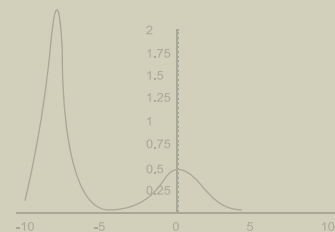




“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定



概率论与 数理统计

GAILÜLUN YU
SHULI TONGJI

主编 张爱武 陈远生

概率论与数理统计

主编 张爱武 陈远生

北京出版集团公司
北京出版社

ISBN 978-7-200-10588-9



9 787200 105889 >

定价：24.00元

责任编辑：李学钊
责任印制：赵天宇
装帧设计：杨明俊

北京出版集团公司
北京出版社

前 言

本书是根据教育部制定的高职“概率统计课程教学基本要求”编写的。概率论是从数量侧面研究随机现象的统计规律性,它是本课程的理论基础。本书第一至三章是概率论的基本内容。数理统计是处理随机数据,建立有效的统计方法,进行统计推断。本书第四至七章是数理统计的基本内容。

本书着重介绍了概率论与数理统计的概念、方法,注意交代概念的实际意义,并通过精选例题加深对概念的理解,体现由浅入深、启发诱导的教学方法;力求在循序渐进的过程中,使读者逐步掌握概率论与数理统计的基本方法;突出概率论与数理统计方法的应用,对较烦琐的理论推导适当降低要求;本书的习题分节设立,这样可使习题更具有针对性,习题数量也明显增加。

使用本书教学大约需要 54 学时。若课时较少,可选取部分内容组织教学。譬如:

概率论部分可教授第一、二、三章大部分内容。

数理统计部分可选取第四、五、六、七章大部分内容。

本书由盐城师范学院张爱武和盐城生物工程高等职业技术学校陈远生共同编著,盐城高级技师学院张林进行了审阅。书稿虽经多次修改,但限于编者水平,仍会有疏漏之处。恳请读者批评指正,我们将作进一步改进。

目 录

绪 言	1
第一章 随机事件及概率	4
§ 1.1 随机事件与样本空间	4
§ 1.2 概率的定义及性质	12
§ 1.3 古典概型	16
§ 1.4 条件概率的计算公式	23
§ 1.5 独立性与伯努利概型	31
第二章 随机变量及其分布	39
§ 2.1 随机变量及分布函数	39
§ 2.2 离散型随机变量及其分布列	47
§ 2.3 连续型随机变量及其分布	61
§ 2.4 随机变量函数的分布	68
第三章 随机变量的数字特征	73
§ 3.1 随机变量的数学期望	73
§ 3.2 随机变量的方差	83
第四章 数理统计的基本概念	88
§ 4.1 总体与样本	88
§ 4.2 直方图与经验分布函数	93
§ 4.3 统计量及其分布	96
第五章 参数估计	105
第六章 假设检验	114
§ 6.1 假设检验的基本思想和程序	114
§ 6.2 正态总体参数的假设检验	120
第七章 方差分析及回归分析初步	126
§ 7.1 方差分析	126
§ 7.2 线性回归分析	134
习题答案	141
附 录	152
附表 1 常用分布表	152
附表 2 泊松分布概率值表	153

附表 3	标准正态分布表	156
附表 4	t 分布表	157
附表 5	χ^2 分布表	159
附表 6	F 分布表	162
参考文献		170

第二章 随机变量及其分布

§ 2.1 随机变量及分布函数

一、随机变量及其分类

1. 概念

我们讨论过不少随机试验,其中有些试验的结果就是数量,例如袋中有五个球(三白两黑)从中任取三球,则取到的黑球数可能为 $0, 1, 2$, 本身就是数量且黑球数随着随机试验结果的变化而变化的. 又如在“ n 重伯努利试验中,事件 A 出现 k 次”这一事件的概率,若记 $\xi = n$ 重伯努利试验中 A 出现的次数,则上述“ n 重伯努利试验中,事件 A 出现 k 次”这一事件可以简记为 $(\xi = k)$,从而有

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, q = 1 - p$$

并且 ξ 的所有可能取值就是事件 A 可能出现的次数 $0, 1, 2, \dots, n$, 有些随机试验的结果虽然本身不是数量,但也可以用数量来表示这些试验的结果.

【例 2.1.1】从一批废品率为 p 的产品中有放回地抽取 n 次,每次取一件产品,考虑取到废品的次数,这一试验的样本空间为 $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. 如果用 ξ 表示取到废品的次数,那么, ξ 的取值依赖于试验结果,当试验结果确定了, ξ 的取值也就随之确定了. 比如,进行了一次这样的随机试验,试验结果为 $\omega = 1$, 即在 n 次抽取中,只有一次取到了废品,那么 $\xi = 1$.

【例 2.1.2】掷一枚匀称的硬币,观察正面、背面的出现情况. 这一试验的样本空间为 $\Omega = \{H, T\}$, 其中 H 表示“正面朝上”, T 表示“背面朝上”. 如果引入变量 ξ , 对试验的两个结果,将 ξ 的值分别规定为 1 和 0, 即:

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{当出现 } H \text{ 时} \\ 0, & \text{当出现 } T \text{ 时} \end{cases}$$

一旦试验的结果确定了, ξ 的取值也就随之确定了.

从上述例子可以看出:无论随机试验的结果本身与数量有无联系,我们都能把试验的结果与实数对应起来,即可把试验的结果数量化. 由于这样的数量依赖试验的结果,而对随机试验来说,在每次试验之前无法断言会出现何种结果,因而也就无法确定它会取什么值,即它的取值具有随机性,我们称这样的变量为随机变量. 事实上,随机变量就是随着试验结果的变化而变化的量. 因此可以说,随机变量是随试验结果的函数. 我们可以把例

2.1.1 中的 ξ 写成 $\xi = \xi(\omega)$, 其中 $\omega \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. 把例 2.1.2 中的 ξ 写成

$$\xi = \xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \omega = H \\ 0, & \text{当 } \omega = T \end{cases}$$

一般的, 我们有以下定义:

定义 2.1.1 设 E 为一随机试验, Ω 为它的样本空间, 若 $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ 为单值实函数, 且对于任意实数 x , 集合 $\{\omega \mid \xi(\omega) < x\}$ 都是随机事件, 则称 $\xi(\omega)$ 为随机变量. 今后, 在不必强调 ω 时, 常省去 ω , 简记 $\xi(\omega)$ 为 ξ , 而 ω 的集合 $\{\omega \mid \xi(\omega) < x\}$ 所表示的事件简记为 $\xi < x$.

一般的, 用希腊字母 ξ, η, ζ 或大写英文字母 X, Y, Z 等表示随机变量.

【例 2.1.3】一射手对一射击目标连续射击, 则他命中目标的次数 ξ 为随机变量, ξ 的可能取值为 $0, 1, 2, \dots$.

【例 2.1.4】某一公交车站每隔 5 分钟有一辆汽车停靠, 一位乘客不知道汽车到达的时间, 则候车时间为随机变量 ξ , ξ 的可能取值为 $0 \leq \xi < 5$.

【例 2.1.5】考察某一地区全年的温度的变化情况, 则某一地区的温度 ξ 为随机变量, ξ 的可能取值为 $a \leq \xi < b$.

【例 2.1.6】大炮对某一目标射击, 弹着点的位置, 如果将大炮所在的位置看成原点建立如图 2-1 所示的坐标系, 则弹着点就可以用一个二维坐标 (ξ, η) 表示出来, 这时, 就要用二个随机变量来描述. 这就是一个二维随机变量.

随机变量与普通实函数这两个概念之间既有联系又有区别, 它们都是从一个集合到另一个集合的映射, 它们的区别主要在于: 普通实函数无须做试验便可依据自变量的值确定函数值, 而随机变量的取值在做试验之前是不确定的, 只有在做了试验之后, 依据所出现的结果才能确定. 定义中要求对任一实数 x , $\{\omega \mid \xi(\omega) \leq x\}$ 都是事件, 这说明并非任何定义在 Ω 上的函数都是随机变量, 而是对函数有一定的要求. 定义中的要求无非是说, 当我们把随机试验的结果数量化时, 不可随心所欲, 而是应该合乎概率公理体系的规范.

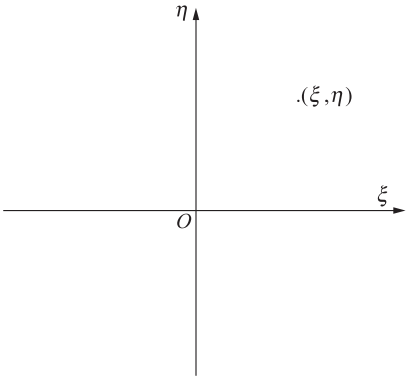


图 2-1

2. 随机变量的分类

从随机变量的取值情况来看, 若随机变量的可能取值只要有限个或可列个, 则称该随机变量为离散型随机变量, 不是离散型随机变量统称为非离散型随机变量. 若随机变量的取值是连续的, 称为连续型随机变量, 它是非离散型随机变量的特殊情形. 如例 2.1.1 ~ 例 2.1.3 都是离散型随机变量; 例 2.1.4 ~ 例 2.1.5 都是连续型随机变量.

从描述随机试验的随机变量的个数来分, 随机变量可分为一维随机变量和多维随机变量. 如例 2.1.1 ~ 例 2.1.4 中的随机变量都是一维随机变量, 例 2.1.5 中的随机变量是二维随机变量.

一维随机变量表示坐标轴上的一个随机点,二维随机变量表示二维坐标平面上一个随机点.

引入了随机变量之后,随机事件就可以用随机变量来描述,例如,在某城市中考察人口的年龄结构,年龄在 80 岁以上的长寿者,年龄介于 18 岁至 35 岁之间的年轻人,以及不到 12 岁的儿童,他们各自的比率如何.从表面上看,这些是孤立事件,但若我们引进一个随机变量 ξ 表示随机抽取一个人的年龄,那么,上述几个事件可以分别表示成 $\{\xi > 80\}$ 、 $\{18 \leq \xi \leq 35\}$ 及 $\{\xi < 12\}$.由此可见,随机事件的概念是被包容在随机变量这个更广的概念之内的.

二、一维随机变量的分布函数

1. 分布函数的概念

对于随机变量 ξ ,我们不只是看它取哪些值,更重要的是看它以多大的概率取那些值.由随机变量的定义可知,对于每一个实数 x , $\{\xi \leq x\}$ 都是一个事件,因此有一个确定的概率 $P(\xi \leq x)$ 与 x 相对应,所以,概率 $P(\xi \leq x)$ 是 x 的函数.这个函数在理论和应用中都是很重要的,为此,我们有以下定义:

定义 2.1.2 设定义在样本空间 Ω 上的随机变量 ξ ,对于任意实数 x ,称函数 $F(x) = P(\xi \leq x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 是随机变量 ξ 的概率分布函数,简称为分布函数或分布.

注意:分布函数实质上就是事件 $(\xi \leq x)$ 的概率.也就是随机变量 ξ 落在区间 $(-\infty, x)$ 内的概率.

2. 分布函数的性质

由概率的性质可知:

(1) 非负性: $\forall x \in (-\infty, +\infty), 0 \leq F(x) \leq 1$;

(2) 若 $x_1 < x_2$,则 $P(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$;

因为 $(\xi \leq x_2) \supset (\xi < x_1)$,所以 $(x_1 < \xi \leq x_2) = (\xi \leq x_2) - (\xi \leq x_1)$,进一步有

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

由性质(2)得

(3) 单调性:若 $x_1 < x_2$,则 $F(x_1) \leq F(x_2)$;

(4) 极限性: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$;

(5) 右连续性: $F(x+0) = F(x)$.

(3)、(4)、(5) 是分布函数的三个基本性质,反过来还可以证明任一个满足这三个性质的函数,一定可以作为某个随机变量的分布函数.知道了随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)$,不仅可以求出 $(\xi \leq x)$ 的概率而且还可以计算下述概率

$$P(\xi > x) = 1 - P(\xi \leq x) = 1 - F(x)$$

$$P(\xi < x) = F(x-0)$$

$$P(\xi \geq x) = 1 - F(x-0)$$

$$P(\xi = x) = F(x) - F(x-0)$$

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1-0)$$

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1)$$

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1 - 0)$$

由此可以看出,上述这些事件的概率都可以由 $F(x)$ 算出来,因此 $F(x)$ 全面地描述了随机变量 ξ 的统计规律,既然分布函数能够全面地描述一般的随机变量的统计规律,因而分布函数这个概念非常重要.

【例 2.1.7】等可能的向区间 $[a, b]$ 上投掷质点,求质点坐标 ξ 的分布函数.

解: 设 x 为任一实数,当 $x \leq a$ 时,显然有 $F(x) = P(\xi < x) = P(\emptyset) = 0$;

当 $a < x \leq b$ 时,由几何概型可知

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < a) + P(a \leq \xi < x) = 0 + \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a};$$

$$\text{当 } x > b \text{ 时,有 } F(x) = P(\xi < x) = P(\Omega) = 1. \text{ 从而 } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b. \\ 1, & x > b \end{cases}$$

【例 2.1.8】设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x) = A + B \cdot \arctan x$, $-\infty < x < +\infty$. 求:(1) 常数 A, B ; (2) $P(0 < \xi \leq 1)$.

$$\text{解: (1) 由极限性 } \begin{cases} F(+\infty) = 1 \\ F(-\infty) = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} A + B \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \\ A - B \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}, \text{ 从而解得 } \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{\pi} \end{cases}$$

$$\text{于是 } F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x, -\infty < x < +\infty.$$

$$(2) P(0 < \xi \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan 0 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{【例 2.1.9】设随机变量 } \xi \text{ 的分布函数为 } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ Ax^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

求:(1) 常数 A ; (2) ξ 落在 $(-1, \frac{1}{2}]$ 上的概率.

解: (1) 因为 $F(x)$ 在 $x = 1$ 处右连续,

$$\text{所以 } F(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = A = F(1),$$

$$\text{故 } A = 1,$$

$$\text{于是 } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$(2) P(-1 < \xi \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) - F(-1) = \frac{1}{4}.$$

注意: 求分布函数中的待定常数,主要是利用分布函数的极限性及右连续性.

三、多维随机变量的联合分布函数

1. 概念

定义 2.1.3 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的随机变量, 则称 n 维随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 是样本空间 Ω 上的 n 维随机变量或 n 维随机向量, 并称 n 元函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n)$ 是 n 维随机变量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 的联合分布函数, 称为联合分布或分布.

联合分布函数描述了多维随机变量的统计规律.

下面着重讨论二维随机变量, 若 (ξ, η) 表示笛卡儿平面上的点的坐标, 那么 $F(x, y) = P(\xi \leq x, \eta \leq y)$ 为 (ξ, η) 的联合分布函数, $F(x, y)$ 表示点落在图中阴影部分的概率, 如图 2-2 所示.

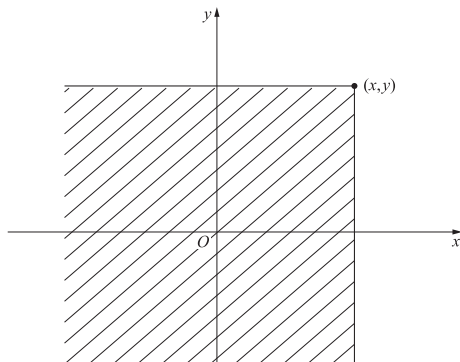


图 2-2

2. 联合分布函数的性质

- (1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$;
- (2) 对 x 或 y 都是单调不减的;
- (3) 对 x 和 y 都是右连续的, 即 $F(x, y) = F(x+0, y), F(x, y) = F(x, y+0)$;
- (4) 对任意 x 和 y , 有

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0; F(x, -\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0;$$

$$F(-\infty, -\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0; F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1.$$

- (5) 对任意 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 其中 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ 有

$$P(x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

$$\text{且} \quad F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

反过来还可以证明, 任意一个具有上述四个性质的二元函数必定可以作为某个二维随机变量的分布函数, 因而满足这四个条件的二元函数通常称为二元联合分布函数.

3. 边际(边缘)分布函数

设 (ξ, η) 为二维随机变量, 那么它的每一个分量都是一维的随机变量, 它们的分布函数称为边际分布函数, 分别记为 $F_\xi(x), F_\eta(y)$.

设二维随机变量 (ξ, η) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 那么它的两个分量 ξ, η 的分布函数可由 $F(x, y)$ 求得

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x) &= P(\xi \leq x) = P(\xi \leq x, \eta \leq +\infty) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} P(\xi \leq x, \eta \leq y) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) \\ &= F(x, +\infty) \end{aligned}$$

同理

$$F_{\eta}(y) = F(+\infty, y)$$

由此可知, 由联合分布可以唯一确定边际分布函数, 反之, 不一定成立. (反例见后面)

【例 2.1.10】 设 (ξ, η) 的联合分布函数为 $F(x, y) = A(B + \arctan \frac{x}{2})(C + \arctan \frac{y}{3})$,

求: (1) 常数 A, B, C ; (2) 边际分布函数 $F_{\xi}(x), F_{\eta}(y)$.

解: (1) 由 $F(+\infty, +\infty) = 1, F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$ 得

$$\begin{cases} A(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2}) = 1 \\ A(\arctan \frac{x}{2} + B)(C - \frac{\pi}{2}) = 0 \\ A(B - \frac{\pi}{2})(C + \arctan \frac{y}{3}) = 0 \end{cases}$$

解得 $A = \frac{1}{\pi^2}, B = C = \frac{\pi}{2}$.

于是 $F(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3} \right)$

(2) $F_{\xi}(x) = F(x, +\infty) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{2} + \frac{1}{2}; F_{\eta}(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{y}{3} + \frac{1}{2}$.

由此例可以看出, 求联合分布函数中的待定常数, 主要利用联合分布函数的性质.

四、随机变量的独立性

定义 2.1.4 设 (ξ, η) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, ξ 与 η 的边际分布函数为 $F_{\xi}(x), F_{\eta}(y)$, 如果对任意实数 x, y , 总有 $F(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)$ 成立, 则称随机变量 ξ 与 η 是相互独立的.

在例 2.1.10 中, 由于 $F(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)$, 所以随机变量 ξ 与 η 是相互独立的.

【例 2.1.11】 设二维随机变量 (ξ, η) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y}), & 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求: (1) ξ, η 的边际分布函数 $F_{\xi}(x), F_{\eta}(y)$;

(2) 判定 ξ, η 是否相互独立.

解: (1) 由 $F_{\xi}(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

同理可得
$$F_{\eta}(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-3y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

(2) 因为对任意实数 x, y , 都有 $F_{\xi}(x)F_{\eta}(y) = F(x, y)$, 所以随机变量 ξ, η 相互独立. 类似地, 可以定义多个随机变量的独立性.

定义 2.1.5 设 n 维随机变量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$F_{\xi_1}(x_1), F_{\xi_2}(x_2), \dots, F_{\xi_n}(x_n)$ 为它们的边际分布函数, 若 $\forall x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n$, 总有 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n)$, 则称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是相互独立的随机变量.

习题 2.1

1. 一颗骰子抛两次, 以 ξ 表示两次中所得的最小点数, 求 ξ 的分布函数.
2. 向区间 $(0, a)$ 上任意投点, 用 ξ 表示这个点的坐标, 设这个点落在 $(0, a)$ 中任一小区间的概率与这个小区间的长度成正比, 而与小区间位置无关, 求 ξ 的分布函数.
3. 设随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{3}, & 1 < x \leq 3 \\ \frac{1}{2}, & 3 < x \leq 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

求 $P(\xi < 3), P(\xi \leq 3), P(\xi > 1), P(\xi \geq 1)$.

4. 设随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \ln x, & 1 < x \leq e \\ 1, & x > e \end{cases}$$

试求 $P(\xi < 2), P(0 < \xi \leq 3), P(2 < \xi < 2.5)$.

5. 设 (ξ, η) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 试用 $F(x, y)$ 表示:

(1) $P(a \leq \xi \leq b, \eta < c)$; (2) $P(0 < \eta < b)$; (3) $P(\xi \geq a, \eta < b)$.

6. 设二维随机变量 (ξ, η) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y-\lambda xy}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} (\lambda > 0) \end{cases}$$

求 ξ, η 的边际分布函数并判断 ξ 与 η 是否相互独立.

7. 设 (ξ, η) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} y(1 - e^{-x}), & x > 0, 1 > y \geq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0, y \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 ξ, η 的边际分布函数 $F_{\xi}(x)$ 及 $F_{\eta}(y)$, 并判断 ξ, η 是否相互独立.

8. 设随机变量 (ξ, η) 的分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin y, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

判断 ξ 与 η 的相互独立性.

§ 2.2 离散型随机变量及其分布列

一、一维离散型随机变量及分布列

1. 概念

定义 2.2.1 定义在样本空间 Ω 上,取值于实数域 $\mathbf{R}$,且只取有限个或可列个值的变量 $\xi = \xi(\omega)$ 称为一维(实值)离散型随机变量,简称离散型随机变量.

讨论离散型随机变量主要要搞清楚两个方面问题:一是随机变量的所有可能取值;更主要的是搞清楚随机变量取这些可能值的概率.

【例 2.2.1】设袋中有五个球(3 个白球 2 个黑球)从中任取两球,则取到的黑球数为随机变量 ξ , ξ 的可能取值为 0, 1, 2.

$$P(\xi = 0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}; P(\xi = 1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}; P(\xi = 2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}.$$

习惯上,把它们写成 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{10} & \frac{6}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ 或

表 2-1

ξ	0	1	2
p	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

称它为随机变量 ξ 的分布列(律).

2. 分布列(律)

如果离散型随机变量 ξ 可能取值为 $a_i (i = 1, 2, \dots)$, 相应的取值 a_i 的概率 $P(\xi = a_i) = p_i$, 称 $p_i = P(\xi = a_i) (i = 1, 2, \dots)$ 为随机变量 ξ 的分布列, 也称为分布律, 简称分布.

也可以用下列表格或矩阵的形式来表示, 称为随机变量 ξ 的分布律:

表 2-2

ξ	a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$
$p_i = P(\xi = a_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

或

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix}.$$

【例 2.2.2】在 $n = 5$ 的伯努利试验中, 设随机事件 A 在一次试验中出现的概率为 p , 令 $\xi =$ “5 次试验中事件 A 出现的次数”, 求 ξ 的分布列.

解: $P(\xi = k) = C_5^k p^k q^{5-k} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

于是 ξ 的分布列为

表 2-3

ξ	0	1	2	3	4	5
p_i	q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5

3. 分布列的性质

由概率的性质可知,任一离散型随机变量 ξ 的分布列 $\{p_i\}$ 都具有下述性质:

(1) 非负性: $p_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots$.

(2) 规范性: $\sum_i p_i = 1$.

反过来,任意一个具有以上性质的数列 $\{p_i\}$ 都可以看成某一个离散型随机变量的分布列.

分布列不仅明确地给出了 $(\xi = a_i)$ 的概率,而且对于任意的实数 $a < b$,事件 $(a \leq \xi \leq b)$ 发生的概率均可由分布列算出,因为 $(a \leq \xi \leq b) = \bigcup_{a \leq a_i \leq b} (\xi = a_i)$

于是由概率的可列可加性

$$P(a \leq \xi \leq b) = \sum_{i \in I} P(\xi = a_i) = \sum_{i \in I} p_i$$

其中 $I = \{i; a \leq a_i \leq b\}$

由此可知,离散型随机变量取各种值的概率都可以由它的分布列,通过计算而得到,这种事实常常说成是,分布列全面地描述离散型随机变量.

【例 2.2.3】 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi = i) = c \left(\frac{2}{3}\right)^i, i = 1, 2, 3$, 求 c 的值.

解: ξ 的分布列为 $P(\xi = i) = c \left(\frac{2}{3}\right)^i, i = 1, 2, 3$

由分布列的性质 $\sum_i P_i = 1$ 即 $c \left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3\right) = 1$

所以 $c = \frac{27}{38}$

注意: 求分布列中的待定常数,往往用分布列的性质(规范性)或利用分布列自身的概率性质.

【例 2.2.4】 一个口袋中有 n 只球,其中 m 只白球,无放回地连续地取球,每次取一球,直到取到黑球时为止,设此时取出了 ξ 个白球,求 ξ 的分布列.

解: ξ 的可能取值为 $0, 1, 2, \cdots, m$.

$$P(\xi = i) = \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)(n-m)}{n(n-1)\cdots(n-i+1)(n-i)}$$

注意: $(\xi = i)$ 表示第 i 次取出白球,第 $i+1$ 次取出黑球.

【例 2.2.5】 抛掷一枚不均匀的硬币,出现正面的概率为 p ($0 < p < 1$),设 ξ 为一直掷到正、反都出现时所需要的次数,求 ξ 的分布列.

解: ξ 的所有可能取值为 $2, 3, \cdots$ 则 $P(\xi = k) = p^{k-1}q + pq^{k-1}, k = 2, 3, \cdots$

注意: 求离散型随机变量的概率分布的一般步骤: (1) 确定随机变量的所有可能取值; (2) 确定每个可能取值所对应的概率; (3) 验证 $\sum_i p_i = 1$ 是否成立. 实质上求离散型

随机变量的概率分布就是转化为求随机事件的概率.

4. 几种常用分布

(1) 退化分布

设 ξ 的分布列为 $P(\xi = a) = 1$ (a 为常数), 则称 ξ 服从退化分布.

(2) 两点分布

设 ξ 的分布列为

表 2-4

ξ	1	0
p_i	p	q

称 ξ 服从两点分布或 0—1 分布或伯努利分布.

(3) 二项分布

设随机变量 ξ 的分布列为

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

显然 ① $p_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\textcircled{2} \sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

称随机变量 ξ 服从二项分布, 记为 $\xi \sim b(k; n, p)$.

大家可以发现两点分布是二项分布在 $n = 1$ 的情形.

(4) 几何分布

在伯努利试验中, 每次试验成功的概率为 p , 失败的概率为 $q = 1 - p$, 设试验进行到第 ξ 次才出现成功. ξ 的分布列为

$$P(\xi = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

其中, pq^{k-1} ($k = 1, 2, \dots$) 是几何级数 $\sum pq^{k-1}$ 的一般项. 因此称它为几何分布, 记为 $\xi \sim g(k; p)$.

(5) 泊松(Poisson) 分布

观察电信局在单位时间内收到的呼唤次数, 某公共汽车站在单位时间内来站乘车的乘客数等. 可用相应的变量 ξ 表示, 实践表明 ξ 的统计规律近似地为

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $\lambda > 0$ 是某个常数, 易验证

$$\textcircled{1} P(\xi = k) > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=0}^{+\infty} p(\xi = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1$$

也就是说, 若 ξ 的分布列为 $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots (\lambda > 0)$, 称 ξ 服从参数为 λ 的泊松(Poisson) 分布, 记为 $\xi \sim P(k; \lambda)$.

在很多实践问题中的随机变量都可以用 Poisson 分布来描述. 从而使得 Poisson 分布对于概率论来说, 有着重要的作用, 而概率论理论的研究又表明 Poisson 分布在理论上也

具有特殊重要的地位.

下面介绍 Poisson 分布与二项分布之间的关系.

定理 2.2.1 (Poisson 定理) 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 在一次试验中出现的概率为 p_n (与试验总数 n 有关). 若当 $n \rightarrow \infty$ 时, $np_n \rightarrow \lambda (\lambda > 0 \text{ 常数})$.

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(k; n, p_n) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

证明略.

这个定理在近似计算方面有较大的作用, 在二项分布中, 要计算 $b(k; n, p) = C_n^k p^k q^{n-k}$, 当 n 和 k 都比较大时. 计算量比较大, 若此时 np 不太大 (即 p 较小)

那么由 Poisson 定理就有 $b(k; n, p) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, 其中 $\lambda = np$.

而要计算 $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 可查 Poisson 分布表.

【例 2.2.6】 已知某种疾病的发病率为 $1/1000$, 某单位共有 5000 人, 问该单位患有这种疾病的人数超过 5 的概率为多大?

解: 设该单位患这种疾病的人数为 ξ , 则 $\xi \sim P(5000; 1/1000)$.

$$P(\xi > 5) = \sum_{k=6}^{5000} P(\xi = k) = \sum_{k=6}^{5000} b(k; 5000, 1/1000)$$

$$\text{其中 } b(k; 5000, 1/1000) = C_{5000}^k \left(\frac{1}{1000}\right)^k \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{5000-k}$$

这时如果直接计算 $P(\xi > 5)$, 计算量较大. 由于 n 很大, p 较小, 而 $np = 5$ 不很大. 可以利用 Poisson 定理 $P(\xi > 5) = 1 - P(\xi \leq 5) \approx 1 - \sum_{k=0}^5 \frac{5^k}{k!} e^{-5}$.

查 Poisson 分布表得 $\sum_{k=0}^5 \frac{5^k}{k!} e^{-5} \approx 0.616$. 于是, $P(\xi > 5) \approx 1 - 0.616 = 0.384$.

【例 2.2.7】 由该商店过去的销售记录知道, 某种商品每月销售数可以用参数 $\lambda = 10$ 的 Poisson 分布来描述, 为了以 95% 以上的把握保证不脱销, 问商店在月底至少应进该种商品多少件?

解: 设该商店每月销售某种商品 ξ 件, 月底的进货为 a 件. 则当 $\xi \leq a$ 时就不会脱销. 因而按题意要求为

$$P(\xi \leq a) \geq 0.95$$

又 $\xi \sim P(10)$, 所以 $\sum_{k=0}^a \frac{10^k}{k!} e^{-10} \geq 0.95$,

查 Poisson 分布表得 $\sum_{k=0}^{14} \frac{10^k}{k!} e^{-10} \approx 0.9166 < 0.95$, $\sum_{k=0}^{15} \frac{10^k}{k!} e^{-10} \approx 0.9513 > 0.95$

于是这家商店只要在月底进货某种商品 15 件 (假定上月没有存货) 就可以以 95% 的把握保证这种商品在下个月不会脱销.

5. 离散型随机变量的分布函数

设 $\xi(\omega)$ 为一个离散型随机变量, 它的分布列为

表 2-5

ξ	a_1	$a_2 \cdots a_k \cdots$
p_i	p_1	$p_2 \cdots p_k \cdots$

则 ξ 的分布函数为 $F(x) = P(\xi(\omega) \leq x) = \sum_{a_i \leq x} P(\xi(\omega) = a_i)$.

对离散型随机变量,用得较多的还是分布列.

【例 2.2.8】若 ξ 服从退化分布即 $P(\xi = a) = 1$, 则 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x > a \\ 0, & x \leq a \end{cases}$$

【例 2.2.9】若 ξ 服从两点分布

表 2-6

ξ	1	0
p_i	p	q

求 ξ 的分布函数 $F(x)$.

解: 当 $x < 0$ 时, $F(x) = P(\xi \leq x) = 0$;

当 $0 \leq x < 1$ 时, $F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = 0) = q$;

当 $x \geq 1$ 时, $F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 1$.

于是

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ q, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

【例 2.2.10】设 ξ 的分布列为

表 2-7

ξ	0	1	2
p_i	0.3	0.4	0.3

求 ξ 的分布函数 $F(x)$.

解: 当 $x < 0$ 时, $F(x) = P(\xi \leq x) = 0$

当 $0 \leq x < 1$ 时, $F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = 0) = 0.3$

当 $1 \leq x < 2$ 时, $F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0.3 + 0.4 = 0.7$

当 $x \geq 2$ 时, $F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 1$

于是

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.3, & 0 \leq x < 1 \\ 0.7, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

注意: 从上面例子可以看到, 在已知分布列的情况下, 可利用公式 $F(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{a_i \leq x} p_i$ 求分布函数, 要对自变量的取值进行讨论. $F(x)$ 是一阶梯状的左连续函数, 在 $x = a_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 处有跳跃, 其跃度为 ξ 在 a_k 处的概率. 同样, 利用分布函数

与概率的关系,也可以在已知分布函数的情况下得到分布列.

【例 2.2.11】设随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.4, & -1 \leq x < 1 \\ 0.8, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases},$$

求 ξ 的分布列.

解:依题意可得 ξ 的可能取值为 $-1, 1, 3$.

$$P(\xi = -1) = F(-1) - F(-1 - 0) = 0.4$$

$$P(\xi = 1) = F(1) - F(1 - 0) = 0.4$$

$$P(\xi = 3) = F(3) - F(3 - 0) = 0.2$$

所以 ξ 的分布列为

表 2-8			
ξ	-1	1	3
p_i	0.4	0.4	0.2

二、多维离散型随机变量及其联合分布列

1. 概念

定义 2.2.2 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是样本空间 Ω 上的 n 个离散型随机变量,则称 n 维向量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 是 Ω 上的一个 n 维离散型随机变量或 n 维随机向量.

对于 n 维随机变量而言,固然可以对它的每一个分量分别研究,但我们可以将它看成一个向量,则不仅要研究各个分量的性质,而且更重要的是要考虑它们之间的联系.

下面主要讨论二维离散型随机变量.

定义 2.2.3 设 (ξ, η) 是二维离散型随机变量,它们的一切可能取值为 $(a_i, b_j), i, j = 1, 2, \dots$, $P(\xi = a_i, \eta = b_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$,称 $p_{ij} = P(\xi = a_i, \eta = b_j), i, j = 1, 2, \dots$ 为二维随机变量 (ξ, η) 的联合分布列.

注意: $(\xi = a_i, \eta = b_j) = (\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)$.

与一维时的情形相似,人们也常常习惯于把二维离散型随机变量的联合分布用下面表格形式表示

表 2-9			
$\xi \backslash \eta$	$b_1 \quad b_2 \quad \dots$		
	a_1	a_2	$\vdots$
a_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

2. 联合分布的性质

容易证明二维离散型随机变量的联合分布具有下面的性质:

(1) 非负性: $\forall i, j \quad p_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, 2, \dots$

(2) 规范性: $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$

3. 边际分布(边缘分布)

定义 2.2.4 设 (ξ, η) 为二维离散型随机变量, 它们的每一个分量 ξ, η 的分布称为 (ξ, η) 关于 ξ, η 的边际分布, 记为 $P(\xi = a_i) = p_{i\cdot}$ 与 $P(\eta = b_j) = p_{\cdot j}$.

若 (ξ, η) 的联合分布为 $P(\xi = a_i, \eta = b_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$, 则

$$P(\xi = a_i) = P_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad P(\eta = b_j) = \sum_i p_{ij} = p_{\cdot j}$$

事实上, 因为 $\bigcup_{j=1}^{\infty} (\eta = b_j) = \Omega$, 所以

$$\begin{aligned} P(\xi = a_i) &= P(\xi = a_i, \bigcup_{j=1}^{\infty} (\eta = b_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P(\xi = a_i, \eta = b_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \end{aligned}$$

同理可得
$$P(\eta = b_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

由此可以发现, 由联合分布列可以唯一确定边际分布, 反之, 由边际分布不能唯一确定联合分布(反例在下面列举).

大家可以发现, 边际分布列的求法只需在联合分布列 $\{p_{ij}\}$ 的右方加了一列, 它将每一行中的 p_{ij} 相加而得出 $p_{i\cdot}$, 这就是 ξ 的边际分布列; 相应的在 $\{p_{ij}\}$ 下面增加一行, 它把每一列中的 p_{ij} 对 i 相加而得到 $p_{\cdot j}$ 恰好就是 η 边际分布列, 这也是边际分布列名称的来历. 即

表 2-10

$\begin{matrix} \eta \\ \xi \end{matrix}$	b_1	b_2	$\dots$	$p_{i\cdot}$
a_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	$p_{1\cdot}$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\dots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\dots$	

【例 2.2.12】设把三个相同的球等可能地放入编号为 1, 2, 3 的三个盒子中, 记落入第 1 号盒子中球的个数为 ξ , 落入第 2 号盒子中球的个数为 η , 求 (ξ, η) 的联合分布列及 ξ, η 的边际分布列.

解: ξ, η 的可能取值为 0, 1, 2, 3 (首先确定 (ξ, η) 的所有可能取值 (i, j)), 然后利用第一章的知识计算概率 $P(\xi = i, \eta = j)$.

当 $i + j > 3$ 时 $(\xi = i, \eta = j) = \phi$;

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \quad P(\xi = 0, \eta = 1) = \frac{C_3^1}{3^3} = 1/9$$

$$P(\xi = 0, \eta = 2) = \frac{C_3^2}{3^3} = \frac{1}{9} \quad P(\xi = 0, \eta = 3) = \frac{C_3^3}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$P(\xi = 1, \eta = 0) = \frac{C_3^1}{3^3} = \frac{1}{9} \quad P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{3^3} = \frac{2}{9}$$

$$P(\xi = 1, \eta = 2) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{3^3} = \frac{1}{9}$$
$$P(\xi = 2, \eta = 0) = \frac{C_2^2}{3^3} = \frac{1}{9}$$
$$P(\xi = 2, \eta = 1) = \frac{C_3^2 \cdot C_1^1}{3^3} = \frac{1}{9}$$
$$P(\xi = 3, \eta = 0) = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

所以 (ξ, η) 的联合分布列及边际分布列如表 2-11 所示.

表 2-11

$\eta \backslash \xi$	0	1	2	3	$p_{i \cdot}$
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0	$\frac{1}{27}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	

【例 2. 2. 13】把 3 个白球和 3 个红球等可能地放入编号为 1, 2, 3 的三个盒子中, 记落入第 1 号盒子中的白球个数为 ξ , 落入第 2 号盒子中的红球的个数为 η , 求 (ξ, η) 的联合分布列和边际分布列.

解: (ξ, η) 的可能取值为 $(i, j = 0, 1, 2, 3)$

$$P(\xi = i) = P(\eta = j) = C_3^i \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{3-i}$$
$$i, j = 0, 1, 2, 3$$

$$p_{ij} = P(\xi = i, \eta = j) = P(\xi = i) \cdot P(\eta = j) = C_3^i C_3^j \left(\frac{1}{3}\right)^{i+j} \left(\frac{2}{3}\right)^{6-(i+j)}$$
$$i, j = 0, 1, 2, 3$$

如表 2-2 所示.

比较上面两个例子可以发现两者有完全相同的边际分布列, 而联合分布列却不同, 由此可知边际分布列不能唯一确定联合分布列, 也就是说二维随机变量的性质并不能由它的两个分量的个别性质来确定, 这时还必须考虑它们之间的联系, 由此也就说明了研究多维随机变量的作用.

表 2-12

$\eta \backslash \xi$	0	1	2	3	$p_{i \cdot}$
0	$\frac{8}{27} \cdot \frac{8}{27}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{8}{27}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{27}$	$\frac{1}{27} \cdot \frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{8}{27} \cdot \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9}$	$\frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{8}{27} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{1}{27} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{8}{27} \cdot \frac{1}{27}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{27}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{27}$	$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	

三、离散型随机变量的独立性

由离散型随机变量的分布函数及多维离散型随机变量的联合分布函数的定义. 离散型随机变量的独立性也可以采用如下定义:

定义 2.2.5 设随机变量 ξ 的可能取值为 $a_i (i = 1, 2, \cdots)$, η 的可能取值为 $b_j (j = 1, 2, \cdots)$, 如果对任意的 a_i, b_j 有 $P(\xi = a_i, \eta = b_j) = P(\xi = a_i)P(\eta = b_j)$ 成立, 则称随机变量 ξ 与 η 相互独立.

两个随机变量 ξ 与 η 相互独立, 也就意味 ξ 与 η 的取值之间互不影响.

定理 2.2.2 设 (ξ, η) 是二维离散型随机变量联合分布律为 $P(\xi = a_i, \eta = b_j) = p_{ij}$, ξ, η 的边际分布为 $p_{i\cdot}, p_{\cdot j}, i, j = 1, 2, \cdots$, 则 ξ, η 相互独立的充要条件是对任意 $i, j = 1, 2, \cdots$, $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$.

由上述定理可知, 要判断两个随机变量 ξ, η 的独立性, 只需求出它们各自的边际分布, 再看对 (ξ, η) 的每一对可能取值点, 边际分布列的乘积都等于联合分布列即可. 若其中有一对值不满足这个条件, 则 ξ 与 η 不独立.

【例 2.2.14】袋中装有 2 个白球和 3 个黑球, 现进行有放回(无放回)摸球, 每次从中任取一只, 取两次, 令

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{第一次摸出白球} \\ 2 & \text{第一次摸出黑球} \end{cases}, \eta = \begin{cases} 1 & \text{第二次摸出白球} \\ 2 & \text{第二次摸出黑球} \end{cases}$$

求 (ξ, η) 的联合分布列与边际分布列, 并判定 ξ, η 的独立性.

解: 无放回

$$P(\xi = 1, \eta = 1) = P(\xi = 1)P(\eta = 1 | \xi = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(\xi = 1, \eta = 2) = P(\xi = 1)P(\eta = 2 | \xi = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

$$P(\xi = 2, \eta = 1) = P(\xi = 2)P(\eta = 1 | \xi = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$$

$$P(\xi = 2, \eta = 2) = P(\xi = 2)P(\eta = 2 | \xi = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$$

(ξ, η) 的联合分布列与边际分布列如表 2-13 所示.

表 2-13

$\xi \backslash \eta$	1	2	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

有放回

$$P(\xi = 1, \eta = 1) = P(\xi = 1)P(\eta = 1 \mid \xi = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$$
$$P(\xi = 1, \eta = 2) = P(\xi = 1)P(\eta = 2 \mid \xi = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$$
$$P(\xi = 2, \eta = 1) = P(\xi = 2)P(\eta = 1 \mid \xi = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$$
$$P(\xi = 2, \eta = 2) = P(\xi = 2)P(\eta = 2 \mid \xi = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

(ξ, η) 的联合分布列与边际分布列为

表 2-14

$\xi \backslash \eta$	1	2	$p_{i \cdot}$
1	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

当采取无放回取球时, 因为 $P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$, 而 $P(\xi = 1) \cdot P(\eta = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$, 所以, $P(\xi = 1, \eta = 1) \neq P(\xi = 1)P(\eta = 1)$, 故 ξ, η 不相互独立.

当采取有放回取球时, 因为对 ξ, η 所有可能取值 $\xi_i, \eta_j (i, j = 1, 2)$, 都有

$$P(\xi = a_i, \eta = b_j) = P(\xi = a_i)P(\eta = b_j)$$

故 ξ, η 相互独立.

随机变量的独立性可以推广到多个离散型随机变量的场合.

定义 2.2.6 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 n 个离散型随机变量, ξ_i 的可能取值为 $a_{ik} (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots)$, 如果对任意的一组 $(a_{1k_1}, \dots, a_{nk_n})$, 恒有

$$P(\xi_1 = a_{1k_1}, \dots, \xi_n = a_{nk_n}) = P(\xi_1 = a_{1k_1})P(\xi_2 = a_{2k_2}) \cdots P(\xi_n = a_{nk_n})$$

成立, 则称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是相互独立的.

【例 2.2.15】 已知二维随机变量 (ξ, η) 分布列为

表 2-15

$\xi \backslash \eta$	1	2
0	0.15	0.15
1	α	β

且 ξ, η 相互独立, 求 α, β 的值.

解: 由联合分布列的性质: $\alpha + \beta = 1 - 0.15 - 0.15 = 0.7$,

ξ 的边际分布列为

表 2-16

ξ	0	1
P	0.3	0.7

η 的边缘分布列为

表 2-17

η	1	2
P	$0.15 + \alpha$	$0.15 + \beta$

由 $P(\xi = 1, \eta = 1) = P(\xi = 1)P(\eta = 1)$ 得

$$\alpha = 0.7 \cdot (0.15 + \alpha),$$

即 $\alpha = 0.35, \beta = 0.7 - 0.35 = 0.35$.

【例 2.2.16】 在 n 重伯努利试验中, 令

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & \text{若在第 } i \text{ 次试验中事件 } A \text{ 出现} \\ 0 & \text{若在第 } i \text{ 次试验中事件 } A \text{ 不出现} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$$

则 $\eta_i (1 \leq i \leq n)$ 的可能取值为 1 或 0, 对 $a_i = 1$ 或 0 ($1 \leq i \leq n$).

容易验证: 有 $P(\eta_1 = a_1, \dots, \eta_n = a_n) = P(\eta_1 = a_1) \cdots P(\eta_n = a_n)$ 成立, 所以 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是相互独立的随机变量.

习题 2.2

1. 设随机变量的分布律为

$$P(\xi = k) = \frac{k}{15}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

求: (1) $P(\frac{1}{2} < \xi < \frac{5}{2})$; (2) $P(1 \leq \xi \leq 3)$; (3) $P(\xi > 3)$.

2. 设袋中装有编号从 1—5 的 5 只球, 从中任取 3 只, 求取出的 3 只球的最大号码的分布律及分布函数.

3. 设离散型随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0.4, & -1 < x \leq 1 \\ 0.8, & 1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

试求 ξ 的分布律.

4. 设随机变量 ξ 服从二项分布 $b(k; 2, p)$; 随机变量 η 服从二项分布 $b(k; 4, p)$. 若 $P(\xi \geq 1) = \frac{8}{9}$, 试求 $P(\eta \geq 1)$.

5. 设随机变量 ξ 服从泊松分布, 且 $P(\xi = 1) = P(\xi = 2)$, 求 $P(\xi = 4)$.

6. 纺织厂女工照顾 800 个纺锭, 每一纺锭在某一段时间 τ 内断头的概率为 0.005. 求在 τ 这段时间内断头的次数不大于 2 的概率.

7. 在保险公司里有 2500 名同一年龄和同社会阶层的人参加了人寿保险, 在 1 年中每个人死亡的概率为 0.002, 每个参加保险的人在 1 月 1 日需交 120 元保险费, 而在死亡时家属可从保险公司里领取 20000 元赔偿金. 求:

- (1) 保险公司亏本的概率;
- (2) 保险公司获利分别不少于 100000 元, 200000 元的概率.

8. 从发芽率为 0.999 的一大批种子中, 随机抽取 500 粒进行发芽试验, 计算 500 粒中没有发芽的比例不超过 1% 的概率.

9. 设二维随机变量 (ξ, η) 的联合分布律为

表 2-18

$\begin{matrix} \eta \\ \xi \end{matrix}$	-1	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{6}$	a

求: (1) a 的值; (2) (ξ, η) 的联合分布函数 $F(x, y)$;

(3) (ξ, η) 关于 ξ, η 的边际分布函数 $F_\xi(x)$ 与 $F_\eta(y)$.

10. 在一箱子中装有 12 只开关, 其中 2 只是次品, 在其中取两次, 每次任取一只, 考虑两种试验: (1) 有放回抽样; (2) 不放回抽样.

定义随机变量 ξ, η 如下:

$$\xi = \begin{cases} 0, & \text{若第一次取出的是正品} \\ 1, & \text{若第一次取出的是次品} \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 0, & \text{若第二次取出的是正品} \\ 1, & \text{若第二次取出的是次品} \end{cases}$$

试分别就 (1)、(2) 两种情况, 写出 ξ 与 η 的联合分布列.

11. 掷均匀硬币 3 次, 正面出现的次数记为 ξ , 正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值记为 η , 求 (ξ, η) 的联合分布列及边际分布列.
12. 盒子中装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球, 从中任取 4 只, 以 ξ 表示取得黑球的只数, 以 η 表示取得红球的只数, 试求 $P(\xi = \eta)$.
13. 设随机变量 ξ 与 η 相互独立, 其联合分布列为

表 2-19

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	y_3
x_1	a	$\frac{1}{9}$	c
x_2	$\frac{1}{9}$	b	$\frac{1}{3}$

试求联合分布列中的 a, b, c .

14. 设随机变量 ξ 与 η 独立同分布, 且

$$P(\xi = -1) = P(\eta = -1) = P(\xi = 1) = P(\eta = 1) = \frac{1}{2}$$

试求 $P(\xi = \eta)$.

15. 已知 ξ 与 η 的分布列分别为

表 2-20

ξ	-1	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

η	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

且 $P(\xi\eta = 0) = 1$,

(1) 求 ξ 与 η 的联合分布列; (2) 问 ξ 与 η 是否独立?

16. 设 ξ 与 η 相互独立, 其分布列分别为

表 2-21

ξ	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

表 2-22

η	$-\frac{1}{2}$	1	3
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

求 (ξ, η) 的联合分布列及 $P(\xi + \eta = 1), P(\xi + \eta \neq 0)$.

§ 2.3 连续型随机变量及其分布

一、一维连续型随机变量

1. 概念

定义 2.3.1 设 $\xi(\omega)$ 是随机变量, $F(x)$ 是它的分布函数, 如果存在可积函数 $p(x)$ 使得对任意的实数 x , 有 $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$, 则称 $\xi(\omega)$ 为连续型随机变量, 相应的 $F(x)$ 为连续型随机变量 $\xi(\omega)$ 的分布函数, 同时称 $p(x)$ 是 $\xi(\omega)$ 的概率密度函数或简称为密度.

2. 密度函数的性质

由分布函数的性质, 可以验证任一连续型随机变量的密度函数 $p(x)$ 必须具备下列性质:

(1) 非负性: $\forall x \in (-\infty, +\infty), p(x) \geq 0$;

(2) 规范性: $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$.

反过来, 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $p(x)$, 如果具有上述两个性质, 则该函数一定可以作为某连续型随机变量的概率密度函数.

密度函数除了上述两条特征性质外, 还有如下一些重要性质:

(3) $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续, 且在 $p(x)$ 的连续点处, 有 $F'(x) = p(x)$.

由此可见对连续型随机变量, 分布函数和密度函数可以相互确定, 因此密度函数也完全刻画了连续型随机变量的分布规律.

(4) 设 ξ 为连续型随机变量, 则对任意实数 x , 有 $P(\xi = x) = F(x) - F(x-0) = 0$.

这表明连续型随机变量取个别值的概率为 0, 这与离散型随机变量有本质的区别, 顺便指出 $P(\xi = x) = 0$ 并不意味着 $(\xi = x)$ 是不可能事件.

(5) 对任意 $x_1 < x_2$, 则

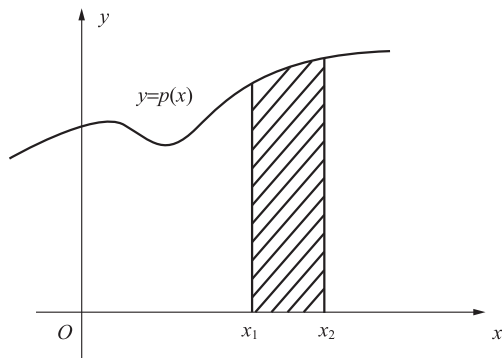


图 2-3

$$\begin{aligned}
 P(x_1 \leq \xi < x_2) &= P(x_1 < \xi \leq x_2) = P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = P(x_1 < \xi < x_2) \\
 &= F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx
 \end{aligned}$$

这一个结果从几何上来讲, ξ 落在区间 (x_1, x_2) 中的概率恰好等于在区间 (x_1, x_2) 上曲线 $y = p(x)$ 的曲边梯形的面积. 同时也可以发现, 整个曲线 $y = p(x)$ 与 x 轴所围成的图形面积为 1.

【例 2.3.1】 设随机变量 ξ 的密度函数为 $p(x) = \frac{c}{1+x^2}$, $-\infty < x < +\infty$,

试求: (1) 常数 c ; (2) ξ 的分布函数; (3) $P(0 \leq \xi \leq 1)$.

解: (1) 由密度函数的性质可知 $c \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$, 从而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2} dx = 1$

所以

$$c = \frac{1}{\pi}$$

于是, 密度函数为 $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < +\infty$;

$$(2) F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2};$$

$$(3) P(0 \leq \xi \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{\pi} \arctan 1 = \frac{1}{4}.$$

【例 2.3.2】 设随机变量的密度函数为 $p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ce^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}, \lambda > 0$,

试求: (1) 常数 c ; (2) 分布函数 $F(x)$; (3) $P(\xi \geq 1)$.

解: (1) 由密度函数的性质 $c \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1, \int_0^{+\infty} ce^{-\lambda x} dx = 1, c \cdot \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = 1, \text{ 所以 } c = \lambda.$$

于是

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 当 } x \leq 0, F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = 0;$$

$$\text{当 } x > 0, F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

于是

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$(3) P(\xi \geq 1) = 1 - p(\xi < 1) = 1 - F(1) = e^{-\lambda}.$$

注意: (1) 求密度函数中的待定常数往往借助于密度函数的性质.

(2) 由密度函数求分布函数需要对自变量的情形进行讨论.

【例 2.3.3】 设连续型随机变量的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$, 求它的密度函数 $p(x)$.

解: 因为 $F'(x) = p(x)$, 所以 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

注意: 由分布函数求密度函数只需要在连续点处对分布函数进行求导.

3. 几种常用分布

(1) 均匀分布

设随机变量 ξ 的密度函数为 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$, 则称 ξ 服从区间 $[a, b]$ 上的

均匀分布, 记作 $\xi \sim U[a, b]$.

向区间 $[a, b]$ 上均匀投掷随机点, 则随机点的坐标 ξ 服从 $[a, b]$ 上的均匀分布. 在实际问题中, 还有很多均匀分布的例子, 例如乘客在公共汽车站的候车时间, 近似计算中的舍入误差等都服从均匀分布.

设随机变量 $\xi \sim U[a, b]$, 则对任意满足 $[c, d] \subseteq [a, b]$, 则有

$$P(c \leq \xi \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$$

这表明, ξ 落在 $[a, b]$ 内任一小区间 $[c, d]$ 上取值的概率与该小区间的长度成正比, 而与小区间 $[c, d]$ 在 $[a, b]$ 的位置无关, 这就是均匀分布的概率意义, 实际上均匀分布描述了几何概型的随机试验.

(2) 指数分布

若随机变量 ξ 的密度函数 $p(x)$ 为: $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} (\lambda > 0)$, 则称 ξ 服从参数为

λ 的指数分布, 记作 $\xi \sim E(\lambda)$.

指数分布是一种应用广泛的连续型分布, 它常被用来描述各种“寿命”的分布, 例如无线电元件的寿命、电话问题中的通话时间等都可以认为服从指数分布.

注意: 指数分布具有无记忆性, 即设随机变量 ξ 服从参数为 λ 的指数分布, 则对任意 $s, t > 0$, 有

$$\begin{aligned} P(\xi > s+t \mid \xi > s) &= \frac{P(\xi > s+t, \xi > s)}{P(\xi > s)} = \frac{P(\xi > s+t)}{P(\xi > s)} = \frac{1-F(s+t)}{1-F(s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(\xi > t) \end{aligned}$$

若 ξ 表示某一原件的寿命, 则 $P(\xi > s+t \mid \xi > s) = P(\xi > t)$ 表明: 已知元件已使用了 s 小时, 它总共能使用至少 $s+t$ 小时的条件概率与从开始时算起至少能使用 t 小时的概率相等, 即元件对它已经使用过 s 小时没有记忆, 具有这一性质是指数分布具有广泛应用

的重要原因.

【例 2.3.4】假定打一次电话所用的时间 ξ (单位:分) 服从参数 $\lambda = \frac{1}{10}$ 的指数分布, 试求在排队打电话的人中, 后一个人等待前一个人的时间 (1) 超过 10 分钟; (2) 10 分钟到 20 分钟之间的概率.

解: 由题设知 $\xi \sim E(\frac{1}{10})$, 故所求概率为

(1) $P(\xi > 10) = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = e^{-1} \approx 0.368$

(2) $P(10 \leq \xi \leq 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x} dx = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.233;$

(3) 正态分布

若随机变量 ξ 的密度函数为 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty, \sigma > 0$, 称 ξ 服从参数为 μ, σ^2 的正态分布, 记为 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$p(x)$ 是一条呈倒钟形, 中间高, 两边低, 左右关于 μ 对称, 在 $x = \mu$ 附近取值的可能性大, 在两侧取值的可能性小, $\mu \pm \sigma$ 是该曲线的拐点, 如图 2-4 所示.

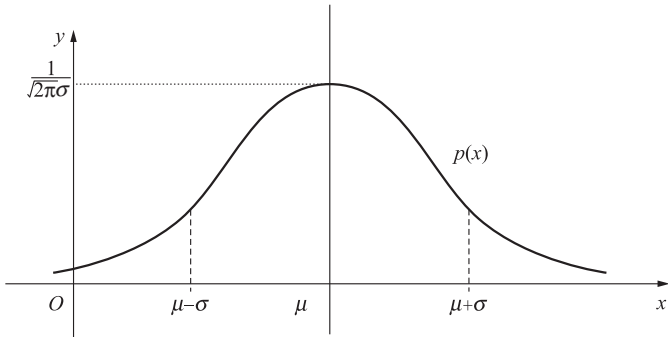


图 2-4

从图 2-5 中可以看出, 如果固定 σ , 改变 μ 的值, 则图形沿 x 轴左右平移, $p(x)$ 的形状不变, 也就是说正态密度函数的位置由参数 μ 所确定, 因此, 将 μ 看作是它的位置参数.

从图 2-6 中可以看出如果固定 μ , 改变 σ 的值, 如果 σ 越小, 则曲线呈高而尖; 反之, 则呈扁且平. 也就是说正态密度曲线的形状由参数 σ 所确定, 因此, σ 也被称为形状参数.

由高等数学知识可知 $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

从而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt = 1. \left(\text{令 } t = \frac{x-\mu}{\sigma} \right)$

现实生活中的大部分随机变量都服从或近似服从正态分布, 如人的身高、体重、测量的误差、学生的考试成绩、线路中的热噪声电压等.

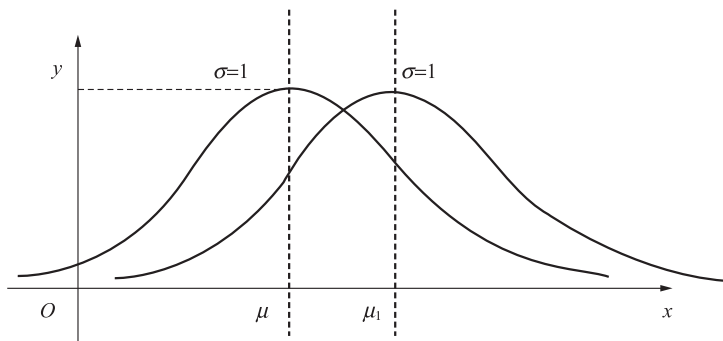


图 2-5

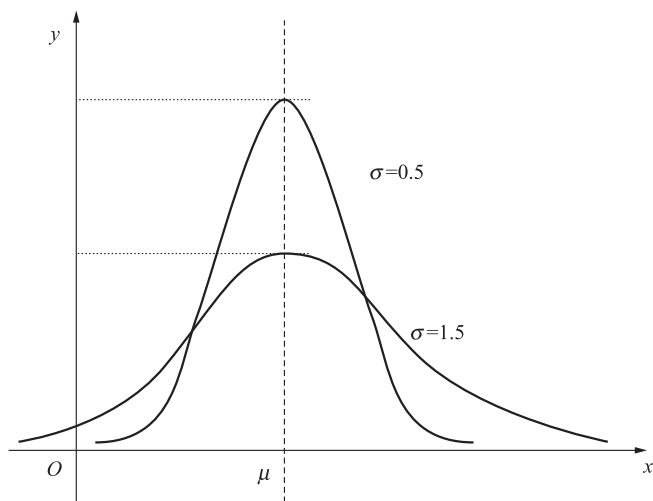


图 2-6

当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 正态分布 $N(0,1)$ 称之为标准正态分布, 其密度函数为 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

它的分布函数为 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

由分布函数的性质有 $\Phi(+\infty) = 1, \Phi(-\infty) = 0$

同时还可以推出 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

事实上,

$$\begin{aligned} \Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \stackrel{y=-t}{=} \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$

对于 $\Phi(x)$ 这个积分不能用初等函数表示, 人们已经编制了 $\Phi(x)$ 的函数表可供查阅 (见附表).

由分布函数的性质有: 若 $\xi \sim N(0,1)$ 则 $P(x_1 < \xi \leq x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

对一般正态分布都可以通过一个线性变换(标准化)化为标准正态分布. 因此与正态分布有关的事件的概率的计算都可以通过查标准正态表获得.

定理 2.3.1 设 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\eta = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

证明将在下一节给出.

于是, 若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(a < \xi < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$.

【例 2.3.5】 设 $\xi \sim N(0, 1)$, 求 1) $P(|\xi| \leq 1)$; 2) $P(|\xi| \leq 2)$; 3) $P(|\xi| \leq 3)$.

解: $P(|\xi| \leq 1) = P(-1 \leq \xi \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$;

$P(|\xi| \leq 2) = P(-2 \leq \xi \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9545$;

$P(|\xi| \leq 3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9973$.

【例 2.3.6】 设 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $P(|\xi - \mu| < \sigma)$, $P(|\xi - \mu| < 2\sigma)$, $P(|\xi - \mu| < 3\sigma)$.

解: $P(|\xi - \mu| < \sigma) = P(-1 < \frac{\xi - \mu}{\sigma} < 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$

$P(|\xi - \mu| < 2\sigma) = P(-2 < \frac{\xi - \mu}{\sigma} < 2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9545$

$P(|\xi - \mu| < 3\sigma) = P(-3 < \frac{\xi - \mu}{\sigma} < 3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9973$

由此例可得, 尽管正态随机变量 ξ 的取值范围是 $(-\infty, +\infty)$, 但它的值几乎全部集中在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 区间内, 超出这个范围的可能性仅占不到 0.3%. 本结果称为 3σ 原则 (三倍标准差原则). 在质量控制中, 常用标准指标值 $\pm 3\sigma$ 作两条线, 当生产过程的指标观察值落在两线之外时发出警报, 表明生产出现异常.

一般的, $P(|\xi - \mu| < k\sigma) = P(-k < \frac{\xi - \mu}{\sigma} < k) = 2\Phi(k) - 1$.

注意: 这个概率与 σ 无关.

【例 2.3.7】 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(108, 9)$, 求

① $P(102 < \xi < 117)$;

② 常数 a , 使得 $P(\xi < a) = 0.95$.

解: ① $P(102 < \xi < 117) = \Phi\left(\frac{117 - 108}{3}\right) - \Phi\left(\frac{102 - 108}{3}\right)$
 $= \Phi(3) - \Phi(-2)$
 $= \Phi(3) + \Phi(2) - 1$
 $= 0.9759$

② 由 $P(\xi < a) = \Phi\left(\frac{a - 108}{3}\right) = 0.95$, 因为 $\Phi(1.645) = 0.95$, 所以由 $\frac{a - 108}{3} =$

1.645 解得, $a = 112.935$.

从上例中, 我们可以看出, 有些场合下给定 $\Phi(x)$ 的值, 可以将标准正态分布表反过来查得 x 的值, 这种方法在统计中经常使用到.

习题 2.3

1. 设随机变量 ξ 的密度函数为 $p(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ ax + b, & 1 < x \leq 2, \text{ 且 } P(0 < \xi < \frac{3}{2}) = \frac{7}{8}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
求: (1) 常数 a, b ; (2) $P(\frac{1}{2} < \xi < \frac{3}{2})$; (3) ξ 的分布函数 $F(x)$.
2. 设连续型随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} A + Be^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 试求:
(1) A, B 的值; (2) $P(-1 < \xi < 1)$; (3) ξ 的概率密度 $p(x)$.
3. 设一汽车站上, 某路公共汽车每 5 分钟有一辆车到达, 设乘客在 5 分钟内任一时间到达是等可能的, 计算在车站候车的 10 位乘客中有 1 位候车时间超过 4 分钟的概率.
4. 设随机变量 ξ 的密度函数为 $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$; ($\lambda > 0$), 试求 k 使得 $P(\xi > k) = 0.5$.
5. 设随机变量 $\xi \sim N(u, \sigma^2)$, 其概率密度函数为 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}$ ($-\infty < x < +\infty$),
求 u, σ^2 ; 若已知 $\int_c^{+\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^c p(x) dx$, 求 c .
6. 设 $\xi \sim N(4, 3^2)$, 求 (1) $P(-2 < \xi \leq 10)$; (2) $P(\xi > 3)$; (3) 设 d 满足 $P(\xi > d) \geq 0.9$, 问 d 至多为多少?
7. 由某机器生产的螺栓的长度 (cm) 服从正态分布 $N(0.5, 0.06^2)$, 若规定长度在范围 10.05 ± 0.12 内为合格品, 求螺栓不合格的概率.
8. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(u, \sigma^2)$, 试问: 随着 σ 的增大, 概率 $P(|\xi - u| < k\sigma)$, $k \in \mathbf{N}^+$ 是如何变化的?
9. 设随机变量 ξ 与 η 均服从正态分布, $\xi \sim N(\mu, 4^2)$, $\eta \sim N(\mu, 5^2)$, 试比较以下 p_1 和 p_2 的大小. $p_1 = P(\xi \leq \mu - 4)$, $p_2 = P(\eta \geq \mu + 5)$.
10. 设随机变量 $\xi \sim N(3, 2^2)$, 试求 a 使得 $P(\xi < a) = 0.9$.

§ 2.4 随机变量函数的分布

在实际问题中,不仅要研究随机变量,而且还要研究随机变量的函数,例如在分子物理学中已知分子的速度 v 是一个随机变量,这时分子的动能 $W = \frac{1}{2}mv^2$ 就是一个随机变量函数. 下面就研究如何根据随机变量的分布列(或联合分布列) 或分布密度(联合密度) 来求随机变量函数的分布列(分布密度).

一、离散型随机变量函数的分布

1. 一维离散型随机变量函数的分布

设 $g(x)$ 是定义在随机变量 ξ 的一切可能取值 a 的集合上的函数,这样随机变量 η , 当 ξ 取值 a 时,它的取值为 $y = g(a)$,称 η 为随机变量 ξ 的函数,记为 $\eta = g(\xi)$.

设 ξ 为离散型随机变量,则 $\eta = g(\xi)$ 也为离散型随机变量.

若 ξ 的分布列为 $P(\xi = a_i) = p_i, i = 1, 2, 3, \dots$, 求 $\eta = f(\xi)$ 的分布列.

(1) 若随机变量 ξ 取不同的值 a_i 时, 随机变量函数 $\eta = g(\xi)$ 也取不同的值 $b_i = g(a_i), i = 1, 2, 3, \dots$, 则 η 的分布列为 $P(\eta = b_i) = p_i$.

【例 2.4.1】设 ξ 的分布列为

表 2-23

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

求 $\eta = 2\xi + 1$ 的分布列.

解: η 的可能取值为 1, 3, 5, 7, 9, 11, 它们互不相同,

则 η 的分布列为

表 2-24

η	1	3	5	7	9	11
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2) 若 ξ 取不同的 a_i 时, 而函数的取值 η 中有相等的, 则应把那些相等的值分别合并, 并根据概率的可加性把对应的概率相加, 就得到 η 的分布列. 不妨设 η 的可能取值为 $b_1,$

$b_2, \dots, b_j, \dots$, 则 $P(\eta = b_j) = \sum_{i: g(a_i)=b_j} p_i \quad j = 1, 2, \dots$, 即为 η 的分布列.

【例 2.4.2】设 ξ 的分布列为

表 2-25

ξ	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

求 $\eta = (\xi - 2)^2$ 的分布列.

解: η 的可能取值为 0, 1, 4, 9, 它们有相同的. 则将它的所对应的概率相加得 η 的分布列为

表 2-26

η	0	1	4	9
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

2. 二维离散型随机变量函数的分布列

设 (ξ, η) 是一个二维离散型变量, $f(x, y)$ 是实变量 x 和 y 的单值函数, 这时 $\zeta = f(\xi, \eta)$ 仍是一个一维的离散型随机变量.

设 ξ, η, ζ 的可能取值为: $a_i, b_j, c_k (i, j, k = 1, 2, \dots)$. 令

$$c_k = \{(a_i, b_j) \mid f(a_i, b_j) = c_k\} \quad (i, j, k = 1, 2, \dots)$$

$$\text{则有 } P(\zeta = c_k) = P((\xi, \eta) \in c_k) = \sum_{a_i, b_j \in c_k} P(\xi = a_i, \eta = b_j)$$

【例 2.4.3】 设 ξ 与 η 是两个独立的随机变量, 它们分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的 Poisson 分布, 求 $\zeta = \xi + \eta$ 的分布列.

解: 由 ξ 与 η 的独立性可知

$$\begin{aligned} P(\zeta = k) &= \sum_{i=0}^k P(\xi = i, \eta = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k P(\xi = i)P(\eta = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

此例说明了 Poisson 分布对加法具有封闭性. 通常称为该分布具有可加性.

类似地, 可以证明二项分布也是一个具有可加性的分布, 即若 ξ, η 是两个独立的随机变量, 且 $\xi \sim b(k; n_1, p), \eta \sim b(k; n_2, p)$, 则 $\xi + \eta \sim b(k; n_1 + n_2, p)$.

【例 2.4.4】 设 ξ 与 η 为独立分布的离散型随机变量, 其分布列为:

$$P(\xi = n) = P(\eta = n) = \frac{1}{2^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

求 $\zeta = \xi + \eta$ 的分布列.

$$\text{解: } P(\zeta = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(\xi = i, \eta = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} P(\xi = i)P(\eta = k - i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^{k-i}} = \frac{k-1}{2^k}, \quad k=2,3,\dots$$

二、连续型随机变量函数的分布

求离散型随机变量函数的分布是很简单的事. 一般的, 连续型随机变量的函数不一定是连续型随机变量. 下面我们主要讨论连续型随机变量的函数还是连续型随机变量的情形.

1. 一维连续型随机变量函数的分布

设已知 ξ 的分布函数 $F_\xi(x)$ 或概率密度函数 $p_\xi(x)$, 则随机变量函数 $\eta = g(\xi)$ 的分布函数可按如下方法求得:

先求 η 的分布函数,

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P\{g(\xi) \leq y\} = P(\xi \in C_y)$$

其中 $C_y = \{x \mid g(x) \leq y\}$.

而 $P(\xi \in C_y)$ 常常可用 ξ 得分布函数 $F_\xi(x)$ 来表达或用其概率密度函数 $p_\xi(x)$ 的积分表达

$$F_\eta(y) = P(\xi \in C_y) = \int_{C_y} p_\xi(x) dx$$

再求 η 的密度函数, 通过对 η 的分布函数 $F_\eta(y)$ 求导, 求出 η 的密度函数.

这种求随机变量函数分布的方法被称为分布函数法.

【例 2.4.5】 设随机变量 ξ 的密度函数为 $p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

求 $\eta = 2\xi + 8$ 的密度函数.

解: 先求 η 的分布函数 $F_\eta(y)$,

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(2\xi + 8 \leq y) = P(\xi \leq \frac{y-8}{2}) = F_\xi(\frac{y-8}{2})$$

对 η 的分布函数 $F_\eta(y)$ 求导, 得到 η 的密度函数

$$p_\eta(y) = \frac{dF_\xi(\frac{y-8}{2})}{dy} = p_\xi(\frac{y-8}{2}) \cdot \frac{1}{2}$$

注意到 $0 < x < 4$, 即 $8 < y < 16$ 时, $p_\xi(\frac{y-8}{2}) = \frac{y-8}{16}$

$$\text{故 } p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

仿照上面的方法可以证明下面定理.

定理 2.4.1, 设 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\eta = a\xi + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) (a \neq 0)$

这个定理表明: 正态变量的线性函数仍为正态变量, 若取 $a = \frac{1}{\sigma}, b = -\frac{\mu}{\sigma}$, 则 $\eta = a\xi + b =$

$\frac{\xi - \mu}{\sigma}$ 服从标准正态分布, 此即上一节定理 2.3.1.

【例 2.4.6】设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,4)$, 试求 $\eta = -\xi$ 的分布.

解: 由定理 2.4.1 可知 η 仍是正态变量.

它的分布仍为 $N(0,4)$.

这表明 ξ 与 $-\xi$ 有相同的分布, 但这两个随机变量是不相等的, 所以我们要明确, 分布相同与随机变量相等是两个完全不同的概念.

【例 2.4.7】设随机变量 $\xi \sim N(0,1)$, 求 $\eta = \xi^2$ 的密度函数.

解: 先求 $\eta = \xi^2$ 的分布函数 $F_\eta(y)$, 由于 $\eta = \xi^2 \geq 0$, 故

当 $y \leq 0$ 时, 有 $F_\eta(y) = 0$, 从而有 $p_\eta(y) = 0$;

当 $y > 0$ 时, 有

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(\xi^2 < y) = P(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}) = F_\xi(\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y})$$

因此, 再用求导的方法求出密度函数为

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

【例 2.4.8】设随机变量 ξ 服从参数为 λ 的指数分布, 求 $\eta = \min\{\xi, 2\}$ 的分布函数.

解: 由已知, ξ 的分布函数为 $F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \eta = \min\{\xi, 2\} \text{ 的分布函数为 } F_\eta(y) &= P(\eta < y) = P(\min\{\xi, 2\} < y) \\ &= 1 - P(\min\{\xi, 2\} \geq y) \\ &= 1 - P(\xi \geq y, 2 \geq y) \end{aligned}$$

当 $y \leq 2$ 时, $F_\eta(y) = 1 - P(\xi \geq y) = P(\xi < y) = F_\xi(y)$,

当 $y > 2$ 时, $P(\xi \geq y, 2 \geq y) = 0$, 于是, $F_\eta(y) = 1$.

$$\text{代入 } \xi \text{ 的分布函数中可得 } F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y}, & 0 < y \leq 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

注意: 在本例中, 虽然 ξ 为连续型随机变量, 但 η 不是连续型随机变量, 也不是离散型随机变量, 因为 η 的分布函数在 $y = 2$ 处间断.

习题 2. 4

1. 设 ξ 的分布列为

表 2-27

ξ	-2	-1	0	1	2	3
p	$2a$	$\frac{1}{10}$	$3a$	a	a	$2a$

- 求: (1) a ; (2) $\eta = \xi^2 - 1$ 的分布列.
2. 设 ξ 的分布列为 $P(\xi = k) = \frac{1}{2^k} (k = 1, 2, \cdots)$, 求 $\eta = \sin(\frac{\pi}{2}\xi)$ 的分布列.
3. 设 (ξ, η) 的分布列为

表 2-28

$\xi \backslash \eta$	-1	1	2
-1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

- 求: (1) $\zeta = \xi + \eta$; (2) $\zeta = \xi \cdot \eta$; (3) $\zeta = \max(\xi, \eta)$ 的分布列.
4. 设随机变量 ξ 服从 $[-1, 2]$ 上的均匀分布, 记 $\eta = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0; \\ -1, & \xi < 0. \end{cases}$ 求 η 的分布列.
5. 设随机变量 ξ 服从 $[a, b]$ 上的均匀分布, 令 $\eta = c\xi + d (c \neq 0)$, 试求随机变量 η 的密度函数.
6. 设随机变量 $\xi \sim N(0, 1)$, 求 $\eta = |\xi|$ 的密度函数.
7. 设 ξ 的密度函数为 $p_{\xi}(x) = \begin{cases} x^3 e^{-x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $\eta = \ln \xi$ 的密度函数.
8. 设 ξ 的密度函数为 $p(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求 $\eta = e^{-\xi}$ 的密度函数.
9. 设 $\eta = \ln \xi \sim N(1, 2^2)$, 求 (1) ξ 的分布密度; (2) $P(\frac{1}{2} < \xi < 2)$.
10. 设随机变量 ξ 的密度函数为 $p(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求随机变量 $\eta = \xi^2 + 1$ 的分布函数与密度函数.