin 2x$, $\sin x\cos x$；　　(4) $e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x$.

2. 求下列二阶线性常系数齐次微分方程的通解.

(1) $y''-5y'-6y=0$；　　(2) $y''-3y'=0$；

(3) $y''+4y=0$；　　(4) $y''-6y'+9y=0$.

3. 求下列二阶线性常系数齐次微分方程的特解.

(1) $y''-y'-6y=0, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$；

(2) $y''+2y'+2y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=3$.

§1.5　二阶线性常系数非齐次微分方程

一、二阶线性常系数非齐次微分方程及其解的性质

定义　形如 $y''+py'+qy=f(x)(f(x)\neq 0)$ 的微分方程,称为二阶线性常系数非齐次微分方程. $f(x)$ 称为方程的自由项.

定理　**(线性非齐次微分方程解的结构)**　设 $\bar{y}$ 是二阶线性非齐次微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的一个特解,Y 是对应齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解,那么二阶线性非齐次微分方程 $y''+py'+qy=f(x)(f(x)\neq 0)$ 的通解是 $y=\bar{y}+Y$.

二、二阶线性常系数非齐次微分方程的通解求法

二阶线性常系数非齐次微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 对应的齐次方程的通解的求法在上节内容中已经讨论过,现在只需讨论如何求方程的一个特解就可以了.

对于这个问题,我们只对 $f(x)$ 取以下两种常见形式进行讨论.

1. $f(x)=p_n(x)e^{ax}$ (其中 $p_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式, a 为常数)

这时,方程成为

$$y''+py'+qy=p_n(x)e^{ax}.$$

方程的右端是一个 n 次多项式与 e^{ax} 的乘积,而多项式与指数式乘积的一阶导数、二阶导数仍为多项式与指数式的乘积形式,因此我们可以推测,方程 $y''+py'+qy=p_n(x)e^{ax}$ 的特解是某个多项式与指数式 e^{ax} 的乘积形式.

可以证明,当自由项为 $f(x)=p_n(x)e^{ax}$ 时二阶线性常系数非齐次方程具有形如

$$\bar{y}=x^kQ_n(x)e^{ax}$$

的特解,其中 $Q_n(x)$ 是一个与 $p_n(x)$ 有相同次数的多项式, k 是一个整数,满足:

(1)当 a 不是特征根时, $k=0$;

(2)当 a 是特征方程的单根时, $k=1$;

(3)当 a 是特征方程的重根时, $k=2$.

例 1　求方程 $y''+y=2x^2-3$ 的一个特解.

解　这里 $p_n(x)=2x^2-3$ 是一个二次多项式, $a=0$ 不是特征根,因此 $k=0$. 所以可设该方程的一个特解为

$$\bar{y}=Ax^2+Bx+C,$$

其中 A,B,C 为待定系数,为求得这三个系数,将 $\bar{y}$ 求导,得

$$\bar{y}'=2Ax+B,\ \bar{y}''=2A.$$

把它们代入原方程,得

$$2A+Ax^2+Bx+C=2x^2-3,$$

即

$$Ax^2+Bx+(2A+C)=2x^2-3.$$

上式应是一个恒等式，所以两边的同次项系数必须相等，

$$\begin{cases}A=2,\\B=0,\\2A+C=-3.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$A=2, B=0, C=-7.$$

于是所求方程的一个特解为

$$\bar{y}=2x^2-7.$$

例 2 求 $y''+5y'-6y=e^{2x}$ 的一个特解.

解 在这里 $p_n(x)=1$，$a=2$ 不是特征根，因此 $k=0$，所以可设该方程的特解为

$$\bar{y}=Ae^{2x},$$

其中 A 为待定常数，把它代入原方程，得

$$4Ae^{2x}+10Ae^{2x}-6Ae^{2x}=e^{2x}.$$

化简，得

$$8Ae^{2x}=e^{2x}.$$

比较两边系数，得

$$A=\frac{1}{8}.$$

故 $\bar{y}=\frac{1}{8}e^{2x}$ 是原方程的一个特解.

例 3 求方程 $y''-5y'+6y=-5e^{2x}$ 的通解.

解 该方程对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

自由项 $f(x)=-5e^{2x}$，其中 $p_n(x)=-5$，$a=2$ 是特征方程的单根，应取 $k=1$，所以可设原方程的特解为

$$\bar{y}=Axe^{2x}.$$

对 $\bar{y}$ 求导，得

$$\bar{y}'=(2Ax+A)e^{2x},$$

$$\bar{y}''=(4Ax+4A)e^{2x}.$$

代入原方程化简，得

$$A=5.$$

所以该方程的特解为

$$\bar{y}=5xe^{2x}.$$

于是所给方程的通解为

$$y=Y+\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+5xe^{2x}.$$

2. $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$（其中 α, ω, A, B 是常数，且 $\omega\neq 0$, A, B 不同时为零）

这时，方程为

$$y''+py'+qy=e^{\alpha x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x).$$

可以证明，自由项为 $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$ 时方程的特解形式为

$$\bar{y}=x^k e^{\alpha x}(C\cos\omega x+D\sin\omega x),$$

其中 C,D 是待定常数，k 是一个整数. k 的取值分别为：

(1)当 $\alpha\pm\omega\mathrm{i}$ 不是特征根时，$k=0$；

(2)当 $\alpha\pm\omega\mathrm{i}$ 是特征根时，$k=1$.

例 4　求方程 $y''+y=\sin x$ 的通解.

解　$f(x)=\sin x$ 为 $e^{\alpha x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$ 型的函数，且 $\alpha=0,\omega=1$，因为 $\alpha\pm\omega\mathrm{i}=\pm\mathrm{i}$ 是特征方程 $r^2+1=0$ 的根，取 $k=1$，
所以可设特解为

$$\bar{y}=x(C\cos x+D\sin x).$$

则对 $\bar{y}$ 求导，得

$$\bar{y}'=C\cos x+D\sin x+x(D\cos x-C\sin x),$$
$$\bar{y}''=2D\cos x-2C\sin x-x(C\cos x+D\sin x).$$

把 y'' 及 y 同时代入原方程，得

$$-2C\sin x+2D\cos x=\sin x.$$

比较两端 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的系数，得

$$C=-\frac{1}{2},D=0.$$

所以原方程的特解为

$$\bar{y}=-\frac{1}{2}x\cos x.$$

而对应齐次方程 $y''+y=0$ 的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

所以原方程的通解为

$$y=\bar{y}+Y=-\frac{1}{2}x\cos x+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

根据前面的讨论，我们将求二阶线性常系数非齐次微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 通解的步骤归纳如下：

第一步：求 $y''+py'+qy=0$ 的通解；

第二步：求 $y''+py'+qy=f(x)$ 的特解 $\bar{y}$，$\bar{y}$ 的形式见下表：

$f(x)$ 的形式	特解 $\bar{y}$ 的形式
$f(x)=p_n(x)e^{ax}$	$\bar{y}=x^kQ_n(x)e^{ax}$. 当 a 不是特征根时，$k=0$； 当 a 是特征根，但不是重根时，$k=1$； 当 a 是特征根，且为重根时，$k=2$
$f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$	$\bar{y}=x^k e^{\alpha x}(C\cos\omega x+D\sin\omega x)$. 当 $\alpha\pm\omega\mathrm{i}$ 不是特征根时，$k=0$； 当 $\alpha\pm\omega\mathrm{i}$ 是特征根时，$k=1$

第三步：写出 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解 $y=\bar{y}+Y$.

例 5 一艘质量为 M 的潜艇由水面开始下沉，下沉过程中所受水的阻力与下沉速度成正比，求潜艇下沉的深度随时间变化的函数关系.

解 设潜艇下沉的深度随时间变化的函数关系为 $h=h(t)$，由牛顿第二定律与导数物理意义

$$Mg-kh'=Mh'',\text{ 且 } h|_{t=0}=0,\ h'|_{t=0}=0.$$

微分方程 $Mg-kh'=Mh''$ 变形，得

$$h''+\frac{k}{M}h'=g.$$

这是一个二阶线性常系数非齐次微分方程，求其通解为

$$h=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{M}t}+\frac{Mg}{k}t.$$

将 $h|_{t=0}=0$，$h'|_{t=0}=0$ 代入，得

$$C_2=\frac{M^2g}{k^2},\ C_1=-\frac{M^2g}{k^2},$$

即潜艇下沉的深度随时间变化的函数关系为

$$h=\frac{M^2g}{k^2}(\mathrm{e}^{-\frac{k}{M}t}-1)+\frac{Mg}{k}t.$$

练习题 1.5

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y''-2y'=x+1$；　　(2) $y''+y'-2y=2\mathrm{e}^x$；

(3) $y''+4y=4\sin x$；　　(4) $y''-2y'-3y=3x+1$.

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1) $y''-y'-2y=x$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=0$；

(2) $y''-3y'+2y=5$，$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$.

基础训练

1. 判断题.

(1) $x^2(y')^2-2xy'-x=3$ 是二阶微分方程.　　(　　)

(2) n 阶微分方程的通解必含有 n 个独立的任意常数.　　(　　)

(3) $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}$ 为微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解.　　(　　)

(4) $y'=x+y$ 是可分离变量的微分方程.　　(　　)

(5) n 阶微分方程需 n 个初始条件才能确定特解.　　(　　)

2. 填空题.

(1) $(y'')^3-y^{(4)}+xy^2=3$ 是__________阶微分方程.

(2)以 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$ 为通解的二阶线性常系数齐次微分方程是____________.

(3)微分方程 $y''-4y'-5y=0$ 的特征根是____________.

(4)用待定系数法求微分方程 $y''+2y=2x^2-1$ 的一个特解时,应设特解的形式为 $\bar{y}=$ ____________.

(5)微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=2$,$y'|_{x=0}=0$ 的特解是____________.

3. 选择题.

(1)下列函数中,可以是微分方程 $y''+y=0$ 解的函数是(　　).

A. $y=\cos x$　　B. $y=x$　　C. $y=\sin 2x$　　D. $y=\mathrm{e}^{x}$

(2)微分方程 $y''-x(y')^3-y^4=0$ 的通解中应含有独立的任意常数的个数为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

(3)下列函数中线性无关的是(　　).

A. $x^2,\dfrac{2}{3}x^2$　　B. $1,\sin^2 x+\cos^2 x$

C. $1+\cos x,\cos^2\dfrac{x}{2}$　　D. $\mathrm{e}^{x},\mathrm{e}^{-2x}$

(4)下列方程中,其通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 的是(　　).

A. $y''-y'=0$　　B. $y''+y'=0$　　C. $y''-y=0$　　D. $y''+y=0$

(5)用待定系数法求微分方程 $y''+2y'+3y=x^2-1$ 的一个特解时,应设特解的形式为(　　).

A. ax^2　　B. ax^2+bx+c

C. $x(ax^2+bx+c)$　　D. $x^2(ax^2+bx+c)$

(6)用待定系数法求微分方程 $y''-2y'+y=\cos x$ 的一个特解时,应设特解的形式为(　　).

A. $a\cos x$　　B. $b\sin x$

C. $a\cos x+b\sin x$　　D. $x(a\cos x+b\sin x)$

(7)方程 $y'=y\tan x+\sec x$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解是(　　).

A. $y=\dfrac{1}{\cos x}(x+C)$　　B. $y=\dfrac{x}{\cos x}$

C. $y=\dfrac{x}{\sin x}$　　D. $y=\dfrac{1}{\cos x}(x+2)$

4. 求下列微分方程的通解.

(1) $y''=x+\mathrm{e}^{2x}$;　　(2) $y''=\cos x$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{xy}{1+x^2}$;　　(4) $y'+y=x$;

(5) $y''+2y'-8y=0$;　　(6) $y''-2y'+y=2x^2+1$;

(7) $y''-2y'=\cos x$.

5. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1) $\cos y\sin x\mathrm{d}y-\cos x\sin y\mathrm{d}x=0,y|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{6}$;

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cot x=5\mathrm{e}^{\cos x},y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$;

(3) $y''-5y'-6y=0,y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=2$.

6. 应用题.

(1)一曲线过点(2,3),且曲线上任意一点的切线介于两坐标轴之间的部分恰为切点所平分,求此曲线的方程.

(2)设室温为20 ℃,一物体加热到100 ℃,在 10 min 内冷却到60 ℃,问:此物体从100 ℃降到25 ℃需要经过多少时间?(物体冷却遵循牛顿冷却定律,即物体在空气中冷却的速度与物体温度和空气温度之差成正比)

(3)一端系着质量为 m 的小球的悬挂弹簧(劲度系数为 k),平衡状态时弹簧伸长 a,如果将小球向下拉伸 b 的距离,然后放开在平衡位置上下自由振荡,试讨论小球的运动规律 $x=x(t)$.

数学实训一

应用 MATLAB 进行常微分方程符号求解

函数调用格式:dsolve('equation1,equation2,……','condition1,condition2,……','v')

其中 equation 代表常微分方程,且需以 Dy 代表一阶微分项 y',D2y 代表二阶微分项 y'',Dny 代表 n 阶微分项. condition 为初始条件. v 为指定的符号自变量,系统默认自变量为 t.

实验举例

实验一　求微分方程 $y'''=\mathrm{e}^{2x}+x$ 的通解.(课本§1.1 例 4)

操作命令

```
>>dsolve('D3y=exp(2*x)+x','x')
ans =
  C3+exp(2*x)/8+C2*x+(C1*x^2)/2+x^4/24
```

实验二　求微分方程 $(1+\mathrm{e}^{x})y'=y\,\mathrm{e}^{x}$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.(课本§1.2 例 3)

操作命令

```
>>dsolve('Dy*(1+exp(x))=y*exp(x)','y(0)=1','x')
ans =
  exp(x)/2 + 1/2
```

实验三　求方程 $y''-6y'+8y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 和 $y'|_{x=0}=0$ 的特解.（课本§1.4例4）

操作命令

```
>>clear all
>>dsolve('D2y-6*Dy+8*y=0','y(0)=1,Dy(0)=0','x')
ans =
  2*exp(2*x) - exp(4*x)
```

实验四　求方程 $y''-5y'+6y=-5e^{2x}$ 的通解.（课本§1.5例3）

操作命令

```
>>clear all
>>dsolve('D2y-5*Dy+6*y=-5*exp(2*x)','x')
ans =
  5*x*exp(2*x) + C2*exp(3*x) + C1*exp(2*x)
```

实验五　求解微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x.\end{cases}$

操作命令

```
>>clear all
>>[x,y]=dsolve('Dx=y,Dy=-x')
x =
  C2*cos(x) + C1*sin(x)
y =
  C1*cos(x) - C2*sin(x)
```