



中等职业学校公共基础课改革创新教材

数
学

(基础模块)

学生用书
第一册

主
编
金桂堂

数 学

SHUXUE

(基础模块)

学生用书 | 第一册

主 编 金桂堂

北京出版集团公司
北京出版社

北京出版集团公司
北 京 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学：基础模块：第1册 / 金桂堂主编. — 北京：
北京出版社，2015.4 (2022 重印)
ISBN 978-7-200-11333-4

I. ①数… II. ①金… III. ①数学课—中等专业学校
—教材 IV. ① G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 099360 号

数学（基础模块）第一册

SHUXUE JICHU MOKUAI DIYICE

主 编：金桂堂

出 版：北京出版集团公司

北 京 出 版 社

地 址：北京北三环中路 6 号

邮 编：100120

网 址：www.bph.com.cn

总发行：北京出版集团公司

经 销：新华书店

印 刷：定州市新华印刷有限公司

版 次：2015 年 4 月第 1 版 2022 年 1 月修订 2022 年 1 月第 8 次印刷

开 本：787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张：15.5

字 数：272 千字

书 号：ISBN 978-7-200-11333-4

定 价：32.00 元

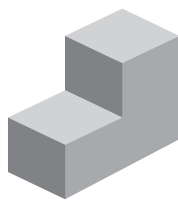
质量监督电话：010-82685218 010-58572162 010-58572393

目 录

第一章 集合	/1
1.1 集合的概念	/3
1.1.1 集合与元素	/3
1.1.2 集合的表示方法	/7
1.1.3 集合间的关系	/10
1.2 集合的运算	/15
1.2.1 交集	/15
1.2.2 并集	/18
1.2.3 全集与补集	/20
1.3 充要条件	/24
第二章 不等式	/35
2.1 不等式的性质	/37
2.2 区间的概念	/43
2.3 不等式的解法	/48
2.3.1 一元一次不等式组的解法	/48
2.3.2 一元二次不等式的解法	/51
2.3.3 含绝对值的不等式的解法	/57
第三章 函数	/66
3.1 函数的概念	/68
3.1.1 函数的概念	/68
3.1.2 函数的三种表示方法	/74
3.1.3 利用几何图板画函数图像	/78

3.2	函数的简单性质	/83
3.2.1	函数的单调性	/83
3.2.2	函数的奇偶性	/87
3.2.3	二次函数性质再研究	/95
3.3	函数的实际应用举例	/102
第四章	指数函数与对数函数	/112
4.1	幂函数	/114
4.1.1	有理数指数幂	/114
4.1.2	实数指数幂及运算法则	/122
4.1.3	幂函数	/124
4.2	指数函数	/128
4.2.1	指数函数的概念、图像和性质	/128
4.2.2	指数函数的简单应用	/134
4.3	对数的概念和运算	/138
4.3.1	对数的概念	/138
4.3.2	利用计算器求对数值	/140
4.3.3	积、商、幂的对数	/146
4.4	对数函数	/150
4.4.1	对数函数的概念、图像和性质	/150
4.4.2	对数函数的简单应用	/156
第五章	三角函数	/165
5.1	角的概念的推广	/167
5.1.1	任意角的概念	/167
5.1.2	终边相同的角	/170
5.2	弧度制	/176
5.2.1	弧度制	/176
5.2.2	弧长计算公式	/180
5.3	任意角的三角函数	/184
5.3.1	任意角的正弦、余弦、正切函数	/184

5.3.2	三角函数在各象限的符号	/187
5.3.3	求三角函数值	/190
5.4	三角函数的基本公式	/196
5.4.1	同角三角函数的基本关系	/196
5.4.2	诱导公式	/201
5.5	正弦函数、余弦函数的图像和性质	/210
5.5.1	正弦函数的图像和性质	/210
5.5.2	余弦函数的图像和性质	/216
5.5.3	已知三角函数值, 求指定区间内的角	/221
附录: 本教材(第一册)使用的部分数学符号		/234



第一章 集合

1.1 集合的概念

1.1.1 集合与元素

1.1.2 集合的表示方法

1.1.3 集合间的关系

1.2 集合的运算

1.2.1 交集

1.2.2 并集

1.2.3 全集与补集

1.3 充要条件

集合论是数学思想最惊人的产物，在纯粹理性的范畴中人类活动最美的表现之一。

——希尔伯特 (Hilbert, 1862—1943)

(德国数学家)

我的理论有如磐石一般坚固，任何反对它的人到头来都是搬起石头砸自己的脚……因为多年来，我从各方面对它进行了考察，并对所有反对意见做了分析。更重要的是，我已追溯到这一理论最终无可怀疑的根源。

——康托尔 (Cantor, 1845—1918)

(德国数学家)

在上课间操时，听到老师发出集合的口令，旅游专业、园林专业、金融专业等各专业的同学就会迅速整齐地按纵队站好。旅游专业的同学按纵队站在一起，园林专业的同学集中在一起，金融专业的同学集中在一起……都可看作“一些确定的对象汇集在一起”。这就是本章所要学习的“集合”。

人们在工作、生产、学习与日常生活中，经常会遇到“集合”的有关问题。它是近现代数学的基础之一，也是研究自然科学和应用科学不可或缺的工具。

本章主要学习集合与充要条件的初步知识以及这些知识所蕴含的数学思想和方法，培养运用数学语言去理解和处理问题的能力，为今后进一步学好数学打下坚实基础。

1.1 集合的概念

1.1.1 集合与元素

请同学们从以下几方面进行自我介绍：

- (1) 你的家庭. 如：我家有爸爸、妈妈和我.
- (2) 你喜欢哪些学科？如：我喜欢音乐、美术和体育.
- (3) 你现在所在班级的基本情况. 如：我是商贸一班的学生，我班有男生 16 人，女生 20 人.

像“家庭”“学科”“班级”“男生”“女生”等都可以看作一定的对象构成的整体.

一般地，由某些确定的对象组成的整体构成一个**集合**（简称**集**）. 集合中的每一个对象叫作这个集合的**元素**.

【例如】

- (1) “世界四大洋”构成一个集合，该集合的元素就是太平洋、大西洋、印度洋和北冰洋；
- (2) “方程 $x^2 - 4x - 5 = 0$ 的实数根”构成一个集合，该集合的元素就是 5 和 -1；
- (3) “奥运会会旗上五环的颜色”构成一个集合，该集合的元素就是红、蓝、黄、绿和黑；
- (4) “10 以内的正奇数”构成一个集合，该集合的元素就是 1, 3, 5, 7, 9；
- (5) “不等式 $x - 4 > 0$ 的实数解”构成一个集合，每个大于 4 的实数都是这个集合的元素；
- (6) “坐标平面内的点”构成一个集合，该集合的元素就是坐标平面内任意一个点 (x, y) .

集合中的元素具有下列特点：

(1) 确定性

一个给定的集合，集合中的元素必须是确定的. 也就是说，对于任何一个元素，或者属于这个集合，或者不属于这

数学史料



德国数学家康托尔 (Cantor, 1845—1918)，集合论的创始人。1874 年，他在《数学杂志》上发表了关于集合论的第一篇论文，提出了“无穷集合”这个数学概念，引起了数学上的一场革命。数学史上一般认为这篇文章的发表标志着集合论的诞生。其此后发表的一系列论著进一步阐明了他的集合论思想，主要著作有《一般集合论基础》《无穷集合论文集》。

集合是现代数学的基本语言，它不仅可以简洁准确地表达客观世界中数学对象的特征，从而揭示其内部联系与区别，而且在以后的学习中有着极为广泛的应用。

个集合, 两者必居其一.

【例如】

①2 是偶数集中的元素;

②我国直辖市有: 北京、天津、上海、重庆. 如果所有的直辖市构成一个集合, 西安就不是这个集合中的元素;

③“漂亮的人”不能构成集合. 因为没有给出“漂亮”的具体标准.

(2) 互异性

一个给定的集合中的元素是互不相同的. 也就是说, 集合中的元素是不能重复出现的.

【例如】

“英文单词 book 中的字母”组成的集合, 元素只有 b, o, k 这 3 个字母.

(3) 无序性

集合中的元素是没有排列顺序的.



练一练

1. 判断下列各题中每组对象能否组成集合, 并说明理由.

- (1) 不等式 $x > 2$ 的所有解;
- (2) 接近零的实数;
- (3) 直线 $y = 3x$ 上所有的点;
- (4) 所有的正方形.

2. 说出下面集合中的元素.

- (1) “我国古代的四大发明”;
- (2) “绝对值等于 4 的数”;
- (3) “平方等于 25 的数”;
- (4) “方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的实根”.

集合通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示.

由数组成的集合叫作**数集**, 由点组成的集合叫作**点集**.

集合语言具有简洁性和准确性的特点.

数学中一些常用的数集及其记法

所有自然数组成的集合称为自然数集，记作 $\mathbf{N}$ ；

所有正数组成的集合称为正数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ ；

所有整数组成的集合称为整数集，记作 $\mathbf{Z}$ ；

所有有理数组成的集合称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$ ；

所有实数组成的集合称为实数集，记作 $\mathbf{R}$ 。

元素通常用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示。

如果 a 是集合 A 中的元素，就说元素 a 属于集合 A ，记作 $a \in A$ ；

如果 a 不是集合 A 中的元素，就说元素 a 不属于集合 A ，记作 $a \notin A$ 。

例题1 用符号 ($\in$ 或 $\notin$) 填空。

(1) 0 _____ $\mathbf{N}$ ；

(2) -3 _____ $\mathbf{Z}$ ；

(3) $\sqrt{7}$ _____ $\mathbf{Q}$ ；

(4) $\frac{1}{4}$ _____ $\mathbf{R}$ 。

【解】 (1) 因为 0 是自然数， $\mathbf{N}$ 是自然数集，所以 $0 \in \mathbf{N}$ ；

(2) 因为 -3 是整数， $\mathbf{Z}$ 是整数集，所以 $-3 \in \mathbf{Z}$ ；

(3) 因为 $\sqrt{7}$ 是无理数， $\mathbf{Q}$ 是有理数集，所以 $\sqrt{7} \notin \mathbf{Q}$ ；

(4) 因为 $\frac{1}{4}$ 是实数， $\mathbf{R}$ 是实数集，所以 $\frac{1}{4} \in \mathbf{R}$ 。

例题2 判断下列关系是否正确，并说明理由。

(1) $\pi \notin \mathbf{Q}$ ； (2) $\sqrt{4} \notin \mathbf{Z}$ 。

【解】 (1) 正确。因为 π 是无理数，而 $\mathbf{Q}$ 是有理数集，所以 $\pi \notin \mathbf{Q}$ 。

(2) 错误。因为 $\sqrt{4} = 2$ ， 2 是整数，而 $\mathbf{Z}$ 是整数集，所以 $\sqrt{4} \in \mathbf{Z}$ 。

知识链接

$1, 2, 3, \dots$ 这样的数称为正整数；

0 和正整数统称为自然数；

正整数、 0 、负整数统称为整数；

整数中能被 2 整除的数称为偶数；

整数中不能被 2 整除的数称为奇数；

整数和分数统称为有理数；

无理数和有理数统称为实数。

含有有限多个元素的集合叫作**有限集**. 例如,“平方后等于 1 的实数”组成的集合就是有限集,它有两个元素分别是 1 和 -1.

含有无限多个元素的集合叫作**无限集**. 例如,“大于 1 的所有实数”组成的集合是无限集.

规定:不含任何元素的集合叫作**空集**,记作 $\emptyset$. 例如,在实数范围内,方程 $x^2 + 1 = 0$ 的解集为 $\emptyset$.



练一练

判断下列各题是否正确,并说明理由.

- (1) 小于 1 的正有理数构成的集合是有限集;
- (2) 若由方程 $x^2 = x$ 的解构成的集合是 A ,则 $0 \in A$;
- (3) $3.141\ 592\ 6 \notin \mathbf{Q}$;
- (4) 若由方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 的解构成的集合是 A ,则 $1 \in A$.



练习 1.1.1

1. (口答) 判断下列各组事物是否构成集合.

- (1) 小于 8 的自然数;
- (2) 好学生;
- (3) 比较大的数;
- (4) 著名的歌唱家.

2. 写出下列所给集合中的所有元素.

- (1) 方程 $x - 1 = 5$ 的解组成的集合;
- (2) 大于 -3 且小于 7 的偶数组成的集合;
- (3) 9 的平方根组成的集合;
- (4) 9 的算术平方根组成的集合.

3. 用适当的符号($\in$ 或 $\notin$)填空.

0 ____ $\mathbf{N}$	2 ____ $\mathbf{N}$	-5 ____ $\mathbf{N}$	$\frac{1}{3}$ ____ $\mathbf{N}$	$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{N}$
0 ____ $\mathbf{Z}$	2 ____ $\mathbf{Z}$	-5 ____ $\mathbf{Z}$	$\frac{1}{3}$ ____ $\mathbf{Z}$	$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{Z}$
0 ____ $\mathbf{Q}$	2 ____ $\mathbf{Q}$	-5 ____ $\mathbf{Q}$	$\frac{1}{3}$ ____ $\mathbf{Q}$	$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{Q}$
0 ____ $\mathbf{R}$	2 ____ $\mathbf{R}$	-5 ____ $\mathbf{R}$	$\frac{1}{3}$ ____ $\mathbf{R}$	$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{R}$



试一试

1. 宋代理学家邵康诗云：

一去二三里，烟村四五家，
亭台六七座，八九十枝花。

若由诗中的数字构成集合，请说出集合中的元素。



图 1-1

2. 比一比：寻找你认识的由最多不同英文字母构成的单词。如果此单词的字母构成一个集合，写出集合中的元素。

1.1.2 集合的表示方法

集合的表示方法通常有两种：列举法和描述法。

1. 列举法

把集合的元素一一列举出来，写在大括号“{ }”内表示集合的方法叫作**列举法**。用这种方法表示集合，元素之间要用逗号隔开，但列举时与元素的排列次序无关。

【例如】

“四大文明古国”组成的集合，可表示为{中国，古印度，古埃及，古巴比伦}。

注意：当一个集合中的元素较多，且不便一一列举出时，可以只写出几个元素，其他元素用省略号“…”表示，前提是能根据所写出的元素正确得到其余元素。

【例如】

小于 1 000 的所有自然数组成的集合, 可表示为 $\{0, 1, 2, \dots, 999\}$;

所有偶数组成的集合, 可表示为 $\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$.

例题1 用列举法表示下列集合:

- (1) 方程 $x-1=0$ 的解集;
- (2) 方程 $x^2-2x-3=0$ 的解集;
- (3) “10 以内的所有质数”组成的集合.

【解】 (1) 因为方程 $x-1=0$ 的解是 $x=1$,
所以方程 $x-1=0$ 的解集是 $\{1\}$;

(2) 因为方程 $x^2-2x-3=0$ 的解是
 $x_1=-1, x_2=3$,

所以方程 $x^2-2x-3=0$ 的解集是
 $\{-1, 3\}$;

(3) 10 以内的质数有 2, 3, 5, 7,
所以“10 以内的所有质数”组成的集合可以表示为
 $\{2, 3, 5, 7\}$.

注意: 我们通常把只含有一个元素的集合称为**单元素集**.

例如: 例题 1 (1) “方程 $x-1=0$ 的解集”就是单元素集.

知识链接

一个大于 1 的整数, 如果它的正因数只有 1 和它本身, 则称这个整数为**质数**, 否则称为**合数**.

0 表示一个元素.
{0} 表示一个集合, 只有一个元素 0.
 $\emptyset$ 表示一个集合, 没有任何元素.

**练一练**

1. 判断题:

由“banana”中不同字母组成的集合可写成 $\{a, b, n\}$.

2. 用列举法表示正整数集、自然数集、整数集. 能用列举法表示有理数集和实数集吗?

2. 描述法

把集合中所有元素具有的共同性质(满足的条件)描述出来, 写在大括号“ $\{ \}$ ”内表示集合的方法, 叫作**描述法**. 一般形式是 $\{x \mid P(x)\}$, 大括号内竖线左边为集合中元素的代表符号, 竖线右边为集合中元素的共同性质.

若一个集合中的元素都是在实数范围内, $x \in \mathbf{R}$ 可省略不写.

【例如】

方程 $x^2+x-4=0$ 的解集可以表示为

$$\{x \mid x^2+x-4=0, \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\} \text{ 或 } \{x \mid x^2+x-4=0\}.$$

不等式 $x-3>0$ 的解集可以表示为

$$\{x \mid x-3>0\} \text{ 或 } \{x \mid x>3\}.$$

例题2 用描述法表示下列集合：

- (1) 所有正偶数组成的集合；
- (2) 小于8的所有有理数组成的集合；
- (3) 正比例函数 $y=x$ 图像上所有点 (x, y) 组成的集合.

【解】 (1) 正偶数有 2, 4, 6, 8, $\dots$, 观察这些数, 它们可以写成 $2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4, \dots$, 其中第 n 个偶数可以写成 $x=2n$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$,

因此, 所有正偶数组成的集合用描述法表示为

$$\{x \mid x=2n, \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^*\};$$

(2) 小于8的所有有理数组成的集合用描述法表示为

$$\{x \mid x<8, \text{ 且 } x \in \mathbf{Q}\};$$

(3) 正比例函数 $y=x$ 图像上所有点 (x, y) 组成的集合用描述法表示为 $\{(x, y) \mid y=x\}$.

只有 $x \in \mathbf{R}$
可省略不写,
而 $x \in \mathbf{Q}$ 不能
省略不写.



练一练

用描述法写出不等式 $2x-3>1$ 的解集.



练习 1.1.2

1. 用列举法表示下列集合：

- (1) 方程 $x+3=0$ 的解集是_____；
- (2) 平方后等于4的所有实数组成的集合是_____；
- (3) 方程 $x^2-2x-8=0$ 的解集是_____.

2. 用描述法表示下列集合：

- (1) 不等式 $2x-1>0$ 的解集是_____；
- (2) 一次函数 $y=x-1$ 图像上所有点 (x, y) 组成的集合是_____.

3. 分别用列举法和描述法表示方程 $x^2-5x+6=0$ 的解集.

4. 用适当的方法表示“大于2且小于5的所有实数”组成的集合A.



试一试

1. 调查班中每个同学出生的月份，写出与你的生日月份相同的所有同学的集合.
2. 清代诗人陈秋舫写过一首以“题秋江独钓图”为题的“一”字诗：

一帆一桨一扁舟，一个渔翁一钓钩，

一俯一仰一场笑，一江明月一江秋.

若由诗中的所有名词构成集合 A ，请用适当的方法表示集合 A .



图 1-2

1.1.3 集合间的关系

观察下面几个实例，集合 A 与 B 有什么关系吗？

(1) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$;

(2) 计算机专业一(1)班的全体同学组成集合 B ，班中所有女生组成集合 A .

可以看出：在(1)(2)中，集合 A 中的任何一个元素都是 B 的元素.

1. 子集

一般地，对于两个集合 A 与 B ，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，则把集合 A 叫作集合 B 的**子集**.

记作

$A \subseteq B$ (读作“集合 A 包含于集合 B ”)

或

$B \supseteq A$ (读作“集合 B 包含集合 A ”).

在数学中,我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合,这种图称为 **Venn 图**. 如图 1-3,直观地表示了实例中集合 A 与集合 B 的包含关系.

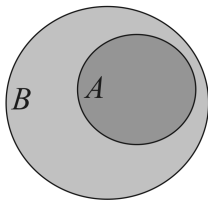


图 1-3

由集合的定义可知,任意一个集合都是它本身的子集,即 $A \subseteq A$.

规定:空集是任意集合的子集.即对于任意一个集合 A ,都有 $\emptyset \subseteq A$.

如果集合 A 不是集合 B 的子集,记作

$A \not\subseteq B$ (读作“集合 A 不包含于集合 B ”)

或 $B \not\supseteq A$ (读作“集合 B 不包含集合 A ”).

例如,集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{4, 5\}$, 则

$A \not\subseteq B$.

2. 真子集

如果 $A \subseteq B$, 且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A , 则集合 A 叫作集合 B 的**真子集**. 记作

$A \subsetneq B$ (读作“集合 A 真包含于集合 B ”)

或 $B \supsetneq A$ (读作“集合 B 真包含集合 A ”).

显然,空集是任何非空集合的真子集.即对于任意一个非空集合 A , 都有 $\emptyset \subsetneq A$.

例题1 用符号 ($\subsetneq$ 或 $\supsetneq$) 填空.

(1) $\{1, 2\}$ _____ $\{1, 2, 3\}$;

(2) $\{x \mid x^2 - 4 = 0\}$ _____ $\{2\}$;

(3) $\mathbf{N}$ _____ $\mathbf{Z}$.

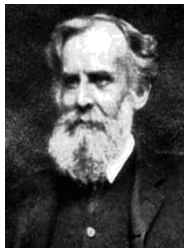
【解】 (1) $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$;

(2) 因为集合 $\{x \mid x^2 - 4 = 0\}$ 用列举法可表示为 $\{-2, 2\}$, 而 $\{-2, 2\} \supsetneq \{2\}$, 所以 $\{x \mid x^2 - 4 = 0\} \supsetneq \{2\}$;

(3) 因为所有自然数都是整数, 所以 $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z}$.

例题2 写出集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 的所有子集, 并指出其中的真子集.

数学史料



英国数学家维恩 (Venn, 1834—1923) 在概率论和逻辑学方面有所贡献, 最主要的成就是系统解释并发展了几何表示的方法. 他作出一系列简单闭曲线, 将平面分为许多间隔, 利用这种图, 维恩阐明了演绎推理的基本原理. 这种逻辑图称作“Venn 图”. 其实用图形表示集合的这种方法 是欧拉首创的, 所以维恩图亦称欧拉图.

【解】 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 的子集有

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$,

其中除了 $\{1, 2, 3\}$ 外, 其余 7 个集合都是 A 的真子集.



练一练

1. 填空:

(1) 如果 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq C$, 则 A _____ C ;

(2) $\{1\}$ _____ $\{x \mid x^2 = x\}$.

2. 写出集合 $A = \{a, b\}$ 的所有子集, 并指出其中的真子集.

3. 集合相等

设集合 $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{-1, 1\}$, 由于方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解是 $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, 可以看出集合 A 与集合 B 中元素完全相同, 只是表示方法不同.

对于两个集合 A 与 B , 若集合 A 与集合 B 的元素相同, 就称集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$.

一般地, 对于集合 A 与 B , 若有 $A \subseteq B$, 且 $A \supseteq B$, 则 $A = B$.



练一练

判断下列各题是否正确, 并说明理由.

(1) $0 \subseteq \{0\}$;

(2) $\emptyset \in \{0\}$;

(3) $\{(1, 2)\} = \{1, 2\}$.



练习 1.1.3

1. 用适当的符号 ($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $=$, $\supseteq$) 填空.

(1) a _____ $\{a, c, d\}$;

(2) $\{a\}$ _____ $\{a, b\}$;

(3) $\{1, 2\}$ _____ $\{2, 1\}$;

(4) 0 _____ $\emptyset$;

(5) $\{0, -1\}$ _____ $\mathbf{Z}$;

(6) $\{1, 2\}$ _____ $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

2. 写出一年中的四季组成的集合 A 的所有真子集.

3. 用适当的符号把数集 $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 连起来.



试一试

清朝乾隆皇帝爱吟诗作对, 附庸风雅. 在乾隆五十年 (1785 年) 举行的“千叟宴”有 3 900 多位老人参加. 乾隆皇帝非常高兴, 即兴出一上联:

花甲重开, 外加三七岁月.

此上联中暗指最老的一位老人的年龄, 极难对出下联. 只见大学士纪晓岚对道:

古稀双至, 内多一个春秋.

纪晓岚所对的下联也暗指出了此老人的年龄, 真是对绝了, 不愧是才子.

若上、下联所指的年龄各构成一个集合, 这两个集合的元素分别是什么? 并说出这两个集合的关系.

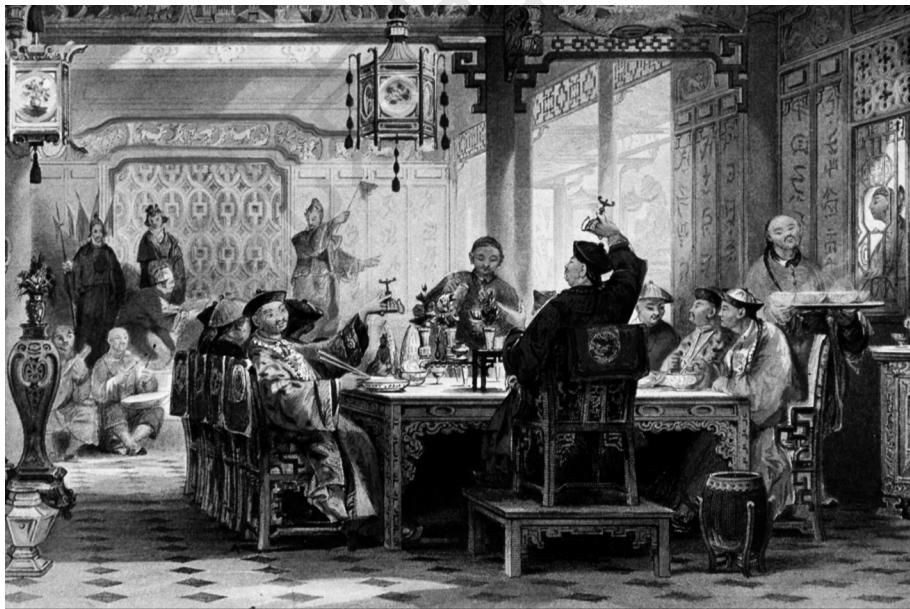


图 1-4



习题 1.1

A 组

1. 用适当的符号($\in$ 或 $\notin$)填空.

(1) 若“大于2且小于8的整数”组成集合 B , 则 0.5 _____ B .

(2) “所有直角三角形”构成集合 M , 若 $\triangle ABC$ 三边长分别为13, 12, 5, 则 $\triangle ABC$ _____ M .

(3) 若 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$, 则 2 _____ A .

(4) 若欧洲所有国家组成集合 B , 则英国 _____ B .

2. 用适当的方法表示下列集合:

(1) 方程 $x^2 - 9 = 0$ 的解集;

(2) 所有奇数组成的集合;

(3) 绝对值小于2的所有实数组成的集合;

(4) 与4相差5的数组成的集合;

(5) 直线 $y = 2x - 3$ 上的点所构成的集合.

B 组

1. 用适当的符号($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\subsetneq$, $\supseteq$, $\supsetneq$ 等)填空.

(1) $\{x \mid x^2 - 2 = 0\}$ _____ $\emptyset$;

(2) $\{x \mid x^2 + 2 = 0\}$ _____ $\emptyset$;

(3) $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$ _____ $\{x \mid x = n, n \in \mathbf{Z}\}$;

(4) $\emptyset$ _____ A .

2. 用1、2、3这三个数字组成没有重复数字的两位数构成集合, 该集合中元素有_____.

3. 设集合 $A = \{x \mid (x-3)(x+1) = 0\}$, 集合 $B = \left\{x \mid \frac{x-3}{x+1} = 0\right\}$, 则 A _____ B .

4. 已知 $A = \{2, x\}$, $B = \{2x, 2\}$, 且 $A = B$, 求 x 的值.

1.2 集合的运算

1.2.1 交集

观察下面几个实例，集合 C 与 A, B 有什么关系吗？

- (1) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{2\}$;
- (2) $A = \{\text{苹果, 香蕉, 橘子, 梨}\}$, $B = \{\text{苹果, 葡萄, 梨}\}$, $C = \{\text{苹果, 梨}\}$;
- (3) $A = \{x \mid x \text{ 是龙华职专 14 级学生}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是龙华职专金融专业的学生}\}$, $C = \{x \mid x \text{ 是龙华职专 14 级金融专业的学生}\}$.

可以看出：

(1) 中集合 C 是由集合 A 与 B 的公共元素“2”组成的集合 (图 1-5)；

(2) 中集合 C 是由集合 A 与 B 的公共元素“苹果和梨”组成的集合；

(3) 中集合 C 是由集合 A 与 B 的公共元素“龙华职专 14 级且金融专业的学生”组成的集合。

对于这样组成的集合，给出下面的定义。

一般地，对于两个集合 A 与 B ，由既属于 A 且又属于 B 的所有公共元素组成的集合，叫作 A 与 B 的交集，记作

$A \cap B$ (读作“ A 交 B)”。

用描述法表示为

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \in B\}.$$

如 Venn 图 1-6 中阴影部分表示为 $A \cap B$ 。

例题1 已知集合 A, B ，求 $A \cap B$ 。

- (1) $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$;
- (2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4\}$;
- (3) $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 0\}$;
- (4) $A = \{0\}$, $B = \emptyset$.

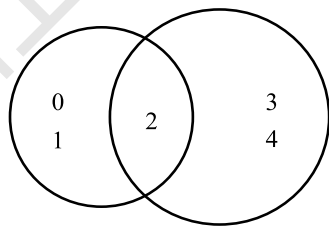


图 1-5

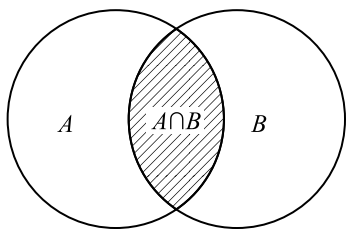


图 1-6

【解】(1) $A \cap B = \{a, b\} \cap \{a, c, d\} = \{a\}$;

(2) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4\} = \{3, 4\}$;

(3) $A \cap B = \{0, 1\} \cap \{1, 0\} = A$ (或 B);

(4) 因为 $A = \{0\}$ 是单元素集, $\emptyset$ 是不含任何元素的空集, 所以它们的交集是不含任何元素的空集, 即 $A \cap B = \emptyset$.

由交集的定义容易知道, 对于任意集合 A 与 B , 有

$$A \cap A = A;$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

当 $A \subseteq B$ 时, 有 $A \cap B = A$ (图 1-7).

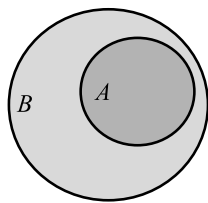


图 1-7

例题2 设 $A = \{x \mid x > -2\}$, $B = \{x \mid x \leq 3\}$, 求 $A \cap B$.

【解】如图 1-8 所示, 阴影部分表示 $A \cap B$.

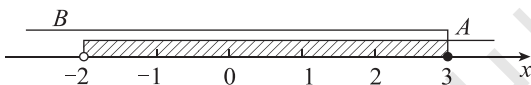


图 1-8

$$\begin{aligned} \text{即 } A \cap B &= \{x \mid x > -2\} \cap \{x \mid x \leq 3\} \\ &= \{x \mid -2 < x \leq 3\}. \end{aligned}$$



练一练

1. 填空:

(1) $\{1, 3, 4, 5\} \cap \{2, 3\} = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) $\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 $A = \{x \mid -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x \mid x < 2\}$, 求 $A \cap B$.

例题3 设集合 $A = \{(x, y) \mid y = x - 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y - 2 = 0\}$, 求 $A \cap B$.

【解】因为集合 A 、 B 分别表示两个二元一次方程 $y = x - 1$, $x + y - 2 = 0$ 的解集, 所以集合 A 与 B 的交集中的元

知识链接

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫作**数轴**.

在数轴上表示不等式的解集时, 要确定边界和方向.

- (1) 边界: 有等号的用实心点, 无等号的用空心点.
- (2) 方向: 大于向右, 小于向左.

素 (x, y) 是两个方程的公共解, 也就是求它们联立方程组的解.

$$\text{解方程组} \begin{cases} y=x-1, \\ x+y-2=0. \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} x=\frac{3}{2}, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{所以 } A \cap B = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

此题的几何意义是相交直线的交集为其交点.



练一练

设 $A = \{ (x, y) \mid 2x+y=3 \}$, $B = \{ (x, y) \mid 3x-2y=1 \}$, 求 $A \cap B$.



练习 1.2.1

1. 设集合 $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 求 $A \cap B$.
2. 设集合 $A = \{x \mid x^2-9=0\}$, $B = \{x \mid x^2-x-6=0\}$, 求 $A \cap B$.
3. 设集合 $A = \{x \mid x > -1\}$, $B = \{x \mid x > 2\}$, 求 $A \cap B$.
4. 设集合 $A = \{x \mid x \text{ 是锐角三角形}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是钝角三角形}\}$, 求 $A \cap B$.
5. 设集合 $A = \{ (x, y) \mid 2x+3y=1 \}$, $B = \{ (x, y) \mid 3x-y=2 \}$, 求 $A \cap B$.



试一试

1. 如图 1-9 所示, 试写出集合 A, B, C , 并求出 $A \cap B \cap C$.

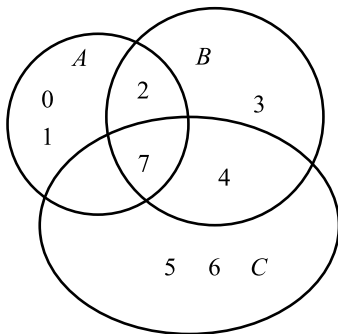


图 1-9

2. 设平面内直线 l_1 上点的集合为 A , 直线 l_2 上点的集合为 B , 试着用集合的交集运算表示两条直线平行和重合.

1.2.2 并集

观察下面几个实例, 集合 C 与 A 、 B 有什么关系吗?

- (1) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{0, 1, 2, 3\}$;
 (2) $A = \{\text{苹果, 香蕉, 梨}\}$, $B = \{\text{苹果, 葡萄, 梨}\}$, $C = \{\text{苹果, 香蕉, 葡萄, 梨}\}$;
 (3) $A = \{x \mid x \text{ 是龙华职专的男生}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是龙华职专的女生}\}$, $C = \{x \mid x \text{ 是龙华职专的学生}\}$.

可以看出:

(1) 中集合 C 是由集合 A 与 B 的所有元素“0, 1, 2, 3”组成的集合(图 1-10);

(2) 中集合 C 是由集合 A 与 B 的所有元素“苹果、香蕉、梨、葡萄”组成的集合;

(3) 中集合 C 是由集合 A 与 B 的所有元素“龙华职专的男生和女生”组成的集合.

对于这样组成的集合, 给出下面的定义.

一般地, 对于两个集合 A 与 B , 由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合, 叫作 A 与 B 的**并集**, 记作

$A \cup B$ (读作“ A 并 B ”).

用描述法表示为

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

如 Venn 图 1-11 中阴影部分表示为 $A \cup B$.

例题1 已知集合 A , B , 求 $A \cup B$.

- (1) $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$;
 (2) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$;
 (3) $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 0\}$;
 (4) $A = \{0\}$, $B = \emptyset$.

【解】 (1) $A \cup B = \{a, b\} \cup \{a, c, d\} = \{a, b, c, d\}$;

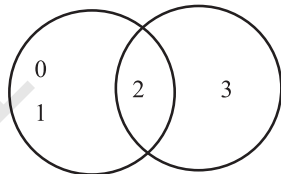


图 1-10

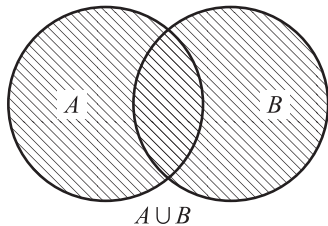


图 1-11

$A \cup B$ 中的元素 x 有 3 种可能:
 ① $x \in A$ 但 $x \notin B$;
 ② $x \notin A$ 但 $x \in B$;
 ③ $x \in A$ 且 $x \in B$;

$$(2) A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\};$$

$$(3) A \cup B = \{0, 1\} \cup \{1, 0\} = A \text{ (或 } B);$$

(4) 因为 $A = \{0\}$ 是单元素集, $\emptyset$ 是空集, 所以它们的并集含有唯一元素 0, 即

$$A \cup B = \{0\} \cup \emptyset = \{0\}.$$

由并集的定义容易知道, 对于任意集合 A 与 B , 有

$$A \cup A = A;$$

$$A \cup \emptyset = A;$$

$$A \cup B = B \cup A.$$

当 $A \subseteq B$ 时, 有 $A \cup B = B$ (图 1-12).

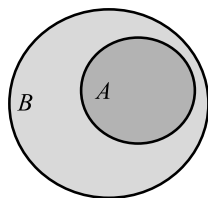


图 1-12



练一练

1. $\{1, 3, 4, 5\} \cup \{2, 3\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $Q \cup Z = \underline{\hspace{2cm}}.$

例题2 已知集合 $A = \{x \mid -2 < x < 1\}$, $B = \{x \mid 0 < x \leq 2\}$, 求 $A \cup B$, 并在数轴上表示.

【解】 如图 1-13 所示, 阴影部分表示 $A \cup B$.

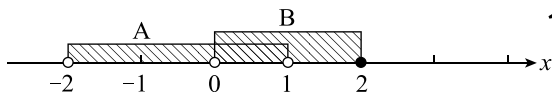


图 1-13

解答与不等式有关的问题, 利用数形结合即运用数轴表示是最佳方案.

$$\text{即 } A \cup B = \{x \mid -2 < x < 1\} \cup \{x \mid 0 < x \leq 2\} = \{x \mid -2 < x \leq 2\}.$$



练一练

已知集合 $A = \{x \mid x \geq -2\}$, $B = \{x \mid x < 3\}$, 求 $A \cup B$, 并在数轴上表示.



练习 1.2.2

1. 设集合 $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 求 $A \cup B$.
2. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 9 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$, 求 $A \cup B$.
3. 设集合 $A = \{x \mid x > -1\}$, $B = \{x \mid x \geq 2\}$, 求 $A \cup B$.
4. 设集合 $A = \{x \mid x \text{ 是锐角三角形}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是钝角三角形}\}$, 求 $A \cup B$.
5. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{3, 5, 7\}$, 求 $(A \cap B) \cup C$, $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.



试一试

如果集合 A 中有 4 个元素, 集合 B 中有 5 个元素, 集合 $A \cap B$ 中有 3 个元素, 试求集合 $A \cup B$ 中有多少个元素.

1.2.3 全集与补集

在研究集合与集合之间的关系时, 常取定一个集合使得所讨论的集合都是这个集合的子集, 则称这个集合为**全集**, 记作 U .

设 U 为全集, A 是 U 的子集, 则 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合叫作集合 A 在 U 中的**补集**, 记作

$\complement_U A$ (读作 “ A 在 U 中的补”).

用描述法表示为

$$\complement_U A = \{x \mid x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}.$$

如图 1-14 所示, 矩形表示全集 U , A 是 U 的子集, 阴影部分表示集合 A 在全集 U 中的补集 $\complement_U A$.

如果全集 U 已经很明显, 那么 A 的补集 $\complement_U A$, 通常可以省去符号 U , 记作

$\complement A$ (读作 “ A 补”).

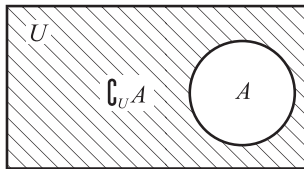


图 1-14

例题1 求下列给定集合的补集.

- (1) 若全集 $U = \{a, b, c, d, e\}$, 集合 $A = \{b, d\}$, 求 $\complement_U A$;
- (2) 设全集 $U = \{x \mid x \text{ 是不大于 } 6 \text{ 的自然数}\}$, 集合 $B = \{3, 5\}$, 求 $\complement_U B$;
- (3) 设全集 $U = \mathbf{Z}$, 集合 $A = \{x \mid x \text{ 是奇数}\}$, 求 $\complement_U A$.

【解】 (1) $\complement_U A = \{a, c, e\}$;

(2) 因为全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

所以 $\complement_U B = \{0, 1, 2, 4, 6\}$;

(3) $\complement_U A = \{x \mid x \text{ 是偶数}\}$.



练一练

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{1, 2\}$, 则 $\complement_U A =$ _____, $\complement_U(\complement_U A) =$ _____, $A \cap \complement_U A =$ _____, $A \cup \complement_U A =$ _____.
2. 集合 $A = \{m, n\}$, $\complement_U A = \{p, q, s\}$, 则全集 $U =$ _____.

由补集的定义, 容易知道, 对于任意集合 A 与 B , 有

$A \cap \complement_U A = \emptyset$ (集合 A 与其补集的交集为空集);

$A \cup \complement_U A = U$ (集合 A 与其补集的并集为全集);

$\complement_U(\complement_U A) = A$ (补集的补集就是本身);

$\complement_U \emptyset = U$ (空集的补集为全集);

$\complement_U U = \emptyset$ (全集的补集为空集).

例题2 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x \leq 2\}$, 求 $\complement_U A$, 并在数轴上表示.

【解】 因为全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x \mid x \leq 2\}$, 所以 $\complement_U A = \{x \mid x > 2\}$, 在数轴上表示如图 1-15 所示.

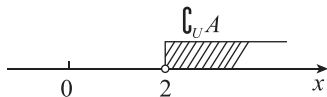


图 1-15



练一练

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $B = \{x \mid x \geq 3\}$, 求 $\complement_U B$, 并在数轴上表示.
2. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $P = \{x \mid x < -2.3\}$, 求 $\complement_U P$, 并在数轴上表示.



练习 1.2.3

1. 填空:

(1) 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, 则 $\complement_U A =$ _____;

(2) 设全集 $U = \mathbf{N}$, $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, \text{ 且 } x < 5\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.

2. 设全集 $U = \{x \mid x \text{ 是不大于 } 5 \text{ 的自然数}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $\complement_U A \cup \complement_U B$.

3. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $B = \{x \mid x \geq -2\}$, 求 $\complement_U B$, 并在数轴上表示.

4. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 7, 8\}$, 求:

(1) $\complement_U A \cap \complement_U B$;

(2) $\complement_U A \cup \complement_U B$;

(3) $\complement_U (A \cap B)$;

(4) $\complement_U (A \cup B)$.



试一试

英国物理学家、数学家、天文学家艾萨克·牛顿 (Isaac · Newton, 1643—1727) 小的时候, 对周围的一切充满了好奇, 但并没有显得特别聪明. 他沉默、好幻想、倾心于机械制作, 学习成绩平平. 后来他下决心改变这一状况. 有一次, 他把自己的作业做得干净整齐, 没有任何错误, 但正当他把笔和本子收起来时, 糟糕的事情发生了: 墨水洒了, 正好在他的一道算术题上留下了一块墨迹. 图 1-16 显示了这个令人不快的结果.

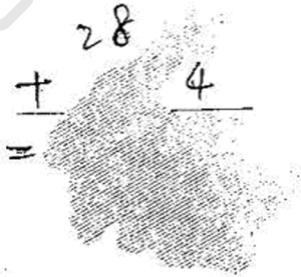


图 1-16

小牛顿尽了一切努力, 最后终于记起来整道题凑巧用了 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 全部 10 个数字, 每个数字使用了一次.

由于被墨水盖住的是 7 个数字, 所以我们可以把这个算式写成:

$$\begin{array}{r} 28A \\ +CB4 \\ \hline GFE D \end{array}$$

其中每个英文字母分别表示数字 0, 1, 3, 5, 6, 7, 9 中的某一个.

我们先考虑千位上的 G . 两个三位数相加, 和是四位数, 由于两个百位上的数相加, 和最多向千位进 1, 所以, G 只能是 1.

再看百位上的 C 和 F . 如果要保证向千位进 1, C 不能小于 7, 即 C 只可能是 7 或 9 中的一个.

设 $C=9$, 那么如果十位不进位到百位, $F=1$; 如果十位进位到百位, $F=2$. 这都和已知的数字重复, 所以 $C \neq 9$, 只能是 $C=7, F=0$, 即

$$\begin{array}{r} 28A \\ + 7B4 \\ \hline 10ED \end{array}$$

你能说出被墨水盖住的其他数字是哪些吗?



习题 1.2

A 组

1. 用适当的符号 ($\subseteq$, $\supseteq$, $=$) 填空:

(1) $A \cap B$ ____ A ; (2) $A \cap B$ ____ B ; (3) $A \cap B$ ____ $\emptyset$;

(4) $A \cup B$ ____ A ; (5) $A \cup B$ ____ B ; (6) $A \cup B$ ____ $\emptyset$.

2. 设集合 $A = \{x \mid x < 1\}$, $B = \{x \mid x \geq -2\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, 并在数轴上表示.

3. 设集合 $A = \{(x, y) \mid 2x + y - 3 = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid 3x - y - 7 = 0\}$, 求 $A \cap B$.

4. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid -2 < x \leq 4\}$, 求 $\complement_U A$, 并在数轴上表示.

5. 设集合 $A = \{x \mid -2 < x \leq 4\}$, $B = \{x \mid 0 \leq x < 5\}$, 求 $A \cap B$ 及 $A \cup B$.

6. 设全集 $U = \mathbf{N}$, $A = \{n \mid n \in \mathbf{N}, \text{ 且 } n > 4\}$, 求 $\complement_U A$.

7. 设全集 $U = \{x \mid x < 9, x \in \mathbf{N}\}$, $A = \{0, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_U A \cap \complement_U B$, $\complement_U A \cup \complement_U B$.

B 组

1. 设全集 $U = \mathbf{Z}$, 集合 $A = \{x \mid x = 2n, \text{ 且 } n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 2n - 1, \text{ 且 } n \in \mathbf{Z}\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $A \cap B$, $A \cup B$.

2. 设 $A = \{x \mid x \text{ 是等腰三角形}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是直角三角形}\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

3. 设全集 $U = \{2, 3, m^2 + 2m - 3\}$, $A = \{2, |m + 7|\}$, $\complement_U A = \{5\}$, 求实数 m 的值.

1.3 充要条件

下面的语句,你能判断它们的真假吗?

- (1) 第29届奥运会在北京举办.
- (2) 0是自然数.
- (3) $2+3=7$.
- (4) 若 $x=1$, 则 $x^2=1$.
- (5) 请您出示证件!

(1)、(2)、(3)、(4) 这四句都是陈述句,可以判断出它们的真假,其中(1)、(2)和(4)为真,(3)为假.(5)是祈使句,不能判断出真假.

数学中,把可以判断真假的陈述句叫作**命题**.其中,正确的命题叫作真命题,错误的命题叫作假命题.命题的真假是唯一的,不是真就是假.

为了便于书写、讨论,通常用英文的小写字母 $p, q, r, s, \dots$ 表示命题.例如, p : 第29届奥运会在北京举办.

例题1 判断下列语句是不是命题,如果是,判断命题的真假.

- (1) 今天的天气真好啊!
- (2) 李刚是班长吗?
- (3) 北京是中国的首都.
- (4) 方程 $x+7=0$ 无实数解.
- (5) $2 \in \{x \mid x^2=9\}$.

【解】(1) 和 (2) 都不是命题;(3) 是命题,且为真命题;(4) 是命题,且为假命题;(5) 是命题,且为假命题.

数学史料



伯特兰·罗素 (Bertrand Russell, 1872—1970) 是英国著名的数学家、哲学家和逻辑学家.他与怀特海合著的《数学原理》提出了逻辑主义,对逻辑数学、集合论、语言学和分析哲学的发展产生了重要影响,也使罗素本人获得了崇高的声誉.其中的“罗素悖论”对20世纪初关于数学基础的论战——“第三次数学危机”产生过极大影响.



练一练

判断下列语句是不是命题,如果是,判断命题的真假.

- (1) $3^2=6$.
- (2) 这本书好看吗?

(3) 请不要吸烟!

(4) 2 是偶数.

(5) $|-3| > 1$.

(6) $\sqrt{2} = 1.414$.

例题2 判断下列命题的真假.

(1) 如果同位角相等, 那么两条直线平行.

(2) 如果 x 是有理数, 那么 x 是整数.

【解】 命题 (1) 为真命题, 命题 (2) 为假命题.

在例题 2 的 (1) 中, 若把同位角相等看成条件 p , 两条直线平行看成结论 q , 则此命题可简写为“如果 p , 那么 q ”. 在初中我们学习过许多类似“如果 p , 那么 q ”这种形式的命题.

当“如果 p , 那么 q ”形式的命题为真命题时, 即如果 p 成立, 那么 q 一定成立, 就称由 p 推出 q , 记作

$$p \Rightarrow q \text{ (读作“} p \text{ 推出 } q \text{”).}$$

若 $p \Rightarrow q$, 则称 p 是 q 的充分条件, 同时称 q 是 p 的必要条件.

当“如果 p , 那么 q ”形式的命题为假命题时, 即如果 p 成立, 那么 q 不成立, 就称由 p 推不出 q , 记作

$$p \nRightarrow q \text{ (读作“} p \text{ 推不出 } q \text{”).}$$

在例题 2 的 (2) 中, 设 p : x 是有理数, q : x 是整数. 显然 x 是有理数时并不一定是整数, 即 $p \nRightarrow q$; 但是 x 是整数时一定是有理数, 即由 q 可推出 p ($p \Leftarrow q$), 因此我们说 p 是 q 的必要条件.

例题3 判断下列各题中 p 是 q 的充分条件还是必要条件.

(1) p : a 是 6 的倍数, q : a 是 2 的倍数.

(2) p : $ab=0$, q : $a=0$.

【解】 (1) 因为若 a 是 6 的倍数, 那么它一定是 2 的倍数,

即

$$p \Rightarrow q,$$

又因为若 a 是 2 的倍数, 那么 a 不一定是 6 的倍数,

①若 p 为真, 则 q 为真;
② p 是 q 的充分条件;
③ q 是 p 的必要条件.
这三种说法是一样的.

即 $q \not\Rightarrow p$,

所以 p 是 q 的充分非必要条件.

(2) 因为 $ab=0$ 时有可能 $a \neq 0$, 且 $b=0$,

即 $p \not\Rightarrow q$,

所以 p 不是 q 的充分条件;

又因为 $a=0$ 时, 无论 b 为何值, 都一定有 $ab=0$,

即 $p \Leftarrow q$,

所以 p 是 q 的必要非充分条件.



练一练

判断下列各题中 p 是 q 的充分条件还是必要条件.

- (1) $p: a > 3, q: a > 1$.
- (2) $p: \text{两个三角形面积相等}, q: \text{两个三角形全等}$.
- (3) $p: a^2 - 1 = 0, q: a - 1 = 0$.
- (4) $p: a = -2, q: |a| = 2$.
- (5) $p: \text{两个三角形全等}, q: \text{两个三角形周长相等}$.

如果 $p \Rightarrow q$ 且 $p \Leftarrow q$, 我们称 p 是 q 的充分且必要条件, 简称充要条件, 记作: $p \Leftrightarrow q$ (读作“ p 等价 q ”).

例题4 若 p : 四边形一组对边平行且相等, q : 四边形是平行四边形, 则 p 是 q 的 ().

- | | |
|-------------|---------------|
| A. 充分且不必要条件 | B. 必要且不充分条件 |
| C. 充要条件 | D. 既不充分也不必要条件 |

【解】 因为若四边形的一组对边平行且相等, 则这个四边形一定是平行四边形, 所以 p 是 q 的充分条件, 即

$$p \Rightarrow q.$$

又因为若四边形是平行四边形, 则这个四边形的一组对边一定平行且相等, 所以 p 是 q 的必要条件, 即

$$p \Leftarrow q.$$

因此, p 是 q 的充要条件, 选 C.



练一练

1. 判断下列各题中, p 是 q 的什么条件.

- (1) p : 两直线平行, q : 内错角相等;
- (2) $p: a^2=0, q: a=0$;
- (3) p : 四边形的四边相等, q : 四边形是正方形;
- (4) $p: a=-2, q: a^2=4$.

2. 填表.

p 与 q 的关系	p 是 q 的什么条件
$p \Rightarrow q$ 且 $p \Leftarrow q$	
$p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$	
$p \not\Rightarrow q$ 且 $p \Leftarrow q$	
$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$	



习题 1.3

A 组

1. 选择题:

(1) 下列语句是命题的是 ().

- | | |
|-------------------------|-----------|
| A. 全体起立 | B. 外面在下雨吗 |
| C. 三角形内角和等于 180° | D. 这幅画真美啊 |

(2) 下列命题是真命题的是 ().

- A. $2^3=8$
- B. 两个实数的乘积一定是非零实数
- C. $-\frac{1}{2} > -\frac{1}{3}$
- D. 9 能被 6 整除

(3) 下列命题是真命题的是 ().

- A. 如果 $x^2-1=0$, 那么 $x=1$

B. 如果 $x^2-1=0$, 那么 $x=-1$

C. 如果 $x^2-1=0$, 那么 $x=1$ 或 $x=-1$

D. 如果 $x^2-1=0$, 那么 $x=1$ 且 $x=-1$

(4) “角 A 与角 B 是对顶角”是“角 A 与角 B 相等”的 ().

A. 充分且不必要条件

B. 必要且不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(5) “ $a \in \mathbf{Q}$ ”是“ $a \in \mathbf{Z}$ ”的 ().

A. 充分且不必要条件

B. 必要且不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 判断下列语句是不是命题, 如果是, 判断命题的真假.

(1) 明天有数学课吗?

(2) $2^4=16$.

(3) 祝你天天都有好心情!

(4) 任何一个实数的平方都是正数.

(5) 方程 $x^2=-1$ 有实数解.

(6) 三角形两边之和大于第三边.

3. 填空题:

(1) “ $x>2$ ”是“ $x>4$ ”的_____条件.

(2) “ $\triangle ABC$ 的三个角都是 60° ”是“ $\triangle ABC$ 是等边三角形”的_____条件.

(3) “两个三角形的三条边对应相等”是“两个三角形全等”的_____条件.

4. 判断下列各题中, p 是 q 的什么条件.

(1) $p: x=3, q: x^2=9$;

(2) $p: \text{在} \triangle ABC \text{ 中, } \angle C=90^\circ, q: \text{在} \triangle ABC \text{ 中, } AC^2+BC^2=AB^2$;

(3) $p: x=3, q: x^2-2x-3=0$;

(4) $p: x \in A \cup B, q: x \in A$;

(5) $p: x=-1, q: x^2=1$;

(6) $p: a=0, q: a^2+b^2=0$;

(7) $p: \text{两个三角形全等}, q: \text{两个三角形相似}$;

(8) $p: x^2-4=0, q: x-2=0$.

B 组

1. 选择题:

(1) 下列命题是假命题的是 ().

A. $0 \notin \emptyset$

B. 方程 $x^2 + 9 = 0$ 无实数解

C. 矩形的对角线互相平分

D. $\{a\} \in \{a, b, c\}$

(2) 下列命题中真命题的个数是 ().

①空集没有子集;

②空集是任何一个集合的真子集;

③ $\emptyset = \{0\}$;

④任何一个集合必有两个或两个以上的子集.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

2. 判断下列语句是不是命题, 如果是, 判断命题的真假.

(1) 月亮会发光.

(2) 方程 $x^2 + x + 2 = 0$ 有实数解.

(3) 把门关上!

(4) 如果 a 能被 4 整除, 那么 a 能被 2 整除.3. 判断下列各题中, p 是 q 的什么条件.(1) $p: b^2 - 4ac \geq 0$, $q: \text{方程 } ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \text{ 有实根};$ (2) $p: a = 0 \text{ 且 } b = 0$, $q: a^2 + b^2 = 0;$ (3) $p: a \neq 0$, $q: ab \neq 0.$

快乐实践

- 传说古代有位残暴的国王, 有一次他抓到一个反对他的人, 一定要将这个人处死. 国王虽然心里要将反对者处死, 但表面上还装出仁慈的样子: “让上帝来决定这个可怜人的命运吧, 我允许他在临刑前说一句话, 如果他讲的是真话, 那么他将受刀斩; 如果他讲的是假话, 那么他将被绞死; 只有他的话使我缄默不言, 那才是上帝的旨意让我赦免他.” 请你想一想, 反对者应该说句什么话, 才能救自己一命呢.
- 设甲、乙、丙是三个命题, 如果甲是乙的必要条件, 丙是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件, 则 ().

- A. 丙是甲的充分条件,但不是甲的必要条件
- B. 丙是甲的必要条件,但不是甲的充分条件
- C. 丙是甲的充要条件
- D. 丙不是甲的充分条件,也不是甲的必要条件



数海拾贝

康托尔的集合论、罗素悖论与第三次数学危机

研究集合的数学理论在现代数学中称为集合论,它的创始人是德国著名数学家康托尔(1845—1918).康托尔于1873年12月7日给德国数学家戴德金(1831—1916)的信中最早提出了集合论思想,人们把这一天定为集合论诞生日.

在数学发展的历程中,数学家们始终以一种怀疑的眼光看待无穷,并尽可能地回避这一概念,但康托尔却把“无穷集”这一词汇引入数学,从而进入了一片未开垦的处女地,开辟出一个奇妙无比的新世界.最能显示出他独创性的是他对无穷集元素个数问题的研究,这实际上是在进行一项更新无穷观念的工作.他靠着自己的智慧和汗水,探讨了前人从未碰过的实数点集,成功地证明了一条直线上的点能够和一个平面上的点一一对应,也能和空间中的点一一对应.这样看起来,1 cm 长的线段内的点与太平洋洋面上的点以及整个地球内部的点都“一样多”.这就是集合论研究的开端.1874年康托尔提出“集合”的概念:把若干确定的有区别的事物合并起来,看作一个整体,就称为一个集合,其中各事物称为该集合的元素.

康托尔集合论的建立,不仅是数学发展史上一座高耸的里程碑,甚至还是人类思维发展史上的一座里程碑.它标志着人类经过几千年的努力,终于基本上弄清了无限的性质.德国数学大师希尔伯特赞扬康托尔的理论是“数学思想最惊人的产物,在纯粹理性的范畴中人类活动最美的表现之一”.

康托尔的创造性工作与传统的数学观念发生了尖锐冲突,遭到一些人的反对、攻击甚至谩骂.作为对传统观念的一次大革新,由于他开创的是一片全新的领域,提出并回答了前人不曾想到的问题,他的理论受到激烈的批驳是正常的.

20世纪以来的研究表明,不仅微积分的基础——实数理论奠定在集合论的基础上,而且各种复杂的数学概念都可以用“集合”概念定义出来,而各种数学理论又都可以“嵌入”集合论之内.因此,集合论就成了全部数学的基础,而且有力地促进了各个数学分支的发展.现代数学几乎所有的分支都会用到集合这个概念.集合论前后历经二十余年,最终获得了世界公认.

正当人们乐观地认为从算术公理系统出发,借助集合论的概念,便可以建造起整

个数学大厦的时候，英国著名哲学家、数学家罗素（1872—1970）在1902年提出了“罗素悖论”，发现集合论是有漏洞的，从而引发了数学史上的第三次数学危机。

罗素悖论中一个著名的悖论——“理发师难题”，其内容如下：

西班牙的塞维利亚有一个理发师，这位理发师有一条极为特殊的规定：他只给那些“不给自己刮胡子”的人刮胡子。

理发师这个拗口的规定，对于除他自己以外的别人，并没有什么难理解的地方。但是回到他自己这里，问题就麻烦了。如果这个理发师不给自己刮胡子，那么按照规定，他就应该给自己刮胡子；可是他给自己刮胡子的话，按照规定他又不应该给自己刮胡子。因此，无论这位理发师是否给自己刮胡子，都不符合自己的那条规定。这真是令人哭笑不得的结果。

罗素还提出过与“理发师难题”相似的几个悖论，数学上将这些悖论统称为“罗素悖论”或者“集合论悖论”。为什么又叫“集合论悖论”呢？因为“罗素悖论”都可以用集合论中的数学语言来描述，归结成一种说法就是：

在某一非空全集中，有这样一个确定的集合，这个集合中“只有不属于这个集合的元素”。

那么，全集中的某一个指定元素，和这个确定集合之间是什么关系呢？不难分析，如果这个元素包含于这个集合中的话，那么根据这个集合的定义，这个元素就应该是“不属于这个集合”的元素；可如果这个元素“不属于这个集合”，那么根据这个集合的定义，这个元素就应该在这个集合中，即包含于这个集合。这就是说，全集中的每一个元素，与这个确定集合之间都不存在确定的包含关系，这无疑是讲不通的。

第三次数学危机产生后，数学家纷纷提出自己的解决方案。1908年，策梅罗提出公理化集合论，后经改进形成无矛盾的集合论公理系统，避免了悖论的出现。集合论的发展进入了第二个阶段：公理化集合论。

与此相对应，在1908年以前由康托尔创立的集合论被称为朴素集合论。公理化集合论是对朴素集合论的严格处理。它保留了朴素集合论有价值的成果并消除了其可能存在的悖论，因而较圆满地解决了第三次数学危机。

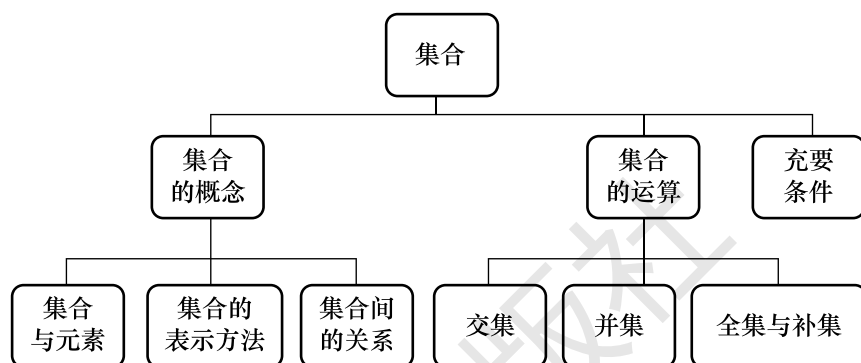
从康托尔提出集合论至今的一百多年时间里，数学又发生了极其巨大的变化，而这一切都是与康托尔的开拓性工作分不开的。正如苏联数学家柯尔莫戈洛夫（1903—1987）评价康托尔的工作时说：“康托尔的不朽功绩在于他向无穷的冒险迈进。”德国数学家兰道（1877—1938）则评价道：“康托尔和他所代表的一切是永存的，人类应当感谢被赐予了康托尔这样一位伟人，未来的一代将从他的著作中受到教益。”



图 1-17

小结与复习

一、本章知识结构图



二、学习要求

1. 理解集合的概念及元素与集合的关系，理解空集的含义.
2. 掌握集合的两种表示方法.
3. 掌握集合间的相等与包含关系（子集、真子集、相等）.
4. 理解交集、并集、补集的概念及全集的意义.
5. 了解充要条件的意义.

三、需要注意的问题

1. 集合与集合的元素是两个不同的概念. 如： a 与 $\{a\}$ 的区别在于 a 表示一个元素，而 $\{a\}$ 表示只由一个元素 a 构成的集合，它们的关系是 $a \in \{a\}$.
2. 符号“ $\in$ ”与“ $\notin$ ”只能用在元素与集合之间，表示二者的从属关系. 如： $0 \in \mathbf{N}, 0 \notin \mathbf{N}^*$ ，除此以外，“ $\in$ ”与“ $\notin$ ”没有其他用途.
3. 空集 $\emptyset$ 是一个集合，它不含任何元素. 无论何时，“ $x \in \emptyset$ ”的写法都是错误的. 一定要分清 0 ， $\emptyset$ 及 $\{0\}$ 三者的关系. $0 \in \{0\}$ ， $0 \notin \emptyset$ ， $\emptyset \subsetneq \{0\}$.
4. 表示无限集一般用描述法. 有规律的无限集也可用列举法表示.



复习题

A 组

一、选择题:

- 下列各对象可以组成集合的是 ().
 A. 与 0 非常接近的实数 B. 2008 年奥运冠军
 C. 我班视力比较好的同学 D. 小河流
- 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6, 9\}$, $C = \{3, 7, 8\}$, 则 $(A \cap B) \cup C =$ ().
 A. $\{0, 1, 2, 6\}$ B. $\{3, 7, 8\}$
 C. $\{1, 3, 7, 8\}$ D. $\{1, 3, 6, 7, 8\}$
- “ $a+b$ 是偶数”是“ a, b 都是偶数”的 ().
 A. 充分且不必要条件
 B. 必要且不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- 已知集合 $P = \{(x, y) \mid x+y=0\}$, $M = \{(x, y) \mid x-y=2\}$, 则 $P \cap M =$ ().
 A. $\{1, -1\}$ B. $(1, -1)$
 C. $\{(1, -1)\}$ D. $\emptyset$
- 已知集合 M, P 满足 $M \cup P = M$, 则一定有 ().
 A. $M \supseteq P$ B. $M = P$
 C. $M \cap P = M$ D. $M \subseteq P$

二、填空题:

- 用适当的符号 ($\in, \notin, \subseteq, =, \supseteq$) 填空.
 (1) $\{a, b\}$ _____ $\{b, a\}$; (2) 0 _____ $\{0\}$;
 (3) $\{0\}$ _____ $\emptyset$; (4) 0.2 _____ $\mathbf{Z}$.
- 集合 $A = \{x \mid 1 < x < 5, x \in \mathbf{N}^*\}$, 用列举法表示集合 $A =$ _____.
- 集合 $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, g\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.
- 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $\complement_U A = \{0, 3, 4\}$, 则全集 $U =$ _____.

5. 集合 $A = \{x \mid x \text{ 是非负实数}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是非正实数}\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

6. $x^2=5$ 是 $x=\sqrt{5}$ 的 _____ 条件.

三、解答题:

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $M = \{x \mid x \geq 1\}$, $N = \{x \mid 0 \leq x < 5\}$, 求 $M \cup N$.

2. 已知集合 $A = \{x \mid x \geq 2\}$, $B = \{x \mid 1 \leq x < 5\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, 并在数轴上表示.

3. 设全集 $U = \{x \mid 2 < x \leq 8, \text{ 且 } x \in \mathbf{N}\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 7, 8\}$, 求:

(1) $A \cap B$;

(2) $\complement_U(A \cap B)$;

(3) $\complement_U A \cap \complement_U B$.

4. 写出集合 $\{0, 1, 2\}$ 的所有子集和真子集.

B 组

1. 用适当的符号 ($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $=$, $\supseteq$) 填空:

$\{x \mid x \text{ 是等腰三角形}\}$ _____ $\{x \mid x \text{ 是等边三角形}\}$.

2. 写出满足条件 $\{0, 1\} \cup A = \{0, 1\}$ 的所有集合 A .

3. 选择题:

(1) $x^2=36$ 的充要条件是 ().

A. $x=6$

B. $x=-6$

C. $x=6$ 且 $x=-6$

D. $x=6$ 或 $x=-6$

(2) “ $a=0, b=0, \text{ 且 } c=0$ ” 是 “ $a^2+b^2+c^2=0$ ” 的 ().

A. 充分且不必要条件

B. 必要且不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 设 $A = \{x \mid x^2 - mx + 15 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x + n = 0\}$, 且 $A \cap B = \{3\}$, 求 $A \cup B$.