



“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

高等数学
工科类专业适用

主编 金桂堂 杨俊萍

北京出版集团公司
北京出版社

工科类专业适用

高等数学

GAODENG SHUXUE

主 编 金桂堂 杨俊萍

$$= 2 \cos^2 \alpha -$$

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$



北京出版集团公司
北 京 出 版 社

目 录

第一章 函数	1
1.1 函数的概念	1
习题 1.1	8
1.2 初等函数及其图形特征	10
习题 1.2	14
1.3 由方程确定的函数	14
习题 1.3	15
1.4 总结与提高	17
复习题	21
第二章 极限与连续	24
2.1 极限的概念	24
习题 2.1	31
2.2 无穷小与无穷大	32
习题 2.2	36
2.3 极限运算法则	37
习题 2.3	41
2.4 两个重要极限	41
习题 2.4	46
2.5 函数的连续性	46
习题 2.5	51
2.6 总结与提高	52
复习题	57
第三章 一元函数微分学	59
3.1 导数的概念	59
习题 3.1	65
3.2 导数的计算	66
习题 3.2	71
3.3 微分与方程所确定函数的导数	72
习题 3.3	79
3.4 导数的应用	81

习题 3.4	97
3.5 总结与提高	100
复习题	104
第四章 一元函数积分学	108
4.1 定积分概念	108
习题 4.1	116
4.2 不定积分	117
习题 4.2	120
4.3 定积分的计算	121
习题 4.3	129
4.4 反常积分与积分的应用	130
习题 4.4	140
4.5 总结与提高	141
复习题	146
第五章 多元函数微积分	151
5.1 空间解析几何简介	151
习题 5.1	157
5.2 多元函数微分学	158
习题 5.2	163
5.3 偏导数与全微分、二元函数的极值	164
习题 5.3	174
5.4 二重积分	175
习题 5.4	184
5.5 总结与提高	185
复习题	195
第六章 常微分方程	200
6.1 一阶微分方程及其解法	200
习题 6.1	204
6.2 二阶线性微分方程	205
习题 6.2	212
6.3 总结与提高	213
复习题	220
第七章 无穷级数	222
7.1 数项级数及其收敛性	222
习题 7.1	230
7.2 函数项级数	230
习题 7.2	237

7.3 傅里叶(Fourier)级数	238
习题 7.3	242
7.4 总结与提高	243
复习题	249
附录 F1 Mathematica 系统使用入门	252
F1.1 Mathematica 系统简介	252
F1.2 Mathematica 系统使用入门	253
F1.3 Mathematica 流程	264
F1.4 Mathematica 的微积分命令	267
附录 F2 常用初等数学基本公式	272
附录 F3 简单不定积分表	277
习题参考答案	281

北京出版社

一个国家只有数学蓬勃地发展,才能展现它国力的强大. 数学的发展和至善和国家繁荣昌盛密切相关.

——拿破仑·波拿巴(1769—1821)(军事家,政治家,数学家,法兰西第一帝国皇帝)

第二章 极限与连续

极限是数学中的一个重要的基本概念,极限思想是微积分理论的奠基石,极限是贯穿高等数学各知识环节的主线,极限的观点和方法为深入研究函数、解决实际问题提供了有效的工具,本章将在函数有关知识的基础上,讨论函数的极限和函数的连续性问题.

2.1 极限的概念

2.1.1 数列的极限

1. 数列极限的定义

引例 1 在私营商店买东西时,顾客经常会和商家“对半还价”. 如商家第一次开价 1 200 元,顾客减去一半,只给 600 元;第二次商家加上被减去的一半,要价 900 元,而顾客减去被加上的一半,只给 750 元;第三次商家再加上被减去的一半,要价 825 元,而顾客又减去被加上的一半,只给 787.5 元……如此讨还下去,顾客和商家的价格构成下面两个数列:

商家价格: 1 200, 900, 825, 806.25, 801.57, 800.40, 800.13, …

顾客价格: 600, 750, 787.5, 796.88, 799.23, 799.81, 799.98, …

可以想象,顾客和商家的价格会无限地接近于一个确定的数值: 800 元.

下面我们在已经学过数列概念的基础上,进一步考察当自变量 n 无限增大时,数列 $y_n = f(n)$ 的变化趋势. 我们先看下面两个数列:

$$(1) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$$

$$(2) 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n - (-1)^n}{n}, \dots.$$

当 n 无限增大时,数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 无限接近于 0; $\left\{\frac{n - (-1)^n}{n}\right\}$ 无限接近于 1.

归纳这两个数列的变化趋势,可知当 n 无限增大时,两数列相应的 y_n 都分别无限接近于一个确定的常数. 一般地,我们有下面的定义:

定义 2.1 如果当 n 无限增大时,数列 $\{y_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 A , 那么 A 就

叫做数列 $\{y_n\}$ 的极限,记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ 或当 $n \rightarrow \infty$ 时, $y_n \rightarrow A$.

因此,数列(1)的极限是0,即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$;数列(2)的极限是1,即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (-1)^n}{n} = 1$.

注意:

(1) 并不是任何数列都有极限.有极限的数列称为收敛数列,反之称为发散数列.如数列 $\{n\}$ 、 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ 等为发散数列.发散数列也常说成数列的极限不存在或数列发散.

(2) 若数列 $\{y_n\}$ 收敛,则其极限值唯一.

(3) 收敛数列必有界.

例1 观察下列数列的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $\{y_n\}, y_n = \frac{1}{n}$; (2) $\{y_n\}, y_n = 2 - \frac{1}{n^2}$; (3) $\{y_n\}, y_n = (-1)^n \frac{1}{3^n}$.

解:(1) 当 n 依次取自然数1,2,3,4,5,...时, $\{y_n\}$ 的各项顺次为

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

因此当 n 无限增大时, y_n 无限接近于0,所以根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(2) 当 n 依次取自然数1,2,3,4,5,...时, $\{y_n\}$ 的各项顺次为

$$2-1, 2-\frac{1}{4}, 2-\frac{1}{9}, 2-\frac{1}{16}, 2-\frac{1}{25}, \dots$$

因此当 n 无限增大时, y_n 无限接近于2,所以根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\right) = 2.$$

(3) $y_n = (-1)^n \frac{1}{3^n}$ 当 n 依次取自然数1,2,3,4,5,...时, $\{y_n\}$ 的各项顺次为

$$-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \dots$$

因此当 n 无限增大时, y_n 无限接近于0,所以根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{3^n} = 0.$$

例2 求常数列 $y_n = -3$ 的极限.

解:这个数列的各项都是-3,故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-3) = -3.$$

一般地,任何一个常数列的极限都是这个常数本身,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = C \quad (C \text{ 为常数}).$$

注意:

数列极限除了可以通过观察通项公式求得外,还可以通过观察图像而得.

例3 讨论如下两个数列的极限:

(1) $y_n = 2^n$ (2) $y_n = (-1)^{n+1}$

解:(1)当 n 无限增大时, 2^n 也无限增大,不能无限接近于一个确定的常数,所以这个数列没有极限.

(2)当 n 无限增大时, $y_n=(-1)^{n+1}$ 在1与-1两个数上来回跳动,不能无限接近于一个确定的常数,所以这个数列也没有极限.

2. 数列极限的四则运算

前面用观察的方法求出了一些简单数列的极限.但对于较复杂的数列,观察法求极限就很难,因此还需要研究数列极限的运算.下面给出数列极限的四则运算法则(证明从略).

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$,则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b; \text{特别地 } y_n = C \text{ 时有}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot x_n) = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C \cdot a \quad (C \text{ 是常数});$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

注意:法则(1)(2)可推广到三个及三个以上有限个函数的极限情形.

例4 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2$,求:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{5}; \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3x_n - \frac{y_n}{5} \right).$$

$$\text{解:}(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3 \times 5 = 15;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{5} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{2}{5};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3x_n - \frac{y_n}{5} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{5} = 15 - \frac{2}{5} = 14 \frac{3}{5}.$$

例5 求下列各极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{1 + n^2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2} \right).$$

$$\text{解:}(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = 4 - 0 + 0 = 4;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{1 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{3 - 0 + 0}{0 + 1} = 3;$$

(3) 此例当 $n \rightarrow \infty$ 时,项数无限增多,不能直接用极限的加法法则,应先求和再计算:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. 无穷递缩等比数列的求和公式

先看下面的例子.

例 6 求等比数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ 前 n 项的和, 并求当 $n \rightarrow \infty$ 时数列的极限.

解: 这个等比数列的公比是 $\frac{1}{2}$. 根据等比数列前 n 项和公式, 得

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$.

一般地, 等比数列 $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}, \dots$, 当 $|q| < 1$ 时, 称为无穷递缩等比数列. 其前 n 项的和 S_n 当 $n \rightarrow \infty$ 的极限叫做这个无穷递缩等比数列的和, 并用符号 S 表示. 因

为 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 所以

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = \frac{a_1}{1-q}.$$

公式 $S = \frac{a_1}{1-q}$ 就是无穷递缩等比数列的求和公式.

例 7 将下列循环小数化为分数:

(1) $0.\dot{3}$; (2) $0.3\dot{4}5$.

解: (1) $0.\dot{3} = 0.333\dots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \dots$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \dots \\ &= \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

(2) $0.3\dot{4}5 = 0.3 + 0.045 + 0.000\,45 + \dots = \frac{3}{10} + \frac{45}{1\,000} + \frac{45}{10\,000} + \dots$

$$= \frac{3}{10} + \frac{\frac{45}{1\,000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{3}{10} + \frac{45}{990} = \frac{19}{55}.$$

2.1.2 函数的极限

引例 2 将一块白薯放在温度为恒温 100°C 电烤箱中, 无论白薯放入时的温度高于还是低于 100°C , 由于热交换其温度将逐渐靠近烤箱的温度——恒温 100°C . 随着时间的推移, 白薯与烤箱间的热交换变得缓慢, 当时间足够长时, 白薯的温度将与烤箱的温度持平. (图 2-1)

问题的特征: 当自变量(时间)逐渐增大时, 相应的函数值随之趋近于一个确定的

常数.

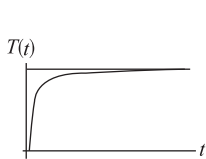


图 2-1

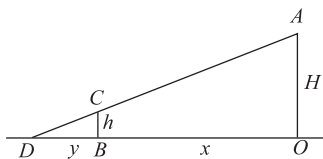


图 2-2

引例 3 在夜间,如果一个人沿直线走向路灯的正下方时,路灯照射出的人影也会随着人的走动向着路灯正下方那点移动,当此人越来越接近路灯正下方时,其影子的长度逐渐趋近于零.(图 2-2)

问题的特征:当自变量逐渐趋近于某一点时,相应的函数值随之趋近于一个确定的常数.

一般地,函数的极限,主要有以下两种情形:

(1) 当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大,即趋向无穷大(记为 $x \rightarrow \infty$)时,函数 $f(x)$ 的极限;

(2) 当自变量 x 任意接近于 x_0 ,即趋向于有限值 x_0 (记为 $x \rightarrow x_0$)时,函数 $f(x)$ 的极限.

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

先看下面的例子:

考察 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的变化趋势.

由图 2-3 可以看出,当 x 的绝对值无限增大时, $f(x)$ 的值无限接近于 0. 即当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$.

对于这种当 $x \rightarrow \infty$ 时,考察函数 $f(x)$ 的变化趋势的问题,给出下面的定义:

定义 2.2 如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x \rightarrow \infty$)时,函数 $f(x)$ 趋于某一个确定的常数 A ,则称 A 为当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

当然,这里是假定函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时是有定义的.

由上述定义知,当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$ 的极限是零,即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

注意:

在以上函数极限定义中,自变量 x 的绝对值无限增大指的是 x 取正值而无限增大(记为 $x \rightarrow +\infty$),同时也指 x 取负值而绝对值无限增大(记为 $x \rightarrow -\infty$). 但有时 x 的变化趋向只能或只需取这两种变化中的一种情形如引例 2. 为此,给出当 $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$ 时函数极限的定义:

定义 2.3 如果当 $x > 0$ 且无限增大时,函数 $f(x)$ 趋于某一个确定的常数 A ,则称 A 为当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记作 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$.

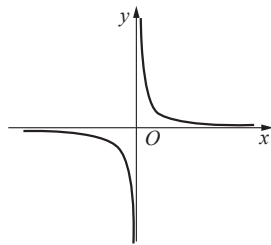


图 2-3

定义 2.4 如果当 $x < 0$ 且 x 的绝对值无限增大时, 函数 $f(x)$ 趋于某一个确定的常数 A , 则称 A 为当 $x \rightarrow -\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty).$$

如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 时就有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x$.

解: 由指数函数的图像可知, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $3^x \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$.

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

解: 观察解析式 $1 + \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 无限变小趋于 0; 所以有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

例 10 设函数 $f(x) = \sin x$, 试讨论当 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限.

解: 由正弦函数的周期性, 可得结论: 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x) = \sin x$ 的值在 -1 和 $+1$ 之间无休止地来回摆动, 不趋向任何常数, 所以说该函数当 $x \rightarrow \infty$ 时无极限.

由上述定义 2.2, 定义 2.3, 定义 2.4 可知有如下定理.

定理 2.1 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

例 11 讨论 $y = \arctan x$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限.

解: 由反正切函数的图像(图 2-4)知,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

由极限存在的充要条件定理 2.1 知, 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

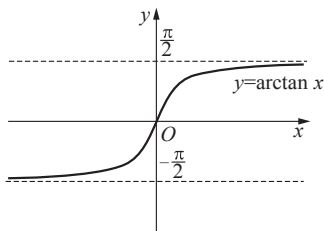


图 2-4

2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

回顾人影长度问题, 当人往灯的正下方走(人距灯正下

方趋于 0 时)人影长度趋于 0. 再考察当 $x \rightarrow 3$ 时, 函数 $f(x) = \frac{x}{3} + 1$ 的变化趋势. 由图 2-5 可见, 当 x 从 3 的左侧及右侧趋于 3 时, 即当 $x \rightarrow 3$ 时, $f(x) = \frac{x}{3} + 1$ 的值无限接近于 2.

对于这种当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的变化趋势, 给出下面的定义:

定义 2.5 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义, 如果当 x 趋于 x_0 (但 x 可以不等于 x_0) 时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A , 则称当 x 趋于

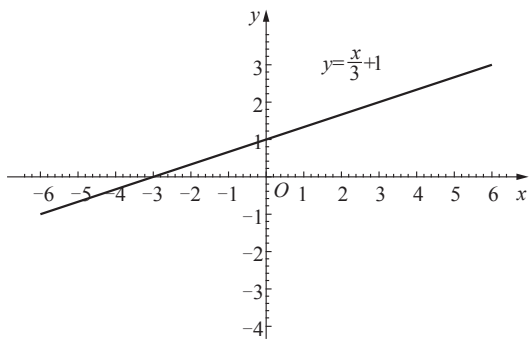


图 2-5

x_0 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

亦称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限存在.

由前述 $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{3} + 1 \right) = 2$.

例 12 根据极限定义说明:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} 2x = 2x_0$; (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$.

解: (1) 当自变量 x 趋于 x_0 时, 函数 $2x$ 趋于 $2x_0$, 于是依定义有 $\lim_{x \rightarrow x_0} 2x = 2x_0$.

(2) 无论自变量取何值, 函数值都取相同的值 C , 那么函数值当然趋于常数 C , 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, 由上得知, 常函数的极限是它本身.

例 13 考察当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的变化趋势.

解: 画出函数的图像如下:

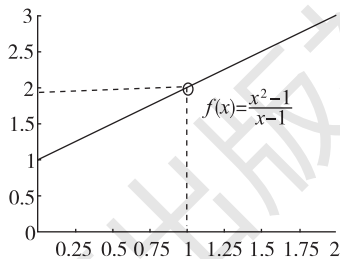


图 2-6

由图 2-6 可见, 当 x 从 1 的左侧及右侧趋于 1 时, 即当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的值无限接近于 2. 于是有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

注意:

在定义 2.5 中, 只假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 而函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时可以无定义, 因此极限与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关.

3. 左极限与右极限

定义 2.6 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 右侧的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义, 如果当 $x > x_0$ 且趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A , 则称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 的右极限是 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$.

定义 2.7 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 左侧的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义, 如果当 $x < x_0$ 且趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A , 则称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 的左极限是 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-)$.

定理 2.2 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右

极限存在且都等于 A , 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

例 14 设 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 1, \\ 3x, & x < 1, \end{cases}$ 试判断 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 是否存在.

解: 先分别求 $f(x)$ 当 $x \rightarrow 1$ 时的左、右极限:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) = 3,$$

于是由定理 2.2 知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

例 15 判断 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 是否存在.

解: 当 $x > 0$ 且趋于 0 时, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty, e^{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$; 当 $x < 0$ 且趋于 0 时, $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty, e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$. 虽然左极限存在, 但右极限不存在, 由充分必要条件定理可知 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

习题 2.1

A 组

1. 观察并写出下列极限值:

$$(1) y_n = \frac{n}{n+1} \quad (n \rightarrow \infty); \quad (2) y_n = n(-1)^n \quad (n \rightarrow \infty);$$

$$(3) y_n = \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n \rightarrow \infty); \quad (4) y_n = 1 - \frac{1}{10^n} \quad (n \rightarrow \infty);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^x; \quad (6) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x;$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x; \quad (8) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 8).$$

2. 求极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{8 - n^2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \right].$$

3. 证明函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -1, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x \rightarrow 1$ 时极限不存在.

4. 求下列无穷递缩等比数列的和:

$$(1) 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \cdots;$$

$$(2) 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots;$$

$$(3) 1, -x, x^2, -x^3, \cdots (|x| < 1).$$

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x < 0, \\ a + e^x, & x > 0, \end{cases}$ 求 a 为何值时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在?

B 组

1. 将下列循环小数化为分数:

(1) $0.\dot{4}$; (2) $0.4\dot{1}\dot{2}$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x+1, & x > 0, \end{cases}$ 画出它的图像, 并求当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的左、右极限, 从而说明在 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 的极限是否存在.

3. 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 画出它的图像, 求当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的左、右极限, 从而说明在 $x \rightarrow 0$ 时函数的极限是否存在.

4. 已知一个无穷递缩等比数列各项的和为 12, 而各项的平方和为 72, 求这个数列的首项和公比, 并写出这个数列的通项.

2.2 无穷小与无穷大

在有极限的变量中, 以零为极限的变量, 在极限不存在的变量中, 极限为无穷大的变量, 这两种变量极为重要. 本节我们就要讨论这两种变量以及它们的关系.

2.2.1 无穷小量

1. **定义 2.8** 以零为极限的变量称为这一极限过程中的无穷小量, 简称无穷小.

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = 0$, 所以, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 变量 $\frac{1}{2^x}$ 是无穷小.

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$, 所以, 当 $x \rightarrow 1$ 时, 变量 $(x-1)^2$ 是无穷小.

类似可知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x, x^3, \sqrt[5]{x}, \ln(1+x)$ 都是无穷小; 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x+3}, \frac{1}{x^2}$ 是无穷小.

无穷小常用希腊字母 α, β, γ 来表示.

注意:

(1) 无穷小是相对于自变量某一变化过程而言的, 例如, $\sin x$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是无穷小; 但在 $x \rightarrow \infty$ 时, 它不是无穷小, 而是有界变量.

(2) 无穷小是指变量的绝对值无限地变小, 而不是变量无限地变小.

(3) 无穷小不是很小的数, 而是一个以零为极限的变量, 在数中, 只有数零可看为无穷小, 但无穷小不一定是零.

例 16 以下函数在怎样的变化过程中是无穷小?

(1) $f(x) = \frac{x-1}{x}$; (2) $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

解: (1) $\because \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x} = 0, \therefore f(x) = \frac{x-1}{x}$ 当 $x \rightarrow 1$ 时是无穷小;

(2) $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x-1} = 0, \therefore f(x) = \frac{x}{x-1}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时是无穷小.

2. 无穷小的运算法则

- (1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.
- (2) 有限个无穷小的积仍为无穷小.
- (3) 常数与无穷小的积仍为无穷小.
- (4) 有界函数与无穷小的积仍为无穷小.
- (5) 无穷小除以极限不为零的函数的商仍为无穷小.

例 17 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.

解: 因为 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 所以 $\sin \frac{1}{x}$ 是有界函数; 当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 是无穷小量. 根据性

质(4), 乘积 $x^2 \sin \frac{1}{x}$ 也是无穷小量, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

同理, 不难求得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

3. 无穷小的比较

由无穷小的运算法则可知, 两个无穷小之代数和与积仍为无穷小, 而两个无穷小的商则会有各种不同的状态, 例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (2.4 节讲述), $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+9}{x^2} = \infty$ 等, 两个无穷小之比的极限反映了它们趋于 0 的速度的快慢, 因此可将无穷小做比较. 为讨论方便以下所说的无穷小均指非零无穷小.

定义 2.9 设 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$ (α 与 β 都是在同一自变量的变化过程中的无穷小).

(1) $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 为 α 的高阶无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$, 或称 α 为 β 的低阶无穷小.

(2) $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c$ (c 为非零常数), 则称 β 为 α 的同阶无穷小. 特别地, 当 $c=1$ 时, 称 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\beta \sim \alpha$.

(3) $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c$ (c 为非零常数, $k > 0$) 则称 β 为 α 的 k 阶无穷小.

例 18 比较当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $\frac{1}{1-x} - 1 - x$ 与 x^2 阶数的高低.

解: 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-x} - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x)(1-x)}{x^2(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1 \end{aligned}$$

所以, $\frac{1}{1-x} - 1 - x \sim x^2$. 即当 $x \rightarrow 0$ 时 $\frac{1}{1-x} - 1 - x$ 是与 x^2 等价的无穷小.

当 $x \rightarrow 0$ 时, 常见的等价无穷小有

$\sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x,$
 $\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 = e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a.$

利用无穷小的等价关系,可使一些极限计算变得简单,下面是等价无穷小的代换定理.

定理 2.3 设 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$, 且 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 若 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

证明: $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$

定理 2.4 设 α 为无穷小, 则 $\alpha + o(\alpha) \sim \alpha$.

4. 函数极限与无穷小关系定理

定理 2.5 极限 $\lim f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是函数 $f(x)$ 可表示为常数 A 与无穷小 α 的和, 即

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha \text{ (其中 } \alpha \rightarrow 0 \text{)}.$$

例如, 因 $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, 而当 $x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, 即当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 可以表示为常数 1 和无穷小 $\frac{1}{x}$ 的和, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ (当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{)}.$$

2.2.2 无穷大量

变量 y 没有极限, 但其绝对值的总体变化趋势无限地增大, 此时的 y 有明显的变化趋势, 我们常用记号“ $\lim y = \infty$ ”表示这种变量的变化趋势. 为了便于叙述这种变化趋势, 也说变量 y 的极限是无穷大量.

定义 2.10 在自变量的某个变化过程中, 绝对值的总体变化趋势无限增大的变量称为这一变化过程中的无穷大量, 简称无穷大.

例如, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$, 所以 $y = \frac{1}{x-1}$ 是 $x \rightarrow 1$ 时的无穷大;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, 所以变量 $\ln x$ 是 $x \rightarrow 0^+$ 时的负无穷大;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, 所以 e^x 是 $x \rightarrow +\infty$ 时的正无穷大;

类似地, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^3}$ 是无穷大; 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\cot x, \frac{1}{\sqrt{x}}$ 是无穷大; 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $x+3, x^2$ 是无穷大.

注意:

- (1) 无穷大是一个变量, 无论多么大的一个常数, 都不能作为无穷大.
- (2) 无穷大是有条件的, 当我们说某函数是无穷大时, 必须同时指出它的极限变化过程.
- (3) 无穷大是函数极限不存在的一种情形, 这里使用了极限记号 $\lim f(x) = \infty$, 但并不表示函数 $f(x)$ 的极限存在.

(4) 函数在变化过程中, 绝对值越来越大且是无限增大时, 才能称为无穷大. 例如当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = x \sin x$ 可以无限增大但存在系列 $x = n\pi$ 使 $f(n\pi) = 0$, 不是无穷大.

2.2.3 无穷小与无穷大之间的关系

大家可以看出, 当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 是无穷小, 而 $\frac{1}{x^2}$ 是无穷大; 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $x+3$ 是无穷大, 而 $\frac{1}{x+3}$ 是无穷小. 这说明无穷大与无穷小存在倒数关系.

由无穷小和无穷大的定义可以得到二者之间有如下结论:

定理 2.6 如果 $f(x)$ 在自变量 x 某一变化趋势下是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 在 x 的相同变化趋势下是无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 在 x 的某种变化趋势下是无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 在 x 的相同变化趋势下是无穷大.

无穷小与无穷大的这种关系是显然的, 这里不作证明.

例 19 直观判断下列变量, 在什么条件下是无穷小, 又在什么条件下为无穷大?

$$(1) y = \frac{x}{x-5}; \quad (2) y = \ln(1+x).$$

解: (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{x}{x-5} \rightarrow 0$, 所以 $y = \frac{x}{x-5}$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小; 当 $x \rightarrow 5$ 时, $\frac{x}{x-5} \rightarrow \infty$, 所以 $y = \frac{x}{x-5}$ 是 $x \rightarrow 5$ 时的无穷大.

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \rightarrow \ln 1 = 0$, 所以此时它是无穷小; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\ln(1+x) \rightarrow +\infty$, 所以此时它是无穷大; 当 $x \rightarrow -1$ 时, $\ln(1+x) \rightarrow -\infty$, 所以此时它也是无穷大.

例 20 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x-1}$.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+4} = 0$, 所以 $\frac{x-1}{x+4}$ 是 $x \rightarrow 1$ 时的无穷小, 根据无穷小与无穷大的关系可知, 其倒数 $\frac{x+4}{x-1}$ 是当 $x \rightarrow 1$ 时的无穷大, 即

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x-1} = \infty.$$

例 21 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x + 2)$.

解: 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0.$$

即 $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小, 所以其倒数 $x^2 - 3x + 2$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x + 2) = \infty$.

例 22 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{x^2 + 7}$.

解:因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+7}{2x^3-x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}} = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-x^2+5}{x^2+7} = \infty$.

例 23 求极限 $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} \right)$.

解:因为当 $x \rightarrow -2$ 时, $\frac{1}{x+2}$ 和 $\frac{1}{x^3+8}$ 都是无穷大,但在 $x \rightarrow -2$ 的过程中, $x \neq -2$.

所以 $\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} = \frac{(x^2-2x+4)-12}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{x-4}{x^2-2x+4}$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-4}{x^2-2x+4} = \frac{-6}{4+4+4} = -\frac{1}{2}.$$

例 24 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$.

解:令 $t = e^{\frac{1}{x}}$, 则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $t \rightarrow +\infty$, 同时 $e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{t}$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = 1.$$

习题 2.2

A 组

1. 指出下列变量在 x 的何种变化趋势下是无穷小?

(1) $\frac{x-2}{x^2+1}$; (2) $\ln(x-1)$; (3) $e^{-\frac{1}{x}}$; (4) $\arcsin x$.

2. 指出下列变量在 x 怎样的变化趋势下是无穷大?

(1) $\frac{x+1}{x^2-4}$; (2) $\ln(1-x)$; (3) $e^{-\frac{1}{x}}$; (4) $\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \arctan x}$.

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 试确定下列无穷小对于 x 的阶数:

(1) x^3+100x^2 ; (2) $x \sin x$; (3) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

4. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3} \right)$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$; (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3-2x+8}{3x^2+1}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x^2}$; (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$;

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}.$$

B 组

1. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 只是同阶无穷小还是等价无穷小?
2. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 无穷小 $1-x$ 与 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶? 是否等价?
3. 证明: 当 $x \rightarrow -3$ 时, x^2+6x+9 是比 $x+3$ 较高阶的无穷小.

2.3 极限运算法则

本节介绍极限的四则运算法则, 以期找到求较复杂函数极限的更简单和更普遍的方法. 首先我们不加证明地给出几个函数极限的定理.

2.3.1 极限基本性质

定理 2.7 (唯一性) 若函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则极限唯一.

定理 2.8 (局部有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则存在 x_0 的某个空心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$, 使得 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有界.

以上两个定理在其他极限过程的情形下也相应成立.

定理 2.9 (夹逼定理) 设在 x 的相应变化范围内, 有

$$(1) F(x) \leq f(x) \leq G(x);$$

$$(2) \lim F(x) = \lim G(x) = A.$$

则 $\lim f(x)$ 存在, 且 $\lim f(x) = A$.

另外还有极限的保号性和不等式性质, 这里不再介绍.

2.3.2 运算法则

定理 2.10 (四则运算法则) 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则:

$$(1) \text{和(差)的极限存在, 且 } \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B.$$

$$(2) \text{乘积的极限存在, 且 } \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B.$$

$$(3) \lim g(x) = B \neq 0, \text{商的极限存在, 且 } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}.$$

特别地, 有如下结论:

推论 设 $\lim f(x)$ 存在且为 A, C 为常数, n 为正整数, 则有

$$(1) \lim C \cdot f(x) = C \cdot \lim f(x) = CA;$$

$$(2) \lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n.$$

注意:

(1) 极限没加条件时, 泛指 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow x_0, x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-$ 六种极限中的任何一种;

(2) 法则要求每一个参与运算的函数的极限存在;

(3) 商的极限的运算法则有个前提, 即分母的极限不能为零;

(4) 法则(1)(2)可以推广到有限个函数极限的情形.

下面只证明乘法法则,其他法则类似可证.

证明:由题设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$. 根据函数的极限与无穷小的关系,即定理 2.5,有 $f(x) = A + \alpha, g(x) = B + \beta$, 其中 α, β 均为无穷小,于是

$$f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + \alpha B + \beta A + \alpha \beta.$$

由无穷小的性质知, $\alpha B, \beta A, \alpha \beta$ 均为无穷小,和为无穷小,再由定理 2.5,便有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = AB$, 证毕.

定理 2.11 (复合函数的极限) 如果函数 $u = \varphi(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时有极限 u_0 , 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 当 $u \rightarrow u_0$ 时有极限 A , 即 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 那么复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A.$$

例 25 求 $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 1)$.

解:由极限的四则运算法则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 1) &= \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 2x + \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + 1 \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2 \times 2 + 1 = 3 \times 2^2 - 4 + 1 = 9. \end{aligned}$$

由本题结果知,对多项式函数求极限有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p_n(x) = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_0 + a_n = p_n(x_0).$$

例 26 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{3x^2 - 2x + 4}$.

解:因分母的极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 4) = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 4 = 5 \neq 0$, 所以,由商的极限法则,有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{3x^2 - 2x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 4)} = \frac{3}{5}.$$

例 27 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6}{x^2 - 2x - 3}$.

解:因为分母极限为 0,不能用商的极限法则,但分子的极限为 $9 \neq 0$,可以将分式的分子与分母颠倒后再用商的极限法则,即 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+6} = \frac{0}{9} = 0$. 由无穷小与无穷大的倒数关系,得

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6}{x^2 - 2x - 3} = \infty.$$

例 28 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$.

解:易看出,分母与分子的极限都是 0,由于当 $x \rightarrow 1$ 时 $(x-1) \rightarrow 0$,这说明分母与分子有以 0 为极限的公因子 $(x-1)$:

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3),$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

将分子、分母因式分解,约去公因子后,再求极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-3} = \frac{4}{-2} = -2.$$

总结例 25、例 26、例 27 的方法与结果,可推广到一般情况,若 $P(x)$ 是有理分式函数

$$P(x) = \frac{N_n(x)}{M_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$$

在求 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)$ 时,

(1) 若 $M_m(x_0) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \frac{N_n(x_0)}{M_m(x_0)} = P(x_0)$;

(2) 若 $M_m(x_0) = 0$, 而 $N_n(x_0) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \infty$;

(3) 若 $M_m(x_0) = 0$ 且 $N_n(x_0) = 0$, 则 $M_m(x), N_n(x)$ 一定有以 0 为极限的公因子, 将 $M_m(x), N_n(x)$ 因式分解, 约去公因子后, 再求极限.

例 29 求 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{2-x}}{2x+4}$.

解: 分母极限为 0, 不能直接用商的运算法则. 将分子与分母同乘分子的有理化因子, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2 - \sqrt{2-x})(2 + \sqrt{2-x})}{2(x+2)(2 + \sqrt{2-x})} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{2(x+2)(2 + \sqrt{2-x})} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2 + \sqrt{2-x}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

例 30 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 2}{2x^2 + 3x - 1}$.

解: 显然, 分子、分母的极限都不存在, 实际上分子与分母都是无穷大. 用无穷小与无穷大的倒数关系, 将分子、分母同除以 x 的最高次幂, 再用法则求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 2}{2x^2 + 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{2 + 0 - 0} = \frac{1}{2}.$$

例 31 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 9}{4x^3 + 2x - 8}$.

解: 用 x 的最高次幂除分子、分母, 再用法则求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 9}{4x^3 + 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{9}{x^3}}{4 + \frac{2}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \frac{0 - 0}{4 + 0 + 0} = 0.$$

例 32 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{x - 5}$.

解: 在多项式的商函数中, 分子的最高项次数高于分母的最高项次数时, 先求其倒数的极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{3x^2-4x+6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{3 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}} = \frac{0-0}{3-0+0} = 0$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{x - 5} = \infty.$$

根据例 29、例 30、例 31, 有如下结论, 可作公式用.

若 $P(x) = \frac{N_n(x)}{M_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N_n(x)}{M_m(x)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } n < m \text{ 时,} \\ \infty, & \text{当 } n > m \text{ 时.} \end{cases}$$

求分式的极限时, 若分母、分子的极限都是无穷大, 通常称这种极限为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型不定式. 以上三例都是此类不定式.

例 33 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x^2 + 1)$.

解: 本题是复合函数的极限问题, 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1) = +\infty$ 及 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan u = \frac{\pi}{2}$, 由定理 2.11 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x^2 + 1) = \frac{\pi}{2}.$$

例 34 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$.

解: 令 $1+x=t^n$, 得 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 1$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{t^n - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t + 1} = \frac{1}{n}.$$

例 35 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})$.

解: 此例两项极限都不存在, 是“ $\infty - \infty$ ”型极限, 不能直接用极限运算法则, 分子、分母应同乘分子的有理化因式, 于是有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 36 设 $f(x) = x^2$, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

解: 将 $f(x) = x^2$ 代入, 并注意到变量是 h , 不是 x , 得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.
 \end{aligned}$$

注意：今后我们把分子、分母极限都为 0 的分式形式极限称为“ $\frac{0}{0}$ ”型。

习题 2.3

A 组

1. 求下列极限：

- | | |
|---|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5x + 3)$; | (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2}{2x^2 + x - 1}$; |
| (3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + 5}{x - 2}$; | (4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; |
| (5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$; | (6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$; | (8) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x + 5} - 3}$; |
| (9) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$; | (10) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$. |

2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 5$, 求 a 和 b 的值.

3. 求下列极限：

- | | |
|--|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 3}{3(x - 1)^2}$; | (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{3x^3 - x + 9}$; |
| (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x - 7}{x - 8}$; | (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 1)^{20} (2x + 6)^{30}}{(2x - 3)^{50}}$; |
| (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x)$; | (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 1} - x^2)$. |

B 组

1. 由已知条件确定 a, b 的值：

- | | |
|---|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$; | (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$. |
|---|---|

2. 设 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$, 求下列极限：

- | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; | (2) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$; | (3) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$; | (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. |
|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|

3. 设 $\lim f(x)$ 存在, $\lim g(x)$ 不存在, 证明 $\lim [f(x) + g(x)]$ 不存在.

2.4 两个重要极限

本节在极限四则运算法则的基础上, 继续讲极限的求法. 首先给出两个重要极限公

式,然后利用两个重要极限求极限.

下面是两个重要极限.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

分析 这个极限是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,其分子分母都是无穷小量,但无法采用消去零因子的方法计算.这里利用夹逼定理来证明,即设法找两个极限为1的函数将 $\frac{\sin x}{x}$ 夹在当中.

证明: (1) 先证 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. 因为 $x \rightarrow 0^+$, 不妨设 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. 作单位圆, 圆心角 x 所对的弧为 $\widehat{AB}$, 过点 B 作垂线交 OA 于点 C , 过点 A 作圆的切线交 OB 延长线于点 D , 如图 2-7 所示. 则

$\triangle BOA$ 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ $\triangle AOD$ 面积; 而

$$\triangle BOA \text{ 面积} = \frac{1}{2} OA \cdot BC = \frac{1}{2} \sin x;$$

$$\text{扇形 } AOB \text{ 面积} = \frac{1}{2} OA \cdot \widehat{AB} = \frac{1}{2} x;$$

$$\triangle AOD \text{ 面积} = \frac{1}{2} OA \cdot AD = \frac{1}{2} \tan x.$$

所以

$$\sin x < x < \tan x;$$

从而

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x};$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$, 由夹逼定理, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(2) 当 $x < 0$ 时, 令 $t = -x$, 则 $t > 0$, 且当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $t \rightarrow 0^+$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

这个极限通常称为**第一个重要极限**.

注意: 在极限中有三角函数或反三角函数, 且为“ $\frac{0}{0}$ ”型不定式, 求极限时, 常用到此公式.

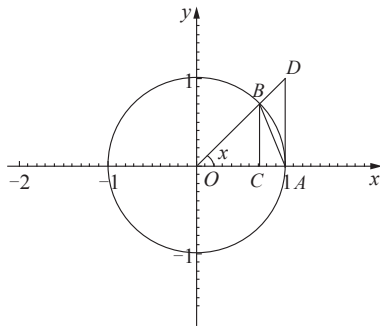


图 2-7

例 37 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$.

注意: 本极限可直接作公式用.

例 38 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \times 1 = 2$.

例 39 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$.

注意: (1) 该极限式也可作为一个公式用.

(2) 由本例及例 37 极限式知, $\tan x$ 、 $\sin x$ 与 x 是 $x \rightarrow 0$ 时的等价无穷小.

例 40 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

解: 方法 1, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$.

方法 2, 因为 $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \times \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

注意: 将极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 中的自变量 x 换成 x 的函数 $\varphi(x)$, 则有公式:

$$\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1.$$

此式称为第一重要极限公式的推广形式.

例 41 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$.

解: 由于 $\frac{\sin(\sin x)}{x} = \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}$, 这里将右端第一个因子中的 $\sin x$ 理解为推广公式中的 $\varphi(x)$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \rightarrow 0$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1 \times 1 = 1.$$

例 42 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x}$.

解: 由于 $\frac{x}{\arcsin x} = \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x}$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \rightarrow 0$. 令 $\arcsin x = t$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

这里 e 是无理数, $e=2.718\ 28\cdots$, 这个极限通常称为第二重要极限(证明略).

取 x 在自然数范围内的一些值, 观察对应的 y 的取值(表 2-1), 可以直观验证公式结论:

表 2-1

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2.000 00	2.593 74	2.704 81	2.716 92	2.718 15	2.718 27	2.718 28

由于当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow 1$, 所以常将 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 称作是“ 1^∞ ”型. 在求幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的极限时, 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, 通常称这种极限为“ 1^∞ ”型不定式. 第二个重要极限公式主要解决“ 1^∞ ”型不定式求极限的问题.

例 43 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

解: 令 $t = -\frac{1}{x}$, 则 $x = -\frac{1}{t}$; 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$. 这时

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1}$$

于是, 由第二个重要极限公式, 便有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1} = \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1} = e^{-1}.$$

例 44 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x}$.

解: 这是“ 1^∞ ”型不定式, 用第二个重要极限. 令 $t = \frac{2}{x}$, 则 $2x = \frac{4}{t}$, $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$,

于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{4}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^4 = \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^4 = e^4.$$

例 45 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x+3}$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^3 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x \times \frac{1}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^3 = e^{\frac{1}{2}} \times 1 = e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

例 46 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x+5}$.

解: 令 $-\frac{1}{x} = t$, 于是 $x = -\frac{1}{t}$. 代入有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x+5} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{2}{t}+5} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{2}{t}} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^5 \\ &= [\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}]^{-2} \cdot [\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)]^5 \\ &= e^{-2} \times 1^5 = e^{-2}.\end{aligned}$$

注意: 总结以上几例, 可有下面一般结论:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx+c} = e^{ab}.$$

利用此结论易求有关函数的极限.

例 47 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{4x-3}$.

解: 由于 $a = \frac{1}{2}, b = 4, c = -3$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{4x-3} = e^{\frac{1}{2} \times 4} = e^2$.

例 48 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

解: 这是“ 1^∞ ”型未定式, 由于 $\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \frac{1}{\left(\frac{1+x}{x}\right)^x} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}.$$

例 49 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2(x+1-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2(x+1)} \div \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^2\right]$
 $= e^2 \div 1 = e^2$.

注意: 若将第二个重要极限公式中的自变量 x 换成 x 的函数 $\varphi(x)$, 则有公式

$$\lim_{\varphi(x) \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = e \text{ 或 } \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$$

此式称为第二重要极限公式的推广形式.

例 50 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

解: 令 $u = e^x - 1$, 则 $x = \ln(1+u)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $u \rightarrow 0$.

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1$.

习题 2.4

A 组

1. 求下列极限:

- | | |
|---|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x};$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 2x};$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3};$ | (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x};$ | (6) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2};$ |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x;$ | (8) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x};$ |
| (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - 2 \sin x};$ | (10) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}.$ |

2. 计算下列极限:

- | | | |
|---|---|--|
| (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n;$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}};$ | (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}-1};$ |
| (4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan x)^{3 \cot x};$ | (5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \sin x)^{\csc x}.$ | |

B 组

1. 计算:

- | | |
|--|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1};$ | (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6 \sin \frac{1}{x}}{x^3 + 3x + \sin x};$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right)^x \left[\text{提示: } 1 - \frac{1}{x^2} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right].$ | |

2. 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{\sin(x^2 - 1)} = 3$, 试确定 a, b 的值.3. 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \sim \ln(1+x)$.

2.5 函数的连续性

自然界中连续变化的变量很多,例如,随着时间的连续变化,小树在连续不断地长高;随着时间的连续变化,气温会连续地变化等. 用函数的概念来叙述就是:随着自变量的连续取值,对应的函数值也是连续的;粗略地说,当自变量改变不大时,对应的函数值变化也不大. 这些现象反映在数学上就是函数的连续性,它是与函数的极限密切相关的另一个基本概念.

2.5.1 函数的连续性

先介绍增量的概念.

定义 2.11 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一实心邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义,任取

$x \in U(x_0, \delta)$. 记 $\Delta x = x - x_0$, 则称 Δx 为自变量 x 在点 x_0 的增量, 简称自变量增量; 记 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, 则称 Δy 为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的增量, 简称函数增量. $x_0, f(x_0)$ 分别叫做自变量的初值和函数的初值. $x, f(x)$ 分别叫做自变量的终值和函数的终值.

注意:

- (1) 增量可以是正的, 也可以是负的, 还可以是零.
- (2) $\Delta x, \Delta y$ 是一个完整的记号, 不能看做是 Δ 与 x 或 y 的乘积.
- (3) 有时为了方便, 自变量 x , 函数 y 的终值可直接写成 $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ 且
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

(4) $\Delta x, \Delta y$ 分别刻画出在点 x_0 处自变量与函数值改变量的大小. 因此, 函数的连续性可以用 $\Delta x, \Delta y$ 来刻画.

定义 2.12 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一实心邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义, $x \in U(x_0, \delta)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, 如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续.

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续的几何意义表示函数在点 x_0 不断开, 如图 2-8 所示.

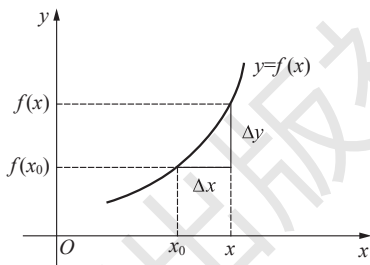


图 2-8

例 51 用定义证明 $y = 5x^2 - 3$ 在给定点 x_0 处连续.

证明: 因为 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [5(x_0 + \Delta x)^2 - 3] - [5x_0^2 - 3] = 10x_0 \Delta x + 5(\Delta x)^2$, 所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [10x_0 \Delta x + 5(\Delta x)^2] = 0$, 由定义知函数 $y = 5x^2 - 3$ 在给定点 x_0 处连续.

在定义 2.12 中, 由于 $\Delta x = x - x_0$, 所以, $\Delta x \rightarrow 0$ 等价于 $x \rightarrow x_0$; 由于 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, 所以, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 等价于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 因此, 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的连续性也可描述为:

定义 2.13 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一实心邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义, $x \in U(x_0, \delta)$, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 2.13 与定义 2.12 可以互相推出, 因此它们是等价的, 使用时可任选其一.

注意:

函数连续定义含有三个要素: (1) 函数在点 x_0 的某邻域内有定义; (2) 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时有极限; (3) 极限值等于该点处函数值. 只有当三条均满足时, 才可判定函数 $f(x)$ 在 x_0 连续; 否则 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续.

由定义 2.13 可以得出下面结论:

(1) 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处极限一定存在; 反之, $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不一定连续.

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续, 要求 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限, 只需求出 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 即可.

例 52 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$.

解: 因为 $\cos x$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

可以证明, 若函数 $u=\varphi(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在且等于 u_0 , 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限也存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)] = f(u_0)$. 此结论可作公式用.

例 53 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, 且 $y=\ln u$ 在点 $u=e$ 连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

定义 2.14 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某左 δ 邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 左连续; 又设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某右 δ 邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 右连续.

由前面极限存在的充要条件定理, 易得:

定理 2.12 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x),$$

即函数在某点连续的充要条件为函数在该点处左、右连续.

定义 2.15 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点都连续, 则称函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内连续. 如果函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且在左端点处右连续, 在右端点处左连续, 即 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

根据以上连续性定义有:

定理 2.13 初等函数在其有定义的区间内都是连续的.

根据这一结论, 求初等函数在其定义区间内某点 x_0 处的极限时, 只要求出函数在该点处的函数值即可. 例如, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x^2)}{e^x \cos x}$ 时, 由于该函数是初等函数, 且 $x=0$ 在其定义

区间内, 故由初等函数的连续性, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x^2)}{e^x \cos x} = \frac{\ln(e+0)}{e^0 \cos 0} = \frac{\ln e}{1 \times 1} = 1$.

2.5.2 函数的间断点及其分类

先考察下面三个函数在 $x=1$ 处的连续性.

$$(1) f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; \quad (2) f(x) = \begin{cases} x+1, & x>1, \\ 0, & x=1, \\ x-1, & x<1; \end{cases} \quad (3) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1, \\ 0, & x=1. \end{cases}$$

显然函数(1)在 $x=1$ 处没有定义, 故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

函数(2)虽在 $x=1$ 处有定义,但由于 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在,故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

函数(3)在 $x=1$ 处有定义且极限存在,但 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$,故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

定义 2.16 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 间断,点 x_0 称为 $y=f(x)$ 的间断点.

由函数在某点连续的定义可知,如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有下列三种情形之一:

(1) $y=f(x)$ 在点 x_0 无定义,即 $f(x_0)$ 不存在;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;

(3) 虽然 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

则点 x_0 为 $y=f(x)$ 的一个间断点.

间断点只可能出现在函数无定义的点,或分段函数的分段点处,无定义的点必是间断点,分段点未必就是间断点. 间断点通常分为第一类间断点和第二类间断点.

(1) 第一类间断点

设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点,若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在,则称点 x_0 是第一类间断点. 其中,左、右极限不相等的,称点 x_0 为跳跃间断点;左、右极限相等的,即存在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,则称点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的可去间断点.

(2) 第二类间断点

除第一类间断点外的其他形式的间断点,统称为第二类间断点.

例如,函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的左、右邻域有定义,而在 $x=0$ 处无定义,这是间断点. 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $y=\frac{1}{x} \rightarrow \infty$,显然是第二类间断点. 这种间断点(因为极限是无穷大)也称为无穷间断点. 又如, $x=0$ 是函数 $y=\sin \frac{1}{x}$ 的间断点,当 $x \rightarrow 0$ 时, $y=\sin \frac{1}{x}$ 在 -1 和 $+1$ 之间振荡,这种类型的间断点称为振荡间断点,这也是第二类间断点.

例 54 函数 $f(x) = \sin x \cdot \cos \frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义, $x=0$ 是间断点,由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$,所以, $x=0$ 是函数的可去间断点.

注意,例 54 中在 $x=0$ 补充定义函数值,令其函数值等于极限值: $f(0)=0$,即重新定义

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

显然,此时函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 就连续. 这就是可去间断点的由来.

例 55 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0, \\ 2x+b, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求 b 的值.

解:因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2+1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+b) = b$$

所以 $b=1$. 检验知 $b=1$ 时函数在 $x=0$ 处连续.

例 56 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \ln(x+1), & 0 \leq x < 1, \\ e^x - 1, & 1 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

试求: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) $f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 处的极限;

(3) 指出函数 $f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 处是否连续.

解: (1) 显然该分段函数的定义域为 $(-\infty, 10]$.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

又 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x+1) = \ln 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^x - 1) = e - 1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

从而 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

(3) 因为 $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; 而 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在, 所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

2.5.3 闭区间上连续函数的性质

函数在一点处连续体现了函数的局部性质, 现在介绍连续函数在整个区间上的性质, 即整体上的性质, 先给出最值的概念.

定义 2.17 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若 $x_0 \in I$, 且对该区间内的一切 x , 有

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ (或 } f(x) \geq f(x_0) \text{)}$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值(或最小值). 最大值与最小值统称为最值. x_0 称为 $f(x)$ 的最值点.

定理 2.14(最值定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取得最大值和最小值.

注意: 这里定理的两个条件“闭区间”“连续”缺一不可. 即若 $f(x)$ 在开区间内连续, 则不一定取得最值; 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内有间断点, 则同样不一定取得最值.

如: $y = x^2$ 在区间 $(0, 1)$ 内连续, 但它在 $(0, 1)$ 内既无最大值也无最小值; $y = \frac{1}{x}$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 内有间断点 $x=0$, 它在 $[-1, 1]$ 内既无最大值也无最小值.

定理 2.15(有界定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

定理 2.16(介值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, m 和 M 分别是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值, 则对于介于 m 与 M 之间的任一数 C , $m < C < M$, 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

定理 2.17 (零点定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$.

例 57 证明方程 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 至少有一个小于 1 的正根.

证明: 令 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, 显然 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 又 $f(0) = 1, f(1) = -1$, $f(0)$ 与 $f(1)$ 两者异号, 由零点定理知, 至少有一点 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f(\xi) = \xi^3 - 3\xi^2 + 1 = 0$. 命题得证.

习题 2.5

A 组

1. 求函数 $y = \ln x$ 在任意正值 x 发生任意改变量 Δx 时的增量.
2. 指出下列函数的间断点, 并说明是第几类间断点, 是可去间断点的, 设法使其变成连续函数:

$$(1) f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}; \quad (2) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}; \quad (3) f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1, \\ 2 - x, & x > 1; \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x < 0, \\ \frac{\sin 3x}{x}, & x > 0; \end{cases} \quad (5) f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad (6) f(x) = \arctan \frac{1}{x}.$$

3. 下列函数在分界点处是否连续?

$$(1) f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3 - x, & 1 < x \leq 3; \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1, \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$$

4. 证明方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个实根.

B 组

1. 设 $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, 试问补充定义 $f(0)$ 为多少可使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x}, & x < 0, \\ 2x+k, & x \geq 0 \end{cases} \text{ 在定义域内连续, 求 } k \text{ 的值.}$$

3. 求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 1}{x + 1}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^x + 1}{x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{2 \cos(\pi - x)}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x}; \quad (8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}.$$

2.6 总结与提高

2.6.1 本章内容小结

1. 数列的极限

(1) 数列极限的概念

如果当 n 无限增大时, 数列 $\{y_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 A , 那么 A 就叫做数列 $\{y_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ 或当 $n \rightarrow \infty$ 时, $y_n \rightarrow A$.

(2) 数列极限的四则运算

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b;$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b;$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot x_n) = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C \cdot a (C \text{ 是常数});$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0).$$

2. 函数的极限

(1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x \rightarrow \infty$)时, 函数 $f(x)$ 趋于某一个确定的常数 A , 则称 A 为当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$.

如果当 $x > 0$ 且无限增大时, 函数 $f(x)$ 趋于某一个确定的常数 A , 则称 A 为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$.

如果当 $x < 0$ 且 x 的绝对值无限增大时, 函数 $f(x)$ 趋于某一个确定的常数 A , 则称 A 为当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty)$.

(2) 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 极限存在的充要条件:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

(3) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义, 如果当 x 趋于 x_0 (但 x 可以不等于 x_0) 时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A , 则称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$. 亦称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限存在.

(4) 左极限与右极限

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 某个右邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义, 如果当 $x > x_0$ 且趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A , 则称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 的右极限是 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+).$$

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义, 如果当 $x < x_0$ 且趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A , 则称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 的左极限是 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-).$$

(5) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限存在且都等于 A , 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小量

以零为极限的变量称为无穷小量, 简称无穷小.

(2) 无穷小的运算法则

- ① 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.
- ② 有限个无穷小的积仍为无穷小.
- ③ 常数与无穷小的积仍为无穷小.
- ④ 有界函数与无穷小的积仍为无穷小.
- ⑤ 无穷小除以极限不为零的函数的商仍为无穷小.

(3) 无穷小的比较

设 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$,

① $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 为 α 的高阶无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$, 或称 α 为 β 的低阶无穷小.

② $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C (C \text{ 为非零常数})$, 则称 β 为 α 的同阶无穷小. 特别地, 当 $C=1$ 时, 称 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\beta \sim \alpha$.

③ $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C (C \text{ 为非零常数}, k > 0)$, 则称 β 为 α 的 k 阶无穷小.

(4) 常见的等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 = e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a$.

(5) 等价无穷小的代换定理

设 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$, 且 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 若 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

(6) 函数极限与无穷小关系定理

极限 $\lim f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是函数 $f(x)$ 可表示为常数 A 与无穷小 α 的和, 即 $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ (其中 $\alpha \rightarrow 0$).

(7) 无穷大量: 绝对值无限增大的变量称为无穷大.

(8) 无穷小与无穷大之间的关系

如果 $f(x)$ 在自变量 x 某一变化过程中是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 在 x 的相同变化过程中是无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 在 x 的某种变化过程中是无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 在 x 的相同变化过程中是无穷大.

4. 极限运算法则

(1) 极限基本性质

唯一性: 若函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则极限唯一.

局部有界性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则存在 x_0 的某个空心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$, 使得 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有界.

夹逼定理: 设在 x 的某种变化趋势下, 当 x 在相应的某一变化范围内, 满足

$$\textcircled{1} F(x) \leq f(x) \leq G(x);$$

$$\textcircled{2} \lim F(x) = \lim G(x) = A.$$

则 $\lim f(x)$ 存在, 且 $\lim f(x) = A$.

(2) 运算法则

四则运算法则: 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则:

$$\textcircled{1} \text{和(差)的极限存在, 且 } \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B.$$

$$\textcircled{2} \text{乘积的极限存在, 且 } \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B.$$

$$\textcircled{3} \lim C \cdot f(x) = C \cdot \lim f(x) = CA.$$

$$\textcircled{4} \lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n.$$

$$\textcircled{5} \text{若 } \lim g(x) \neq 0, \text{ 商的极限存在, 且 } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}.$$

复合函数的极限: 如果函数 $u = \varphi(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时有极限 u_0 , 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 当 $u \rightarrow u_0$ 时有极限 A , 即 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 那么复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A$.

5. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或写做 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ 这里 } e \text{ 是无理数, } e = 2.718\ 281\ 8\cdots.$$

这两个公式中的自变量 x 换成 x 的函数 $\varphi(x)$, 也有相应的形式.

6. 熟记几个常用的基本极限

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} C = C \quad (C \text{ 为常数});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha \text{ 为正常数});$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m, \\ 0, & \text{当 } n>m, \\ \infty, & \text{当 } n<m \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{其中 } a_0, a_1, \cdots, a_m \text{ 和 } b_0, b_1, \cdots, b_n \\ \text{都是常数, 且 } a_0 \neq 0, b_0 \neq 0. \end{matrix}$$

7. 掌握求极限的几种方法

- (1) 利用函数的连续性求极限;
- (2) 利用极限的四则运算法则求极限;
- (3) 利用无穷小的性质求极限;
- (4) 利用无穷小与无穷大的倒数关系求极限;
- (5) 利用两个重要极限求极限;
- (6) 利用变量代换求极限.

8. 函数的连续性

(1) 连续的概念

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一实心邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义, $x \in U(x_0, \delta)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, 如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

或者

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一实心邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义, $x \in U(x_0, \delta)$, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某左邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 左连续; 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 右连续.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 即函数在某点连续的充要条件为函数在该点处左、右连续.

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点都连续, 则称函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内连续. 如果函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且在左端点处右连续, 在右端点处左连续, 即 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

定理 初等函数在其有定义的区间内都是连续的.

(2) 函数的间断点

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 间断, 点 x_0 称为 $y=f(x)$ 的间断点.

点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的一个间断点, 只要满足以下三条件之一:

- ① $y=f(x)$ 在点 x_0 无定义, 即 $f(x_0)$ 不存在;
- ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;
- ③ 虽然 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

(3) 间断点类型

设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点, 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在, 则称点 x_0 是第一类间断点. 其中, 左、右极限不相等的, 称点 x_0 为跳跃间断点; 左、右极限相等的, 即存在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则称点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的可去间断点.

除第一类间断点外的其他形式的间断点, 统称为第二类间断点.

(4) 闭区间上连续函数的性质

最值定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若 $x_0 \in I$, 且对该区间内的一切 x , 有 $f(x) \leq f(x_0)$ (或 $f(x) \geq f(x_0)$), 则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值 (或最小值), 最大值与最小值统称为最值. 这里的 x_0 称为最值点.

最值定理 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取得最大值和最小值.

有界定理 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

介值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, m 和 M 分别是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值, 则对于介于 m 与 M 之间的任一数 C , $m < C < M$, 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

零点定理 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$.

2.6.2 知识拓展——英国海岸线有多长

英国海岸线有多长? 也许你会很快给出一个有限的答案. 设想我们只考虑超过 1 公里的弯儿, 会有一个数; 再将超过 1 米的弯儿考虑在内, 肯定会比原来更长, 如果进一步的将 1 分米、1 厘米、1 毫米…的弯都考虑在内, 会得到什么结果呢? 你还那么肯定吗? 为得到一个肯定结果, 介绍 Koch 雪花曲线.

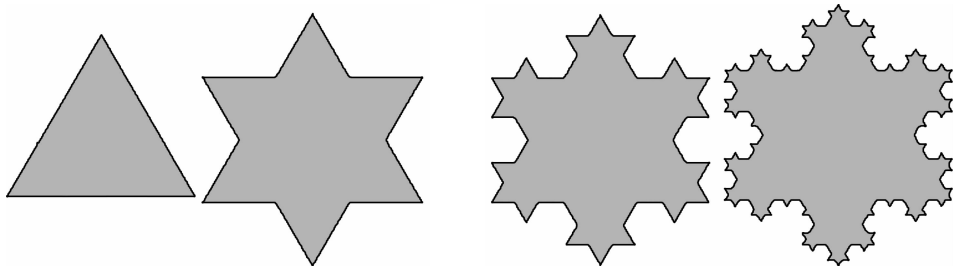
Koch 雪花曲线是一个数学曲线, 同时也是早期被描述的一种分形曲线. 它由瑞典数学家 Helge von Koch 在 1904 年发表的一篇题为“从初等几何构造的一条没有切线的连续曲线”(原来的法文题目: “Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire”)的论文中提出. 其中有一种 Koch 曲线像雪花一样, 被称为 Koch 雪花 (或 Koch 星).

1. Koch 雪花曲线的形成

设给定一个边长为 1 的正三角形, 我们进行以下操作

- (i) 三等分一条线段;
- (ii) 用一个等边三角形替代第一步划分三等分的中间部分;
- (iii) 在每一条直线上, 重复以上 (i) (ii).

每作一次 (i) (ii) 称为一步, 无限步重复的极限结果称为 Koch 雪花曲线.



2. Koch 雪花曲线的长度

由于最初三角形的边长为 1, 记第 n 步所得曲线的长度为 l_n , 则有

$$l_n = 3, l_1 = 3 \times 4 \times \frac{1}{3} = 3 \times \frac{4}{3}, l_2 = 3 \times 4^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2,$$

$$\cdots, l_n = 3 \times 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n, \cdots$$

可见,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 \times 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = +\infty$$

即 Koch 曲线的周长为无限.

3. Koch 雪花曲线的面积

最初三角形的边长为 1, 设第 n 步的图形面积为 S_n , 则有

$$S_0 = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 3,$$

$$S_1 = S_0 + 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3} = S_0 + \frac{1}{3} S_0,$$

$$S_2 = S_1 + (3 \times 4 \times 4) \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \sin \frac{\pi}{3} \right) = S_1 + \frac{4}{9} S_0 = S_0 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{9} \right) S_0,$$

$\cdots,$

$$S_n = S_{n-1} + (3 \times 4^{n-1}) \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n} \times \frac{1}{3^n} \sin \frac{\pi}{3} \right) = S_{n-1} + \frac{1}{3} S_0 \times \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1}$$

$$= S_0 + \frac{1}{3} S_0 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = S_0 + S_0 \times \frac{3}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right]$$

$\cdots$

可见,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ S_0 + S_0 \times \frac{3}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right] \right\} = \frac{8}{5} S_0$$

Koch 曲线为一个具有无限长边界、围绕着有限面积的几何对象.

据此,相信你可以回答最初的问题了.

复习题

A 组

1. 填空题:

(1) 设 $f(x-1) = x^2 + 2x - 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____;

(2) 当 $x \rightarrow$ _____ 时, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ 是无穷大;

(3) $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin[2\varphi(x)]}{\varphi(x)} =$ _____;

(4) 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, 那么极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] =$ _____;

(5) 函数 $y = \frac{x}{\sin x}$ 的间断点是 _____.

2. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 6x + 5}{3x - 4x^3};$$

$$(5) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1 - \sqrt{\tan x + 1}};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1});$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x-1)}{x-1};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\tan 2x};$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 5x + 6};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{3x^3 + 2x - 1};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 + 1)^5 (1 - 2x)^5}{(x + 1)^{15}};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2};$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x};$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x;$$

B 组

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x+a, & x \geq 0. \end{cases}$ 问: 当 a 取何值时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在?

2. 适当选取 b 的值, 使下面的函数 $f(x)$ 为连续函数:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ b+x, & x = 0 \end{cases}.$$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2, \end{cases}$

作出函数 $f(x)$ 的图像, 并求: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域; (2) 函数 $f(x)$ 的间断点.