中等职业学校“十三五”规划教材

数学

SHUXUE

（拓展模块）

学生用书

主　编　金桂堂

北京出版集团公司
北　京　出　版　社

数学（拓展模块）
主编　金桂堂
北京出版集团公司
北京出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学（拓展模块）学生用书 / 金桂堂主编. — 北京：北京出版社，2012.2（2018 重印）

ISBN 978-7-200-09065-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①金… Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教材 Ⅳ. ① G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 008151 号

数学（拓展模块）

SHUXUE（TUOZHAN MOKUAI）

主　编：金桂堂
出　版：北京出版集团公司
　　　　北 京 出 版 社
地　址：北京北三环中路 6 号
邮　编：100120
网　址：www.bph.com.cn
总发行：北京出版集团公司
经　销：新华书店
印　刷：定州市新华印刷有限公司
版　次：2012 年 2 月第 1 版　2018 年 12 月修订　2019 年 1 月第 3 次印刷
开　本：787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　张：11.25
字　数：260 千字
书　号：ISBN 978-7-200-09065-9
定　价：22.50 元

质量监督电话：010-82899187　010-58572750　010-58572393

目　录

第一章　三角公式及其应用

第二章　椭圆、双曲线、抛物线

第三章　概率与统计

第一章 三角公式及其应用

一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步.

——马克思

三角函数在科技生活和生产工艺中都有着广泛的应用．在物理学、电工学和工程测量学等方面，常常要运用三角函数公式进行计算、化简与推导.

本章在复习三角函数概念及相关公式的基础上，进一步研究学习两角和与差的三角函数；在复习正弦函数图象的基础上，学习正弦型函数的图象与性质；在解直角三角形的基础上，学习正弦定理和余弦定理来确定任意三角形的边角关系.

1.1 两角和与差的余弦、正弦及正切公式

思　考

问题：$\cos(\alpha+\beta)$ 等于 $\cos\alpha+\cos\beta$ 吗？

例如 $\alpha=30°$，$\beta=60°$，则

$\cos(30°+60°)=\cos 90°=0$，而

$\cos 30°+\cos 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}$，显然

$\cos(30°+60°)\neq\cos 30°+\cos 60°$.

一般地，两角和或差的三角函数，不等于两角的同名三角函数的和或差. 那么如何用角 α，β 的三角函数表示角 $\alpha\pm\beta$ 的三角函数呢？下面来讨论这个问题.

数学史料

韦达（Viete，1540—1603），法国数学家. 韦达在欧洲被尊称为“代数学之父”. 韦达不仅对代数学的推进与发展作出了杰出的贡献，而且在三角学方面的研究也取得重要成果. 他首先在平面三角和球面三角中使用了 6 种三角函数. 他的《应用于三角形的数学定律》（1579 年）是最早的数学专著之一，书中给出精确到 5 位小数的三角函数表. 韦达还专门写了一篇论文“截角术”，初步讨论了正弦、余弦、正切的一般公式，首次把代数变换应用到三角学中. 他考虑含有倍角的方程，具体给出了将 $\cos(nx)$ 表示成 $\cos(x)$ 的函数并给出当 $n\leqslant 11$ 且 $n\in\mathbf{Z}^{+}$ 的倍角表达式.

1.1.1 两角和与差的余弦公式

我们先给出两角差的余弦公式：

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta.$$

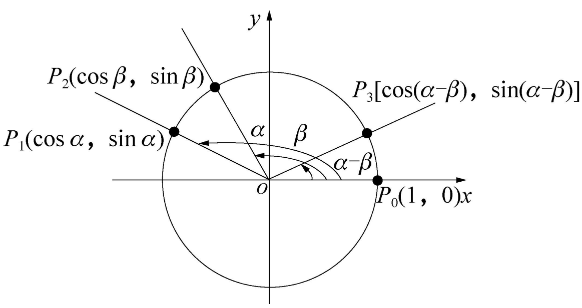


图 1-1

下面证明两角差的余弦公式.

如图 1-1 所示，单位圆与 x 轴正半轴交于点 $P_0(1,\ 0)$，以 x 轴的正半轴为始边，分别做角 α，β，$\alpha-\beta$，它们的终边分别交单位圆于点 P_1，P_2，P_3，则点 P_0，P_1，P_2，P_3 的坐标分别是 $P_0(1,\ 0)$，$P_1(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,\ \sin\beta)$．可以得到 $\angle P_0OP_3=\angle P_2OP_1$，由圆的性质可知 $|P_0P_3|=|P_2P_1|$，即

$$\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$$

两边平方，化简得

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta.$$

由上式可以得到

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\&=\cos\alpha\ \cos(-\beta)+\sin\alpha\ \sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta.\end{aligned}$$

这样我们就推导出两角和与差的余弦公式：

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta\\\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta\end{aligned}}\tag{1-1}$$

1.1.2 两角和与差的正弦公式

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)]\\&=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

知识链接

$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$

所以　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

在上面的公式中，用 $-\beta$ 代替 β，可以得到

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin[\alpha+(-\beta)]\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

所以　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$

这样我们就推导出两角和与差的正弦公式：

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}} \tag{1-2}$$

1.1.3 两角和与差的正切公式

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

知识链接

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，

$\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$

如果 $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$，我们可以将分子分母都除以 $\cos\alpha\cos\beta$，从而得到

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

在上面的公式中，用 $-\beta$ 代替 β，可以得到

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\tan[\alpha+(-\beta)]\\&=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.\end{aligned}$$

因此 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$

这样我们就推导出两角和与差的正切公式：

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}} \tag{1-3}$$

公式(1-1)，(1-2)，(1-3)分别称为**余弦、正弦、正切的加法定理**，统称为

加法定理．简记为$C_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha-\beta}$，$S_{\alpha+\beta}$，$S_{\alpha-\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha-\beta}$．

例1　利用公式计算：

(1) $\cos(-\frac{\pi}{12})$；　(2) $\sin(-\frac{7}{12})$；　(3) $\tan 285^\circ$．

解：(1) $\cos(-\frac{\pi}{12})=\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{3\pi}{12}-\frac{2\pi}{12})=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\ \cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\ \sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

> **此题也可作如下代换**
> $\cos(-\frac{\pi}{12})=\cos(\frac{2\pi}{12}-\frac{3\pi}{12})$.

(2) $\sin(-\frac{7}{12})=-\sin\frac{7}{12}=-\sin(\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12})=-\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})$

$$=-(\sin\frac{\pi}{4}\ \cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\ \sin\frac{\pi}{3})$$

$$=-(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4};$$

(3) $\tan 285^\circ=\tan(180^\circ+105^\circ)=\tan 105^\circ$

$$=\tan(45^\circ+60^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 60^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 60^\circ}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{1-1\times\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=-2-\sqrt{3}.$$

练一练

利用公式计算：

(1) $\sin 105^\circ$；(2) $\cos 195^\circ$；(3) $\sin\frac{11\pi}{12}$；(4) $\tan(-75^\circ)$．

例2　求下列各式的值：

(1) $\sin\frac{5\pi}{12}\ \sin\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\ \cos\frac{7\pi}{12}$；

(2) $\sin 21^\circ\ \cos 81^\circ-\sin 69^\circ\ \cos 9^\circ$；

(3) $\frac{1-\tan 75^\circ}{1+\tan 75^\circ}$；

(4) $\sin(55^\circ+\alpha)\ \cos(-\alpha-10^\circ)+\cos(55^\circ+\alpha)\ \sin(-\alpha-10^\circ)$．

解：(1) 原式$=-(\cos\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{7\pi}{12}-\sin\dfrac{5\pi}{12}\sin\dfrac{7\pi}{12})$

$=-\cos(\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{7\pi}{12})=-\cos\pi=-(-1)=1$；

(2) 原式$=\sin 21^\circ\cos 81^\circ-\cos 21^\circ\sin 81^\circ$

$=\sin(21^\circ-81^\circ)=\sin(-60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$
$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

(3) 原式$=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 75^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 75^\circ}$

$=\tan(45^\circ-75^\circ)=\tan(-30^\circ)$

$=-\tan 30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

将$(55^\circ+\alpha)$看做一个角，同理把$(-\alpha-10^\circ)$看做另一个角.

(4) 原式$=\sin[(55^\circ+\alpha)+(-\alpha-10^\circ)]=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

练一练

求下列各式的值：

(1) $\sin 16^\circ\cos 61^\circ-\cos 16^\circ\sin 61^\circ$；

(2) $\cos 100^\circ\cos 50^\circ-\sin 100^\circ\cos 40^\circ$；

(3) $\dfrac{\tan 13^\circ-\tan 58^\circ}{1+\tan 13^\circ\tan 58^\circ}$.

例3　已知$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$\cos\beta=\dfrac{3}{5}$，$\beta\in(\dfrac{3\pi}{2},2\pi)$，求$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha+\beta)$的值.

解：因为$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，

所以$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-(\dfrac{1}{3})^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为$\cos\beta=\dfrac{3}{5}$，$\beta\in(\dfrac{3\pi}{2},2\pi)$，

所以$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-(\dfrac{3}{5})^2}=-\dfrac{4}{5}$，

得到$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\dfrac{4}{3}$.

知识链接

由$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$得$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. 正、负号的选取由$\alpha$所在的象限决定(一、四象限为正，二、三象限为负). 同理可求$\sin\beta$.

因此　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}-(-\frac{2\sqrt{2}}{3})\times(-\frac{4}{5})=\frac{3-8\sqrt{2}}{15};$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \ \cos\beta-\sin\alpha\ \ \sin\beta.$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\times(-\frac{4}{5})=\frac{4-6\sqrt{2}}{15};$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}+(-\frac{4}{3})}{1-(-\frac{\sqrt{2}}{4})\times(-\frac{4}{3})}=-\frac{25\sqrt{2}+54}{28}.$$

练一练

已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\beta\in(\pi,\ \frac{3\pi}{2})$，求 $\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

练习1.1

1．填空题：

(1) $\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=$____________________=______________.

(2) $\tan(-60^\circ-45^\circ)=$__________________________=______________.

(3) $\cos10^\circ\cos70^\circ+\sin10^\circ\sin70^\circ=$__________________=____________.

(4) $\cos132^\circ\sin87^\circ-\sin132^\circ\cos87^\circ=$________________=____________.

(5) $\frac{\tan36^\circ+\tan84^\circ}{1-\tan36^\circ\tan84^\circ}=$___________________=__________.

2．已知 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，$\alpha\in(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi)$，$\sin\beta=-\frac{1}{5}$，$\beta\in(\pi,\ \frac{3\pi}{2})$，求 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$，$\cos(\alpha+\beta)$，$\tan(\frac{\pi}{6}-\beta)$ 的值.

3．求下列各式的值：

(1) $\sin\frac{17\pi}{12}$；(2) $\frac{1+\tan13^\circ\tan58^\circ}{\tan13^\circ-\tan58^\circ}$；(3) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$；

(4) $\cos(70^\circ+\alpha)\cos(-\alpha-10^\circ)-\sin(70^\circ+\alpha)\sin(-\alpha-10^\circ)$；

(5) $\dfrac{\cos(45^\circ+\theta)\cos(45^\circ-\theta)-\sin(45^\circ+\theta)\sin(45^\circ-\theta)}{\sin(\theta+\varphi)\cos(2\theta+\varphi)-\cos(\theta+\varphi)\sin(2\theta+\varphi)}$.

4. 已知$\sin(\pi-\alpha)=m$，$\alpha\in(\pi,\dfrac{3\pi}{2})$，求$\cos(\dfrac{\pi}{6}+\alpha)$，$\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})$，$\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$的值.

5. 利用和(差)角公式证明：

(1) $\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$；(2) $\sin(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$.

6. 求证：$\cos(\dfrac{\pi}{3}+x)+\cos(\dfrac{\pi}{3}-x)=\cos(-x)$.

习题1.1

A　组

1. 求下列各式的值：

(1) $\sin 465^\circ$；(2) $\dfrac{\sqrt{3}-\tan 15^\circ}{1+\sqrt{3}\tan 15^\circ}$；(3) $\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}+\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2. 已知$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\theta\in(\dfrac{3\pi}{2},2\pi)$，$\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\varphi\in(\pi,\dfrac{3\pi}{2})$，求$\sin(\theta+\varphi)$和$\cos(\theta-\varphi)$的值.

3. 已知$\sin(3\pi-\alpha)=\dfrac{4}{5}$，且$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，求$\tan(\pi+\alpha)$的值.

B　组

1. 已知α，β均为锐角，且$\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，求$\sin\beta$的值.

2. $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\alpha$，$\beta$均为锐角，求$\sin(30^\circ+\beta)$的值.

3. 已知$\sin\alpha-3\cos\alpha=0$，求$\tan(\alpha-\dfrac{\pi}{4})$的值.

4. 设$\tan\alpha$，$\tan\beta$是方程$x^2+2x-3=0$的两个实数根，求$\tan(\alpha+\beta)$的值.

1.2 二倍角公式

思　考

问题：你能根据公式 $S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$ 推导出公式 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 和 $\tan 2\alpha$ 吗?

在公式 $S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$ 中，设 $\beta=\alpha$ 代入，即得到下面的公式：

> α 与 2α 是单角与二倍角的关系，例如 2β 与 4β，$\frac{\alpha}{2}$ 与 α，$\frac{\pi}{8}$ 与 $\frac{\pi}{4}$ 等都满足这种关系.

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$
$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

这样就得到二倍角的三角函数公式：

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\&\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}}\tag{1-4}$$

想一想

能否利用公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得到 $\cos 2\alpha$ 的其他表述形式?

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\\&\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\end{aligned}}\tag{1-5}$$

例1　已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

解： 因为 $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，则

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(-\frac{3}{4})^2}=\frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{7}}{3},$$

所以

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times(-\frac{3}{4})=-\frac{3\sqrt{7}}{8},$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(-\frac{3}{4})^2-(\frac{\sqrt{7}}{4})^2=\frac{1}{8},$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times(-\frac{\sqrt{7}}{3})}{1-(-\frac{\sqrt{7}}{3})^2}=-3\sqrt{7}.$$

> **也可用下述方法求得 $\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$：**
> $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$，
> $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

例2 已知 $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$，$\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

解： 因为 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\alpha}{2}$ 为第二象限角.

根据公式 $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$，$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$，得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{1}{4})}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1+(-\frac{1}{4})}{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{4}}{-\frac{\sqrt{6}}{4}}=-\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

练一练

已知 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

例3 求下列各式的值：

(1) $\sin 67°30'\cos 67°30'$；(2) $\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}$；(3) $\frac{5\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}$.

解：(1) $\sin 67°30'\cos 67°30' = \dfrac{1}{2}\times 2\sin 67°30'\cos 67°30'$

$$= \frac{1}{2}\sin(2\times 67°30') = \frac{1}{2}\sin 135°$$

$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$

$$= \frac{1}{2}\sin(180°-45°) = \frac{1}{2}\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

(2) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}-\cos^2\dfrac{\pi}{8} = -(\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}) = -\cos(2\times\dfrac{\pi}{8})$

$$= -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

(3) $\dfrac{5\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°} = \dfrac{5}{2}\times\dfrac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°} = \dfrac{5}{2}\tan(2\times 22.5°)$

$$= \frac{5}{2}\tan 45° = \frac{5}{2}\times 1 = \frac{5}{2}.$$

练一练

求下列各式的值：

(1) $\sin\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{5\pi}{12}$；(2) $2\sin^2\dfrac{\pi}{12}-1$；(3) $\dfrac{\tan 165°}{1-\tan^2 165°}$.

例4 化简：

(1) $\dfrac{\sin(\pi+2\theta)\ \ \sin(2\pi-\theta)}{1+\cos(\pi-2\theta)}$；(2) $\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{4}+\cos\dfrac{\alpha}{4}}$.

解：(1) $\dfrac{\sin(\pi+2\theta)\ \ \sin(2\pi-\theta)}{1+\cos(\pi-2\theta)} = \dfrac{(-\sin 2\theta)\ \ (-\sin\theta)}{1-\cos 2\theta}$

$$= \frac{2\sin^2\theta\cos\theta}{1-(1-2\sin^2\theta)} = \cos\theta;$$

(2) $$\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{4}+\cos\dfrac{\alpha}{4}} = \frac{\cos 2\times\dfrac{\alpha}{4}}{\sin\dfrac{\alpha}{4}+\cos\dfrac{\alpha}{4}} = \frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{4}-\sin^2\dfrac{\alpha}{4}}{\sin\dfrac{\alpha}{4}+\cos\dfrac{\alpha}{4}} = \cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}.$$

练一练

1. 化简：$\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$.

2. 证明：$2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)=\sin 2\alpha$.

练习1.2

1. 填空题：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}=$__________；(2) $\sin^2 15°-\cos^2 15°=$__________；

(3) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}=$__________；(4) $\dfrac{7}{6}\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{7}{12}=$__________；

(5) $\dfrac{3\tan 15°}{1-\tan^2 15°}=$__________.

2. 已知$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\alpha\in(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi)$，求$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$的值.

3. 已知$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，求$\tan 2\alpha$的值.

4. 化简：

(1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$；(2) $(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2})^2$.

5. 求证：

(1) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=2\sin\alpha$；(2) $2-2\sin^2\alpha-\cos 2\alpha=1$.

6. 求下列各式的值：

(1) $1-2\cos^2\dfrac{11\pi}{12}$；(2) $\sin^2\dfrac{5\pi}{12}-\sin^2\dfrac{\pi}{12}$；

(3) $\sin\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{5\pi}{12}$；(4) $\dfrac{\tan 75°}{1-\tan^2 75°}$.

7. 化简：

(1) $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha$；(2) $\sin^4\dfrac{\alpha}{2}-\cos^4\dfrac{\alpha}{2}$.

8. 已知$\tan\dfrac{\alpha}{2}=3$，求$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$的值.

9. 证明下列恒等式：

(1) $2\cos^2(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2})=1+\sin\alpha$；(2) $\sin\alpha(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha$.

10. 已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$，求$\sin 2\alpha$的值.

习题1.2

A　组

1．选择题：

(1) 已知 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in(-\dfrac{\pi}{2},\ 0)$，则 $\sin 2\alpha=($　　$)$.

A．$\dfrac{12}{25}$　　B．$-\dfrac{12}{25}$　　C．$\dfrac{24}{25}$　　D．$-\dfrac{24}{25}$

(2) $1+2\sin^2\varphi+\cos 2\varphi=($　　$)$.

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

(3) $\dfrac{1}{2}\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$ 可化为(　　).

A．$\sin(\dfrac{\pi}{6}-\alpha)$　　B．$\sin(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)$

C．$\sin(\dfrac{\pi}{6}+\alpha)$　　D．$\sin(\dfrac{\pi}{3}+\alpha)$

(4) $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin 2\alpha=($　　$)$.

A．$\dfrac{1}{9}$　　B．$-\dfrac{1}{9}$　　C．$\dfrac{8}{9}$　　D．$-\dfrac{8}{9}$

2．求下列各式的值：

(1) $\cos(-\dfrac{65\pi}{12})$；　　(2) $\sin 100^\circ\sin 20^\circ-\cos 100^\circ\cos 20^\circ$；

(3) $\dfrac{1}{2}-\sin^2\dfrac{19\pi}{8}$；　　(4) $\sqrt{1-2\sin 105^\circ\cos 75^\circ}$.

3．已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\alpha\in(0,\ \pi)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

4．证明：

(1) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{2}\tan 2\alpha$；(2) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$.

B　组

1. 已知 $\sin\theta:\sin\dfrac{\theta}{2}=8:5$，求 $\cos\theta$ 的值.

2. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，求 $\tan\alpha+\cot\alpha$ 的值.

3. 若 $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=3$，求 $\tan\alpha$ 的值.

4. 证明：

(1) $\dfrac{1}{1-\tan\alpha}-\dfrac{1}{1+\tan\alpha}=\tan 2\alpha$；　(2) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$.

5. 已知等腰三角形的顶角的余弦等于 $\dfrac{7}{25}$，求这个三角形一个底角的正弦、余弦和正切.

数海拾贝

亚历山大时期的三角测量

在亚历山大(公元前 332 年)时期，利用三角知识测量天文和地理的例子举不胜举．例如，希派尔古斯测量地球和月球的距离，要知道那时没有先进的测量仪器.他假设一个人站在赤道 A 处看到月亮恰好在他头顶上方的 C 处(图 1-2)，另一个人站在赤道 B 处，则看到月亮刚刚升起．这时 BC 和圆 O 相切，构成了直角$\triangle OBC$，AB 弧所对 θ 恰为 A，B 两地的经度.希派尔古斯测到 $\theta=89.0625°$，他利用自己编制的世界第一张正弦函数值表计算，得

$$\sin(90°-\theta)=\frac{OB}{OC},$$

$$OC=OB\div\cos\theta=250000\,(\text{n mile}).$$

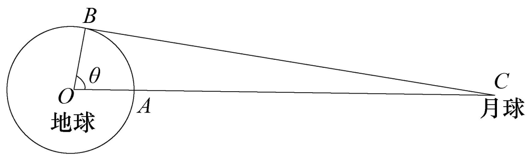


图 1-2

这个数据与实际误差并不太大.

1.3 正弦定理、余弦定理

利用锐角三角函数，可以解直角三角形．下面我们将根据任意角三角函数知识，研究任意三角形的边角关系．

本节我们将学习任意三角形边角关系的两个重要定理．

1.3.1 正弦定理

在△ABC 中，通常用 a，b，c 表示角 A，B，C 对边及其长度．

思　考

问题：你能根据图 1-3(1)、(2)，证明下列等式吗？

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

证明：对任意△ABC，如图 1-3 建立直角坐标系．

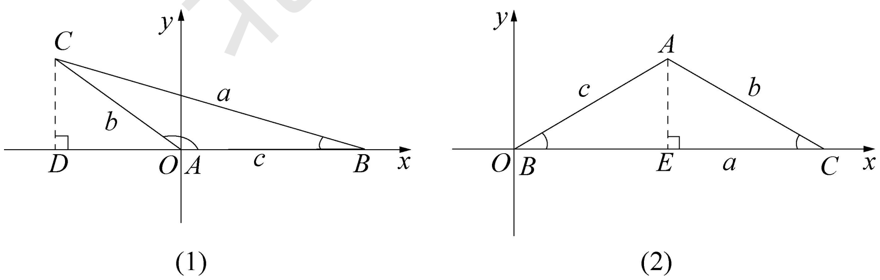


图 1-3

在图 1-3(1)中，点 C 在∠A 的终边上，根据三角函数的定义，得点 C 的坐标为 $(b\cos A, b\sin A)$，作 $CD\perp x$ 轴，垂足为 D，在直角三角形 CDB 中，$|CD|=BC\sin B=a\sin B$．由点 C 在 x 轴上方，可以知道点 C 纵坐标等于 $|CD|$，即 $b\sin A=a\sin B$，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B};$$

在图 1-3(2)中，同理可证：点 A 的坐标为$(c\cos B，c\sin B)$，$|EA|=b\sin C$，点 A 纵坐标等于$|EA|$，即$c\sin B=b\sin C$，得

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

利用正弦定理解三角形，可以解决两类问题：
(1) 已知两角和一边，求其他两边和第三角；
(2) 已知两边和其中一边的对角，求其他两角和第三边.

于是，得到关于任意三角形边和角间关系的重要定理：

正弦定理　在一个三角形中，各边和它所对的角的正弦的比相等．即

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}} \tag{1-6}$$

正弦定理指出了任意三角形三条边和对应角的正弦之间的关系，它描述了任意三角形中边、角的一种数量关系.

利用图 1-3，容易求得$\triangle ABC$面积 $S_\triangle$为

$$S_\triangle=\frac{1}{2}|AB|\ |CD|=\frac{1}{2}ac\sin B,$$

根据式(1-6)，又可得到

$$S_\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

任意三角形的面积等于它的任意两条边与它们夹角的正弦的乘积的一半.

因此，任意$\triangle ABC$的面积公式为

$$\boxed{S_\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A} \tag{1-7}$$

例1　在$\triangle ABC$中，已知$A=30°$，$B=65°$，$a=12$．解此三角形，并求这个三角形的面积(精确到 0.1).

解：根据三角形内角和定理

$$C=180^\circ-(A+B)$$
$$=180^\circ-(30^\circ+65^\circ)=85^\circ;$$

根据正弦定理

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{12\sin 65^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 21.8,$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{12\sin 85^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 23.9,$$

$$S_\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$\approx\frac{1}{2}\times 21.8\times 23.9\times\sin 30^\circ$$

$$\approx 130.3.$$

练一练

在$\triangle ABC$中，已知$B=45^\circ$，$C=60^\circ$，b=5，解此三角形，并求这个三角形的面积(精确到0.1).

例2　在$\triangle ABC$中，已知$B=45^\circ$，c=10，b=8，解此三角形(角度精确到1°，边长精确到1).

解： 根据正弦定理得

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{10\sin 45^\circ}{8}\approx 0.8839,$$

因为$0^\circ<C<180^\circ$，所以$C\approx 62^\circ$，或$C\approx 118^\circ$.

(1) 当$C\approx 62^\circ$时，

$$A=180^\circ-(B+C)\approx 180^\circ-(45^\circ+62^\circ)=73^\circ,$$

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{8\sin 73^\circ}{\sin 45^\circ}\approx 11;$$

(2) 当$C\approx 118^\circ$时，

$$A=180°-(B+C)\approx180°-(45°+118°)=17°,$$

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{8\sin17°}{\sin45°}\approx3.$$

练一练

在△ABC 中，已知 $A=40°$，$a=20$，$b=28$，解此三角形（角度精确到1°，边长精确到 1）.

例3 在△ABC 中，已知 $B=30°$，$a=4$，$b=8$，解此三角形(角度精确到1°，边长精确到 0.1).

解：根据正弦定理得

$$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{4\sin30°}{8}=0.25,$$

因为 $0°<A<180°$，所以 $A\approx14°$ 或 $A\approx166°$.

(1) 当 $A\approx14°$ 时，

$$C=180°-(A+B)\approx180°-(14°+30°)=136°,$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{4\sin136°}{\sin30°}\approx5.6.$$

(2) 当 $A\approx166°$ 时，

$A+B\approx166°+30°=196°>180°$，此时无解.

练一练

在△ABC 中，已知 $C=60°$，$a=3$，$c=4$，解此三角形（角度精确到1°，边长精确到 0.1).

练习1.3.1

1. 填空题：

(1) 由正弦定理可知：在一个三角形中，各边和__________的比相等.

(2) 任意三角形的面积等于它的任意两条边与它们________的乘积的一半.

2. 在△ABC中，已知下列条件，解三角形，并求这个三角形的面积(角度精确到1°，边长精确到1).

(1) $A=30°$，$B=45°$，$a=8$；

(2) $B=60°$，$C=45°$，$c=10$.

3. 在△ABC中，已知下列条件，解三角形(角度精确到0.1°，边长精确到0.1).

(1) $A=30°$，$a=18$，$b=12$；

(2) $B=115°$，$a=4$，$b=28$；

(3) $C=60°$，$c=11$，$b=12$.

4. 用三角函数的定义证明正弦定理.

5. 在△ABC中，已知$B=22°$，$a=5$，$b=3$，求△ABC的面积(结果保留三位有效数字).

数海拾贝

数中的哲理

零和负数——在实数中，负数比零小；在生活中，没有思想比无知更糟.

零与任何数——任何数与零相加，仍得任何数；光说不做，只能在原地停留.

小数点——丢掉了小数点数值会变大；不拘小节会犯大错误.

相反数——两个相反数相加等于零；聪明不勤奋，将一事无成.

分数——人好比是一个分数，他的实际才能是分子，而他对自己的估价是分母，分母越大，则分数值越小.

1.3.2 余弦定理

思　考

问题：在任意三角形中，已知两边及其夹角或已知三边，三角形也能被唯一确定，那么在这两种情况下，如何解三角形呢？

如图 1-4 所示，设△ABC 三边长分别为 a，b，c，它们的对角分别为 A，B，C．则有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$．

$$\overrightarrow{AC}\quad\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\quad(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}))=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\quad\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2$$

$$=|\overrightarrow{AB}|^2+2|\overrightarrow{AB}|\quad|\overrightarrow{BC}|\cos(180°-B)+|\overrightarrow{BC}|^2$$

$$=c^2-2ac\cos B+a^2,$$

即 $$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$

同理可得：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

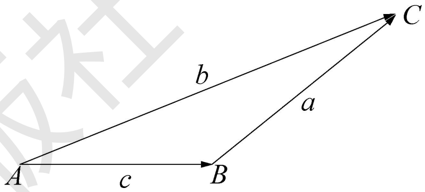


图 1-4

于是我们得到关于任意三角形边和角间关系的另一个重要定理．

余弦定理　三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍．即

$$\boxed{\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}}\qquad(1\text{-}8)$$

在公式(1-8)中，若 $C=90°$，则

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 90°$

$=a^2+b^2$．

勾股定理是余弦定理的特例．

由余弦定理可以得到如下推论：

$$\boxed{\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B&=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}}\qquad(1\text{-}9)$$

想一想

余弦定理及其推论解三角形，可以解决哪类三角形问题?

(1) 已知三边求三个角的余弦，进而求三个角；

(2) 已知两边和它们的夹角求第三边及其他两个角.

例4 在$\triangle ABC$中，已知a=8，b=5，c=7，解三角形(角度精确到0.1°).

解： 根据余弦定理的推论

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\&=\frac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7}\\&\approx0.1429.\end{aligned}$$

$A\approx81.8°$；

$$\begin{aligned}\cos B&=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\&=\frac{8^2+7^2-5^2}{2\times8\times7}\\&\approx0.7857,\end{aligned}$$

$B\approx38.2°$；

$$\begin{aligned}C&=180°-(A+B)\\&\approx180°-(81.8°+38.2°)\\&=60.0°.\end{aligned}$$

练一练

在$\triangle ABC$中，已知a=5，b=9，c=7，解三角形(角度精确到0.1°).

例5 在$\triangle ABC$中，已知a=15，b=5，$C=60°$，解三角形(边长精确到1，角度精确到1°).

解： 根据余弦定理

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=15^2+5^2-2\times15\times5\times\cos60°\end{aligned}$$

$=225+25-2\times15\times5\times0.5$

$=175$，

所以 $c\approx13$.

由正弦定理得

$$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{5\sin 60^\circ}{13}=\frac{5\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{13}\approx0.3331.$$

因为 b 是三角形中最小的边，所以 B 是锐角，利用计算器，得 $B\approx19^\circ$，

$$A=180^\circ-(B+C)\approx180^\circ-(19^\circ+60^\circ)=101^\circ.$$

练一练

在△ABC 中，已知 $c=3$，$b=6$，$A=45^\circ$，解三角形(边长精确到 1，角度精确到 1°).

例6　在△ABC 中，已知 $a=3$，$b=5$，$c=7$，判断三角形的形状.

解：因为三角形三条边中 $c=7$ 是最大边，所以 C 角为最大内角.

根据余弦定理的推论

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}<0,$$

所以 C 为钝角，故△ABC 为钝角三角形.

练一练

在△ABC 中，已知 $a=2$，$b=2\sqrt{3}$，$c=4$，判断三角形的形状.

练习1.3.2

1．填空：

(1) 根据余弦定理及其推论可得，$\cos C=$__________，$a^2=$__________.

(2) 如果 $\cos C>0$，则 $\angle C$ 是__________角；如果 $\cos C<0$，则 $\angle C$ 是__________角；如果 $\cos C=0$，则 $\angle C$ 是__________角.

2．在△ABC 中，已知下列条件，解三角形(角度精确到0.1°，边长精确到 1)：

(1) $a=8$，$b=9$，$c=6$；(2) $a=9$，$b=10$，$c=15$.

3. 在△ABC 中，已知下列条件，解三角形(角度精确到0.1°，边长精确到 0.1)：

(1) $b=8$，$c=3$，$A=60°$；(2) $a=20$，$b=30$，$C=30°$.

4. 在△ABC 中，$\angle A$ 为钝角，$\sin A=\dfrac{4}{5}$，$AB=5$，$AC=3$，求 BC.

5. 在△ABC 中，三边长分别是 $\sqrt{a^2+b^2+ab}$，a，b，求△ABC 的最大内角.

习题1.3

A　组

1．选择题：

(1) 在△ABC 中，$A=45°$，$B=60°$，$a=10$，则 $b=$(　　).

A．$5\sqrt{2}$　　B．$10\sqrt{2}$　　C．$5\sqrt{6}$　　D．$\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$

(2) 在△ABC 中，$\dfrac{2a}{\sin A}-\dfrac{b}{\sin B}-\dfrac{c}{\sin C}=$(　　).

A．0　　B．2　　C．$\dfrac{a}{\sin A}$　　D．$-\dfrac{a}{\sin A}$

(3) 在△ABC 中，$a=5$，$b=6$，$\sin C=\dfrac{2\sqrt{14}}{15}$，则 $S_{\triangle}=$(　　).

A．$\sqrt{14}$　　B．$2\sqrt{14}$　　C．$\sqrt{15}$　　D．$2\sqrt{15}$

(4) 在△ABC 中，$a^2=b^2+c^2-bc$，则 $A=$(　　).

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．120°

2. 填空题：

(1) 在△ABC 中，$a+b=12$，$A=60°$，$B=30°$，则 $b=$_________.

(2) 在△ABC 中，$A=75°$，$C=45°$，$b=2$，则此三角形最小边长为______.

(3) 在$\triangle ABC$中，若$a=3$，那么$b\cos C+c\cos B=$________.

(4) 在$\triangle ABC$中，若$a=20$，$b=15$，$c=10$，那么$S_{\triangle}=$________.

B　组

1．选择题：

(1) 在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b=3\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，那么$C=$(　　).

A．60°或120°　　B．30°或150°

C．90°或30°　　D．45°或135°

(2) 在$\triangle ABC$中，若$b=6$，$c=4$，$\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，则$a=$(　　).

A．6　　B．5　　C．$2\sqrt{17}$　　D．6或$2\sqrt{17}$

(3) 在$\triangle ABC$中，$b=4$，$B=30^\circ$，$C=45^\circ$，则$S_{\triangle}=$(　　).

A．$4+4\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{3}+1$　　C．$4\sqrt{3}+1$　　D．$4\sqrt{3}+2$

(4) 在$\triangle ABC$中，$a=5$，$b=3$，$c=7$，则$\triangle ABC$为(　　).

A．锐角三角形　　B．直角三角形

C．钝角三角形　　D．无法判断

2．在$\triangle ABC$中，$a=3$，$c=3\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，求角C及b.

3．在$\triangle ABC$中，已知$BC=1$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，求$\cot C$的值.

1.4 正弦型函数

在物理学和工程技术中，许多结论可以用形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ (其中 A，ω，φ 是常数)的函数表示．下面我们来研究这类函数简图的作法及性质．

1.4.1 函数 $y=A\sin x$ 的图象与性质

思　考

问题：你还记得如何用“五点法”作函数 $y=\sin x$ 的简图吗？你能写出这五个关键点的坐标吗？

知识链接

五点坐标为：$(0,\ 0)$，$(\frac{\pi}{2},\ 1)$，$(\pi,\ 0)$，$(\frac{3\pi}{2},\ -1)$，$(2\pi,\ 0)$

例1　用“五点法”作出函数 $y=2\sin x$ 与 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 在一个周期内的简图，并与 $y=\sin x$ 图象比较．

解：函数 $y=2\sin x$ 与 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的周期都是 2π，在 $[0,\ 2\pi]$ 上列表如下：描点画图，如图 1-5 所示．

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=2\sin x$	0	2	0	-2	0
$y=\frac{1}{2}\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

从图 1-5 可以看出，对于同一个 x 值，函数 $y=2\sin x$，

数学史料

三角学产生于约 2000 年前的古希腊．“三角学”一词来自希腊文，1748 年瑞士数学家欧拉在他的专著中，引用三角函数符号后，三角学才被看做是包含三角函数和解三角形两部分内容的一门数学的分支学科，三角学简称三角．

三角学的起因是人们要对三角形中的角和边进行精确的测量与计算，后来逐步发展为三角函数．三角函数的应用相当广泛，不仅仅限于交流电、简谐振动等，在生物、天文、地理、机械等方面都有其广泛的应用．

$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象上的点的纵坐标等于函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象上的点的纵坐标的 2 倍．因此，函数 $y=2\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象，可以看做把函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 所表示的曲线上的点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变)而得到．从而，函数 $y=2\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的值域是 $[-2,\ 2]$，最大值是 2，最小值是 -2．

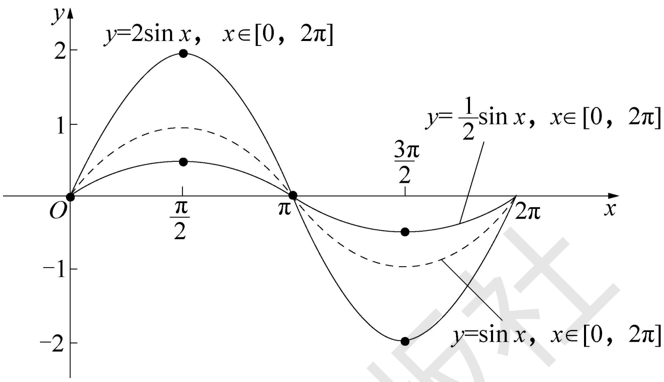


图 1-5

类似地，函数 $y=\dfrac{1}{2}\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象，可以看做把函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象上所有点的纵坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ (横坐标不变)而得到. 从而函数 $y=\dfrac{1}{2}\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的值域是 $[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}]$，最大值是 $\dfrac{1}{2}$，最小值是 $-\dfrac{1}{2}$．

$y=A\sin x$ 的图象与性质

一般地，函数 $y=A\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ (其中 $A>0$ 且 $A\neq1$)的图象可以看做把正弦曲线上所有点的纵坐标伸长(当 $A>1$ 时)或缩短(当 $0<A<1$ 时)到原来的 A 倍(横坐标不变)而得到．函数 $y=A\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的值域是 $[-A,\ A]$，最大值是 A，最小值是 $-A$.

练一练

用“五点法”作出函数 $y=\dfrac{2}{3}\sin x$ 与 $y=\dfrac{3}{2}\sin x$ 在一个周期内的简图，并和 $y=\sin x$ 图象比较.

练习1.4.1

1. 填空题：

(1) 用“五点法”作出函数 $y=\dfrac{1}{10}\sin x$，$x\in[0，2\pi]$ 的图象时，五个关键点是________，________，________，________，________.

(2) 函数 $y=10\sin x$，$x\in[0，2\pi]$，当 $x=$________时，函数取得最大值，最大值是________；当 $x=$________时，函数取得最小值，最小值是________.

(3) 函数 $y=10\sin x$，$x\in[0，2\pi]$ 的图象与 x 轴的交点坐标是________，________，________.

2．作出下列函数在一个周期内的简图：

(1) $y=\dfrac{3}{2}\sin x$；(2) $y=4\sin x$.

3. 作出函数 $y=2\sin(x-37°)\cos 37°+2\cos(x-37°)\sin 37°$ 在一个周期的简图.

4. 作出函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{2\cos x}$ 在一个周期内的简图.

5. 根据函数 $y=5\sin x$，回答下列问题：

(1) 函数的最大值、最小值是什么？

(2) 函数的周期等于什么？

(3) 函数在区间 $[0，2\pi]$ 上的最高点、最低点的坐标是什么？

1.4.2 函数 $y=\sin \omega x$ 的图象与性质

例2 作函数 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin\dfrac{x}{2}$ 在一个周期内的简图.

作法： 函数 $y=\sin 2x$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，作区间 $[0，\pi]$ 上的简图，由 $2x$ 分别等

于 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π，得到 x 的值：0，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{4}$，π.

列表如下：

$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y=\sin 2x$	0	1	0	-1	0

先把 $2x$ 看做一个整体对待，然后再确定 x 的值.

描点画图，如图 1-6 所示.

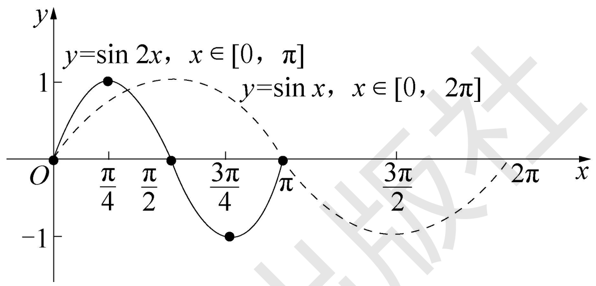


图 1-6

从图 1-6 可以看出，函数 $y=\sin 2x$，$x\in[0,\ \pi]$ 的图象，可以看做把函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 所表示的曲线上的点的横坐标压缩到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)而得到.

函数 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$. 作区间 $[0,4\pi]$ 上的简图. 由 $\frac{x}{2}$ 分别等于 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π，得到 x 的值：0，π，2π，3π，4π. 列表如下：

$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	π	2π	3π	4π
$y=\sin\frac{x}{2}$	0	1	0	-1	0

描点画图，如图 1-7 所示.

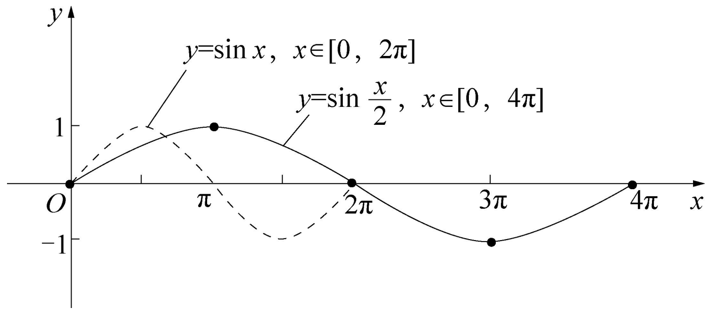


图 1-7

类似地，函数 $y=\sin\frac{x}{2}$，$x\in[0,4\pi]$ 的图象，可以看做把函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 所表示的曲线上的点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)而得到.

与函数 $y=\sin x$ 比较，函数 $y=\sin\omega x$ 中的 ω 影响函数的周期：当 $\omega=2$ 时，函数 $y=\sin 2x$ 的周期是 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；当 $\omega=\frac{1}{2}$ 时，函数 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的周期是 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

一般地，函数 $y=\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 的周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$. 这与前面分析函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 所得到的公式相同.

$y=\sin\omega x$ 的图象与性质

函数 $y=\sin\omega x$，$x\in\mathbf{R}$ (其中 $\omega>0$ 且 $\omega\neq1$)的图象也可以看做把正弦曲线上所有点的横坐标缩短(当 $\omega>1$ 时)或伸长(当 $0<\omega<1$ 时)到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍(纵坐标不变)而得到.

练一练

作函数 $y=\sin 3x$ 与 $y=\sin\frac{x}{3}$ 在一个周期内的简图，并和 $y=\sin x$ 图象比较.

练习1.4.2

1．填空题：

(1) 用“五点法”作出函数 $y=\sin\frac{2}{3}x$ 在一个周期内的简图时，五个关键点是_______，_______，_______，_______，_______.

(2) 函数 $y=\sin\frac{2}{3}x$，$x\in[0，3\pi]$，当 $x=$_______时，函数取得最大值，最大值是_______；当 $x=$_______时，函数取得最小值，最小值是_______.

(3) 函数 $y=\sin 4x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 的图象与 x 轴的交点坐标是______，______，_______.

2．作出下列函数在一个周期内的简图：

(1) $y=\sin 3x$；(2) $y=\sin\frac{3}{2}x$.

3．作出函数 $y=2\sin(3x-37°)\cos 37°+2\cos(3x-37°)\sin 37°$ 在一个周期内的简图.

4．作出函数 $y=\frac{4\sin 6x}{2\cos 3x}$ 在一个周期内的简图.

5．根据函数 $y=5\sin 3x$，回答下列问题：

(1) 函数的最大值、最小值是什么？

(2) 函数的周期等于什么？

(3) 函数在区间 $[0，\frac{2\pi}{3}]$ 上的最高点、最低点的坐标是什么？

1.4.3 函数 $y=A\sin(\omega x-\varphi)$ 的图象与性质

例3　作出函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 在一个周期内的简图.

解： 函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 的周期是 2π. 对于 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$，当 $x+\frac{\pi}{4}$ 分别取

0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π 时， 得到对应的 x 值为 $-\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{4}$，所对应的五点就是函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{4}，\frac{7\pi}{4}]$ 图象上的五个关键点．列表如下：

$x+\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$	0	1	0	-1	0

描点画图，如图 1-8 所示．

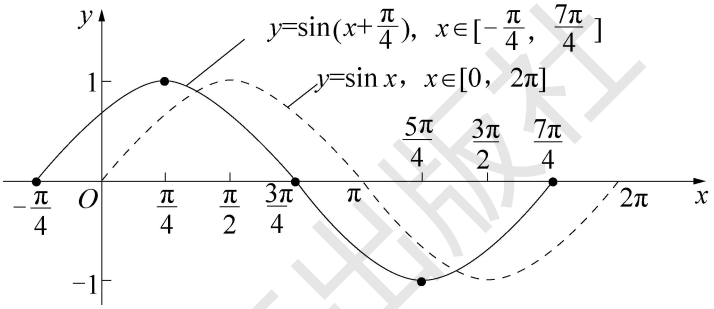


图 1-8

函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 的图象可以看做是函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度而得到的．

类似地，函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ 的图象可以看做是函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度而得到的．

$y=\sin(x+\varphi)$ 的图象与性质

一般地，函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象也可以看做是把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左 ($\varphi>0$ 时)或向右 ($\varphi<0$ 时)平行移动 $|\varphi|$ 个单位长度而得到的．

练一练

作出函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 与 $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ 在一个周期内的简图．

例4 作出函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 在一个周期内的简图.

解： 函数周期是 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 当 $2x+\frac{\pi}{3}$ 依次取 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π 时，得到对应的 x 值为 $-\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{12}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{7\pi}{12}$，$\frac{5\pi}{6}$. 所对应的五点就是函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}]$ 图象上的五个关键点．列表如下：

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$	0	3	0	-3	0

描点画图，如图 1-9 所示.

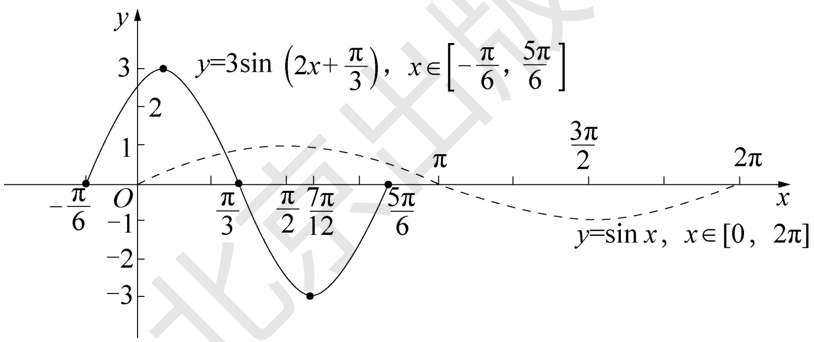


图 1-9

利用这类函数的周期性，把上面所得的图象向左和向右扩展出去，就得到 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象.

函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象也可以看做是用下面的方法得到的：

(1) 把 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 的图象；

(2) 把 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 的图象上所有的点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不

变)得到 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象；

(3) 把 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象上所有的点的纵坐标伸长到原来的 3 倍(横坐标不变)得到 $y=3\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象(图 1-9).

> **$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与性质**
>
> 一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0，x\in\mathbf{R})$ 的图象，可以由正弦曲线 $y=\sin x$ 经过所有点的平移以及周期和 A 的变换而得到，所以它又叫做正弦型曲线．显然，它上下振动幅度是 A，周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，当 $\omega x+\varphi=0$ 时，$x=-\dfrac{\varphi}{\omega}$，所以函数图象在区间 $[-\dfrac{\varphi}{\omega}，-\dfrac{\varphi}{\omega}+\dfrac{2\pi}{\omega}]$ 上的五个关键点是 $(-\dfrac{\varphi}{\omega}，0)$，$(-\dfrac{\varphi}{\omega}+\dfrac{T}{4}，A)$，$(-\dfrac{\varphi}{\omega}+\dfrac{T}{2}，0)$，$(-\dfrac{\varphi}{\omega}+\dfrac{3T}{4}，-A)$，$(-\dfrac{\varphi}{\omega}+T，0)$.

“五点法”是迅速作出 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的重要方法.

在物理学中，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in[0，+\infty)(A>0，\omega>0，x\in\mathbf{R})$ 可以表示一个振动量，此时，A 表示振动时离开平衡位置的最大距离，称为振幅；往复振动一次所需的时间 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 称为周期；$\omega x+\varphi$ 称为相位；$x=0$ 时的相位 φ 称为初相.

练习1.4.3

1．填空题：

(1) 已知函数 $y=\dfrac{1}{3}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$，则 $A=$________，$\omega=$________，$\varphi=$________，$T=$________.

(2) 已知函数 $y=5\sin(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3})$，则 $A=$________，$\omega=$________，$\varphi=$________，$T=$________.

(3) 函数 $y=3\sin 2x$ 的图象在 $[0,\ \pi]$ 上的五个关键点是________________.

(4) 函数 $y=\dfrac{1}{4}\sin(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3})$ 的图象在 $[\dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{14\pi}{3}]$ 上的五个关键点是________.

(5) 作函数 $y=4\sin(4x-\dfrac{\pi}{6})$ 的图象，可以先把正弦曲线 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 上所有点________平行移动________个单位长度，再把所得各点的横坐标________到原来的________(纵坐标不变)，再把所得各点的纵坐标__________到原来的________(横坐标不变)而得到.

2. 已知函数 $y=3\sin(x-\dfrac{\pi}{5})$，求：

(1) 函数的周期；(2) 五个关键点的坐标；

(3) 画出函数在一个周期内的简图.

3. 用“五点法”作出函数 $y=5\sin(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{12})$ 在一个周期内的简图.

4. 说明由 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变化(平移、横纵坐标的伸缩)得到下面的函数图象：

(1) $y=5\sin(3x+\dfrac{\pi}{4})$；(2) $y=\dfrac{2}{3}\sin(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4})$.

5. 求下列函数的周期和最大值、最小值：

(1) $y=\cos x+\sqrt{3}\sin x$；(2) $y=4\sin x+3\cos x$.

习题1.4

A　组

1. 填空题：

(1) 作出函数 $y=3\sin(2x-\dfrac{\pi}{5})$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象：可以先把正弦曲线 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 上所有的点向________(左或右)平行移动__________个单位长度；再把所得各点的横坐标______________(缩短或伸长)到原来的_________(纵坐标不变)；再把所得各点的纵坐标_________(缩短或伸长)

到原来的________(横坐标不变)而得到．

(2) 函数 $y=3\sin(2x-\dfrac{\pi}{5})$ 在 $[\dfrac{\pi}{10},\ \dfrac{11\pi}{10}]$ 上的五个关键点是__________，最大值是________，最小值是________．

(3) 已知函数 $y=4\sin(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6})$，则 $A=$__________，$\omega=$__________，$\varphi=$________．

2．选择题：

(1) 函数 $y=\dfrac{1}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$ 在一个周期内的图象的起点坐标是(　　)．

A．$(\dfrac{\pi}{6},\ 0)$　　B．$(-\dfrac{\pi}{6},\ 0)$　　C．$(\dfrac{\pi}{12},\ 0)$　　D．$(-\dfrac{\pi}{12},\ 0)$

(2) 函数 $y=10\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的振幅、周期分别是(　　)．

A．$A=10$，$T=\pi$　　B．$A=10$，$T=2\pi$

C．$A=-10$，$T=4\pi$　　D．$A=-10$，$T=8\pi$

3．用“五点法”作出下列函数在一个周期内的简图：

(1) $y=3\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$；　(2) $y=\dfrac{1}{2}\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$．

4．求出下列函数的周期和最大值、最小值：

(1) $y=\dfrac{1}{2}\sin 3x$；(2) $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})$；

(3) $y=3\sin(3x-\dfrac{\pi}{4})$；(4) $y=5\sin(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{7})$．

B　组

1．求函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的周期和值域，并且作出它在一个周期内的简图．

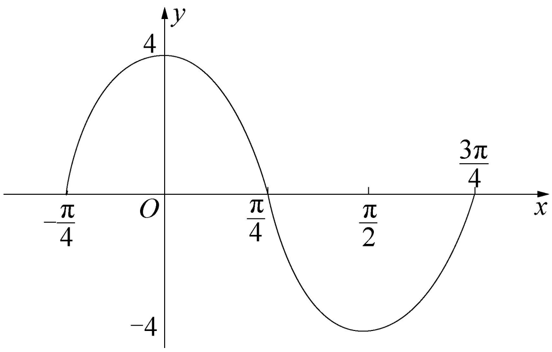
2．求函数 $y=4\sin x+3\cos x$ 的周期和最大值、最小值．

3．函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\ (x\in\mathbf{R})\ (A>0，\omega>0)$ 在一个周期内的图象如图所示：

(1) 求函数的表达式；

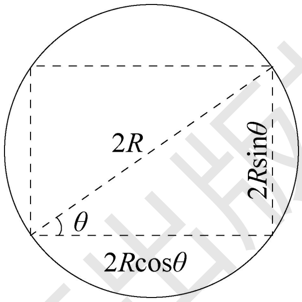
(2) 求函数的增区间；

(3) 求函数的最大值，并求函数取得最大值时的自变量的集合．



第 3 题图

4. 如图，把一段半径为 R 的圆木锯成横截面为矩形的方木，怎样锯才能使横截面的面积最大.



第 4 题图

1.5 三角函数应用举例

1.5.1 简谐交流电与简谐振动

在电学中，大小和方向都随时间变化的电流叫做交变电流，简称交流电．最简单的是简谐交流电．其电流的大小和方向随时间而变化，满足

$$i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_0)\ (I_{\mathrm{m}} > 0,\ \omega > 0,\ -\pi \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi)$$

的函数关系．其中 I_{m} 是电流强度的最大值，叫做简谐交流电的峰值；$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 叫做简谐交流电的变化周期，表示交流电完成一次周期性变化所需的时间(单位为s)；单位时间内，交流电完成周期性变化的次数叫做频率，用 f 表示，$f = \dfrac{1}{T}$，单位为“赫兹”，记做“Hz”；$\omega t + \varphi_0$ 叫做相位，φ_0 叫做初相位．

知识链接

峰值、频率和初相位是简谐交流电的三个要素．它们从三个不同的方面描述了简谐交流电的物理特征．

在物理学中，用 $S = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ 表示简谐振动，S 表示位移，A 叫做振幅，$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 叫做简谐振动的变化周期，$f = \dfrac{1}{T}$ 叫做简谐振动的变化频率，$\omega t + \varphi_0$ 叫做相位，φ_0 叫做初相位．

例1　试求 $f = 50\text{Hz}$ 的简谐交流电的周期．

解： 周期 $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{50} = 0.02(\text{s})$．

例2　已知简谐交流电的电流强度 i 随时间 t 变化的部分曲线如图 1-10 所示．试写出 i 与 t 的函数关系式．

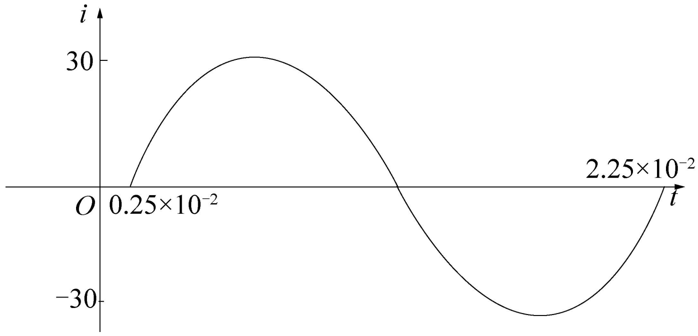


图 1-10

解： 电流 i 随时间 t 的变化满足正弦型函数关系，设所求函数关系为

$$i = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

观察图形，得到峰值 $A = 30$；周期 $T = 2.25\times10^{-2} - 0.25\times10^{-2} = 2\times10^{-2}$．于是有

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\times10^{-2},$$

解得 $\omega = 100\pi$，因为图中所示起点的横坐标为 0.25×10^{-2}，即 $\omega t + \varphi_0 = 0$ 时，$t = 0.25\times10^{-2}$，所以

$$\varphi_0 = -\omega t = -100\pi\times0.25\times10^{-2} = -\frac{\pi}{4},$$

因此所求的函数关系式为 $i = 30\sin(100\pi t - \frac{\pi}{4})$.

在电学中，同频率的正弦量(即形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的量)进行的求和运算，叫做同频率正弦量的合成．

练一练

设某质点作简谐振动，其振幅为 4，频率为 $\frac{1}{2}$，初相位为 $-\frac{\pi}{3}$，写出这个质点的位移 x 与时间 t 的函数关系的解析式．

例3　设 $i_1 = I\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$，$i_2 = I\sin(\omega t + \frac{4\pi}{3})$，求 $i = i_1 + i_2$.

解：

$$
\begin{aligned}
i &= i_1 + i_2 = I\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + I\sin(\omega t + \frac{4\pi}{3}) \\
&= I(\sin\omega t\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\omega t\sin\frac{2\pi}{3}) + I(\sin\omega t\cos\frac{4\pi}{3} + \cos\omega t\sin\frac{4\pi}{3}) \\
&= I(\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3})\sin\omega t + I(\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3})\cos\omega t \\
&= I[(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})]\sin\omega t + I[\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2})]\cos\omega t \\
&= -I\sin\omega t.
\end{aligned}
$$

两个同频率的正弦量的合成仍是正弦量，其频率不变，只是峰值及初相位发生了变化.

练一练

已知两种简谐交流电的电流强度分别为 $i_1 = 36\sin\omega t$ 及 $i_2 = 24\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$，试求出这两个电流强度的合成，并指出其频率与初相.

例4　弹簧挂着的小球作上下振动(图 1-11)，它在 t(s) 内离开平衡位置的距离 s(cm) 由 $s = 3\sin(t + \frac{\pi}{4})$ 决定. 试作出这个函数在一个周期内的图象，并且回答以下问题:

(1) 小球在开始振动 ($t = 0$) 时，离开平衡位置的距离有多大？

(2) 小球上升到最高点和下降到最低点时离开平衡位置的距离有多大？

(3) 经过多长时间，小球重复振动一次？

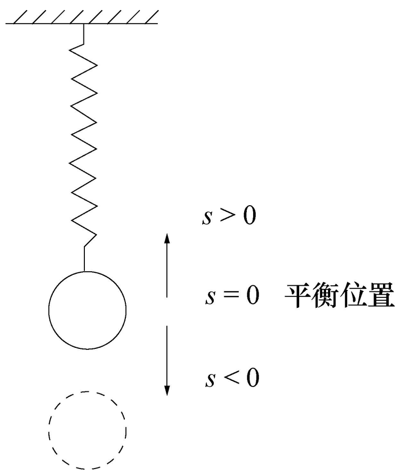


图 1-11

解：由函数 $s=3\sin(t+\frac{\pi}{4})$，得出 $A=3$，$T=2\pi$，起点 $(-\frac{\pi}{4},\ 0)$．用“五点法”作出它在一个周期内的图象，列表如下：

$t+\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$s=3\sin(t+\frac{\pi}{4})$	0	3	0	-3	0

描点作图，即得函数 $s=3\sin(t+\frac{\pi}{4})$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 上的图象(图 1-12)．

由题意可知，该函数的周期 $T=2\pi$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 上，

当 $t=0$ 时，$s=3\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

当 $t=2\pi$ 时，$s=3\sin(2\pi+\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

曲线起点由 $(0,\ \frac{3\sqrt{2}}{2})$ 开始，终点为 $(2\pi,\ \frac{3\sqrt{2}}{2})$．

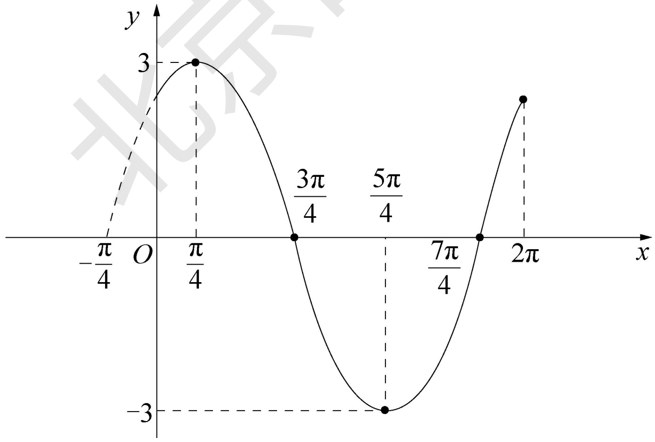


图 1-12

注意：区间 $[-\frac{\pi}{4},\ 0]$ 上的一段曲线用虚线表示，再画出区间 $[\frac{7\pi}{4},\ 2\pi]$ 上的一段曲线，这样，图上的实线部分就是函数 $s=3\sin(t+\frac{\pi}{4})$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 上的图象.

(1) 当 $t=0$ 时，$s=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，即小球开始振动时，离开平衡位置的距离是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm；

(2) 函数的振幅为 3，即小球上升到最高点和下降到最低点时，离开平衡位置的距离都是 3 cm；

(3) 函数的周期是 2π，即每经过 2π 秒小球重复振动一次．

练一练

设某质点的位移 x 随时间 t 变化的规律为：$x=3\sin(3t-\frac{\pi}{6})$，求物体运动的周期、振幅和初相位．

练习1.5.1

1．指出下列函数的最大值和最小值：

(1) $y=2\sin(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{3})$；(2) $y=\frac{1}{2}\sin(3x-\frac{\pi}{4})$;

(3) $y=-2\sin(\frac{2\pi}{3}-2x)$；(4) $y=\sin 3x+\cos 3x$.

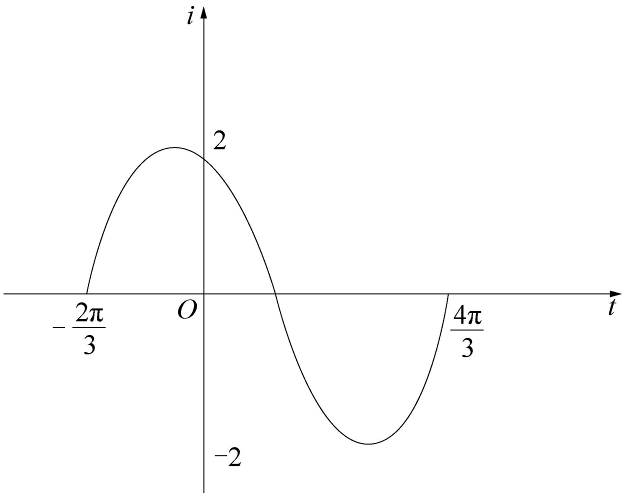
2．求下列函数的振幅、周期和初相位：

(1) $i=3\sin(\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{6})$；(2) $i=\frac{1}{2}\sin(3t-\frac{\pi}{6})$;

(3) $i=\sqrt{3}\sin 2t+\cos 2t$；(4) $i=\cos t-\sin t$.

3．已知两个简谐交流电的电流 $i_1=\sqrt{3}\sin(100\pi t+\frac{\pi}{3})$，$i_2=\sin(100\pi t-\frac{\pi}{6})$，求 $i=i_1+i_2$，并指出其频率和初相位．

4．已知简谐交流电的电流强度在一个周期内的图象如图所示，试写出函数的解析式．



第 4 题图

1.5.2 解三角形

正弦定理和余弦定理在实际生活中有着广泛的应用．下面介绍它在测量距离、角度、高度以及解决一些物理问题上的应用．

例5　如图 1-13 所示，要测量底部不能到达的烟囱的高 AB，从与烟囱底部在同一水平直线上的 C，D 两处，测得烟囱的仰角分别为 $\alpha=35°$ 和 $\beta=50°$，CD 间的距离是 15 m，已知测角仪高 1.5 m，求烟囱的高(精确到 0.1m).

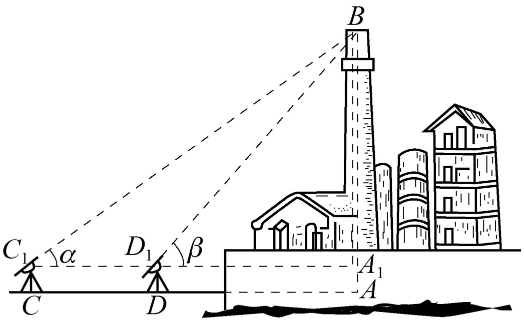


图 1-13

解： 在△BC_1D_1中，根据正弦定理得：

$$BD_1=\frac{C_1D_1\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$=\frac{15\sin 35°}{\sin(50°-35°)}$$

$$\approx\frac{15\times 0.5736}{0.2588}$$

$$\approx 33.2(\text{m}),$$

在 Rt△ D_1A_1B 中，

$$A_1B=BD_1\sin\beta$$

$$=33.2\times\sin 50°$$

$$\approx 33.2\times 0.7660$$

$$=25.4(\text{m}),$$

烟囱的高为 $AB=A_1B+AA_1\approx 25.4+1.5=26.9(\text{m})$.

答：烟囱的高约为 26.9m.

练一练

如图 1-14 所示，在塔底 B 处测得山顶 C 的仰角为 60°，在山顶 C 测得塔顶 A 的俯角为 45°，已知塔高 $AB=20\,\text{m}$，求山高 DC (精确到 0.1 m).

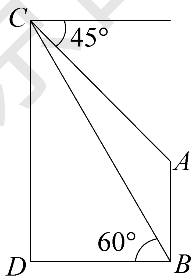


图 1-14

例6　如图 1-15 所示，海中小岛 A 周围 38 海里内有暗礁，船正向南航行，在 B 处测得小岛 A 在船的南偏东 30°，航行 30 海里后，在 C 处测得小岛 A 在船的南偏东 45°，如果此船不改变航向，继续向南航行，有无触礁的危险？

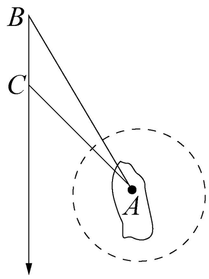


图 1-15

解： 在△ ABC 中，$BC=30$，$B=30°$，

$\angle ACB=180°-45°=135°$，所以 $A=15°$.

根据正弦定理

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B},$$

有　　$\dfrac{30}{\sin 15°}=\dfrac{AC}{\sin 30°}$，

所以　$AC=\dfrac{30\sin 30°}{\sin 15°}=60\cos 15°=15\sqrt{6}+15\sqrt{2}$.

所以 A 到 BC 所在直线的距离为

$$AC\cdot\sin 45°=(15\sqrt{6}+15\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=15(\sqrt{3}+1)\approx 40.98>38.$$

故不改变航向，继续向南航行，无触礁的危险.

答：不改变航向，继续向南航行，无触礁的危险.

例7　某巡逻艇在 A 处发现北偏东 $45°$ 相距 9 海里的 C 处有一艘走私船，正沿南偏东 $75°$ 的方向以 10 海里/小时的速度向我海岸行驶，巡逻艇立即以 14 海里/小时的速度沿着直线方向追去，问巡逻艇应该沿什么方向去追？需要多少时间才能追赶上该走私船(角度精确到 $1'$)？

解： 如图 1-16 所示，设巡逻艇经过 x 小时后在 B 处追上走私船，

则 $CB=10x$，$AB=14x$，$AC=9$，$\angle ACB=75°+45°=120°$，

所以 $(14x)^2=9^2+(10x)^2-2\times 9\times 10x\ \cos 120°$，

所以 $32x^2-30x-27=0$，

所以 $x=\dfrac{3}{2}$ 或 $x=-\dfrac{9}{16}$ (舍)，

$BC=10x=15$，$AB=14x=21$，

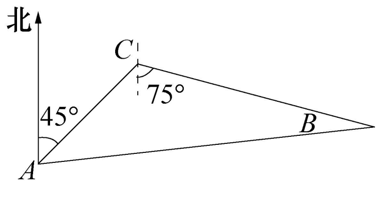


图 1-16

所以 $\sin\angle BAC=\dfrac{BC\sin 120°}{AB}=\dfrac{15}{21}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

所以 $\angle BAC=38°13'$ 或 $141°47'$ (舍).

故应沿北偏东 $38°13'+45°=83°13'$.

另解：同上解得$BC=15$， $AB=21$，

在△ABC中，根据余弦定理

$$\cos\angle CAB=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\times AB}$$
$$=\frac{81+441-225}{2\times9\times21}$$
$$=\frac{11}{14}$$
$$\approx0.7857,$$

所以 $\angle CAB\approx38°13'$，在沿北偏东$38°13'+45°=83°13'$.

答：巡逻艇应沿北偏东$83°13'$的方向追赶，经过1.5小时追赶上该走私船.

练一练

如图 1-17 所示，我舰在敌岛A南偏西$50°$相距12海里的B处，发现敌舰正由岛沿北偏西$10°$的方向以10海里/小时的速度航行，问：我舰需要以多大速度，沿什么方向航行才能在2小时以内追上敌舰?

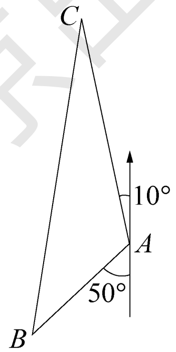


图 1-17

例8 图 1-18 是曲柄连杆机构的示意图. 当曲柄CB绕C点旋转时，通过连杆AB的传递，活塞作直线往复运动. 当曲柄在CB_0位置时，曲柄和连杆成一条直线，连杆的端点A在A_0处. 设连杆AB长为 340mm，曲柄CB长为 85mm，曲柄自CB_0按顺时针方向旋转$80°$，求活塞移动的距离(即连杆的端点A移动的距离A_0A)(精确到 1mm).

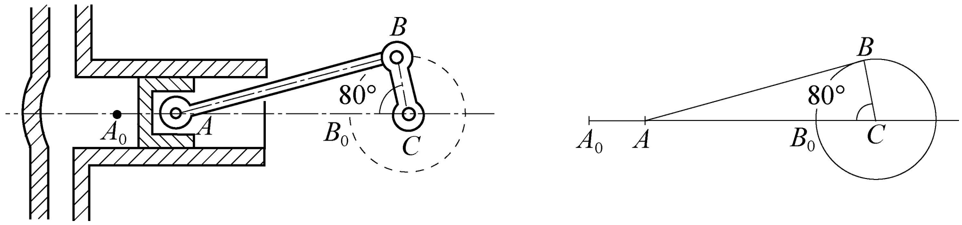


图 1-18

解： 在△ ABC 中，根据正弦定理

$$\sin A=\frac{BC\sin C}{AB}=\frac{85\times\sin 80^\circ}{340}=0.2462,$$

因为 $BC<AB$，所以 A 为锐角，

得 $A=14^\circ15'$，

所以 $B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(14^\circ15'+80^\circ)=85^\circ45'$，

根据正弦定理

$$AC=\frac{AB\sin B}{\sin C}=\frac{340\times\sin 85^\circ45'}{0.9848}=344.3(\text{mm}),$$

所以 $A_0A=A_0C-AC=(AB+BC)-AC$

$=(340+85)-344.3$

$=80.7\approx 81\,(\text{mm})$.

答：活塞移动的距离约为 81mm.

练一练

如图 1-19，为曲柄连杆示意图，当曲柄 OA 在水平位置 OB 时，连杆端点 P 在 Q 的位置，当 OA 自 OB 按顺时针方向旋转 α 角时，P 和 Q 之间的距离是 x，已知 $OA=25\text{cm}$，$AP=125\text{cm}$，分别求下列条件的 x 值(精确到 0.1cm):

(1) $\alpha=50^\circ$；　(2) $\alpha=90^\circ$；　(3) $\alpha=135^\circ$；　(4) $OA\perp AP$.

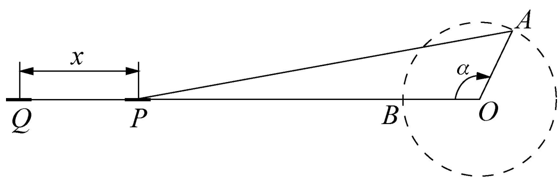
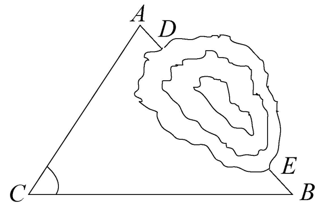


图 1-19

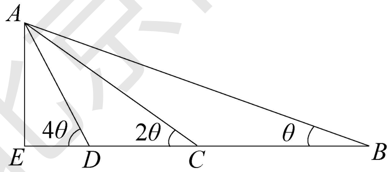
练习1.5.2

1．为了开凿隧道，要测量隧道口 D，E 间的距离，为此在山的一侧选取适当的点 C (如图)，测得 $CA = 482.8\text{m}$，$CB = 631.5\text{m}$，$\angle ACB = 56^\circ 18'$，又测得 A，B 两点到隧道口的距离 $AD = 80.12\text{m}$，$BE = 40.24\text{m}$ (A，D，E，B 在一直线上)，计算隧道 DE 的长(精确到 0.1m).



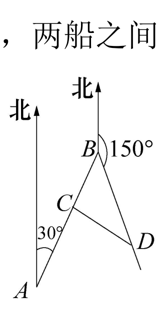
第 1 题图

2．如图，在点 B 处测得建筑物 AE 的顶端 A 的仰角为 θ，沿 BE 方向前进 30 m 至点 C 处测得顶端 A 的仰角为 2θ，再继续前进 $10\sqrt{3}\text{m}$ 至 D 点，测得顶端 A 的仰角为 4θ，求 θ 的大小和建筑物 AE 的高.



第 2 题图

3．如图，已知 A，B 两点的距离为 100 海里，B 在 A 的北偏东 30°，甲船自 A 以 50 海里/小时的速度向 B 航行，同时乙船自 B 以 30 海里/小时的速度沿方位角 150° 方向航行，问航行几小时，两船之间的距离最小？



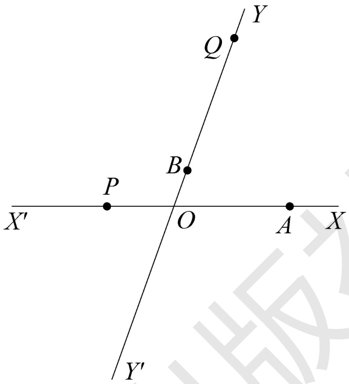
第 3 题图

4. 如图，有两条相交成60°角的直线 XX'，YY'，交于点是 O，甲、乙分别在 OX，OY 上，起初甲离点 O 3 km，乙离点 O 1 km，后来两人同时用每小时 4 km 的速度，甲沿 XX' 方向，乙沿 $Y'Y$ 方向步行，问：

(1) 起初，两人的距离是多少？

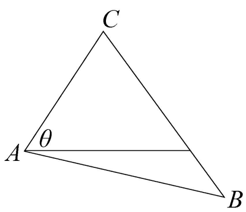
(2) 用包含 t 的式子表示 t 小时后两人的距离；

(3) 什么时候两人的距离最短？



第 4 题图

5. 假定自动卸货汽车装有一车货物，货物与车箱的底部的滑动摩擦系数为0.3，油泵顶点 B 与车箱支点 A 之间的距离为1.95 m，AB 与水平线之间的夹角为 $6°20'$，AC 长为1.40 m，求货物开始下滑时 BC 的长.



第 5 题图

习题1.5

A　组

1. 设某质点的位移 x 随时间 t 变化的规律为 $x=-5\sin(3t+\dfrac{\pi}{6})$. 求振幅、周期和

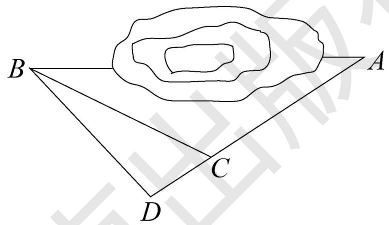
初相位.

2. 试求 $f=60\text{Hz}$ 的简谐交流电的周期.

3. 已知两种简谐交流电的电流强度 I 随时间 t 变化的规律分别为：$I_1=36\sin\omega t$，$I_2=24\sin(\omega t+\frac{\pi}{3})$，分别求它们的振幅、周期、初相位，以及它们的相位差.

4. 一艘轮船在海上 A 处测得灯塔 B 在北偏东 60° 方向上，以后该船沿北偏东 45° 方向以每小时 24 海里的速度航行半小时到 C 处，望见灯塔 B 在正东方，求 C 处到灯塔 B 的距离(精确到 0.1 海里).

5. 如图，A，B 两点间有座小山，不能直接丈量距离．在点 D 测得 $\angle BDA=100^\circ$，由 D 向 DA 方向前进 100m 到点 C，又测得 $\angle BCA=120^\circ$，AC=300m，试计算 A，B 间的距离.



第 5 题图

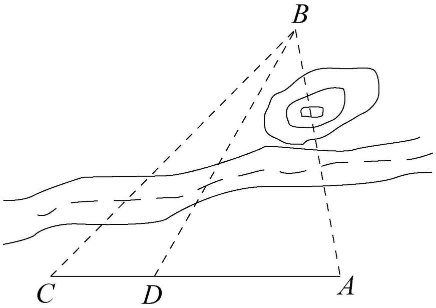
B　组

1. 设某质点作简谐振动，其振幅为 3，频率为 2，初相位为 $\frac{\pi}{4}$，写出这个质点的位移 x 与时间 t 的函数关系的解析式；求出这个函数的最小正周期；作出这个函数在从 t=0 开始的一个周期的图象.

2. 已知三个同频率的简谐交流电的电压，其频率为 ω，峰值分别为 311V、180V、45V，其相位差是 $\varphi_1-\varphi_2=\frac{\pi}{4}$，$\varphi_2-\varphi_3=\frac{2\pi}{3}$．若取 U_2 的初相位为零，试分别写出这三个电压 U 与时间 t 的函数关系的解析式.

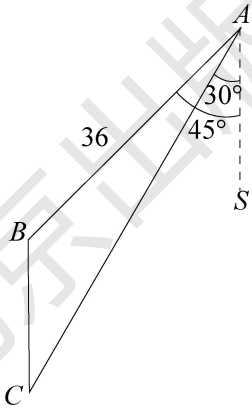
3. 如图，A，B 两点间有小山和小河．为求 AB 的长，需选择一点 C，使 AC 可直接丈量，且 B 和 C 两点可通视．测得 AC=180m，CD=60m，$\angle ACB=45^\circ$，

$\angle ADB = 60°$，求 AB 的长(精确到 0.1m).



第 3 题图

4．一只船下午一点钟在 A 处，这时望见西南方有一座灯塔 B，船和灯塔相距 36 海里．船以 26 海里/小时的速度向南偏西 $30°$ 的方向航行到 C 处，看见灯塔在船的正北方向，此时应该是下午几点钟？这时船和灯塔相距多远？



第 4 题图

数海拾贝

大金字塔之谜

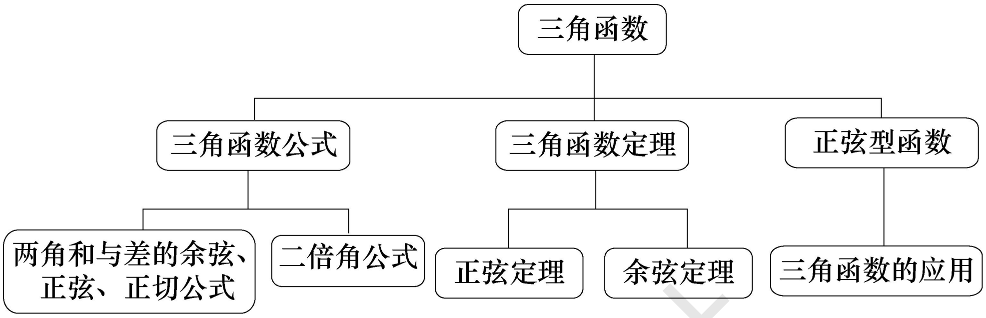
埃及的金字塔是古埃及文明的代表作，是埃及国家的象征，是埃及人民的骄傲．金字塔，阿拉伯文意为“方锥体”，它是一种方底、尖顶的石砌建筑物，是古代埃及埋葬国王、王后或王室其他成员的陵墓。它既不是金子做的，也不

是我们通常所见的宝塔形．它规模宏大，从四面看都呈等腰三角形，很像汉语中的“金”字，故中文形象地把它译为“金字塔”．埃及迄今发现的金字塔共约八十座，其中最大的是以高耸巍峨而著称的，被称为古代世界七大奇迹之首的胡夫大金字塔．英国有位天文学和数学的业余爱好者，名叫约翰 • 泰勒，他曾根据文献资料中提供的数据对大金字塔进行了研究．经过计算，他发现胡夫大金字塔令人难以置信地包含着许多数学上的原理．他首先注意到胡夫大金字塔底角不是 60°，而是 51°51′，从而发现每壁三角形的面积等于其高度的平方．另外，塔高与塔基周长的比就是地球半径与周长之比，因而，用塔高来除以底边的 2 倍，即可求得圆周率．泰勒认为这个比例绝不是偶然的，它证明了古埃及人已经知道地球是圆形的，还知道地球半径与周长之比．英国数学家查尔斯 •皮奇 • 史密斯教授于 1864 年考察胡夫大金字塔后声称他发现了大金字塔更多数学上的奥秘．例如，塔高乘 10^9 就等于地球与太阳之间的距离，大金字塔不仅包含着长度的单位，还包含着计算时间的单位：塔基的周长按照某种单位计算的数据恰为一年的天数等．

大金字塔还有很多的数学上的奥秘，至今仍然是远没有完全解开的谜．

小结与复习

一、知识结构图



二、学习要求

1．掌握两角和与差的余弦、正弦、正切公式，能够运用公式进行简单的三角函数式的求值、化简和证明．

2．掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式，能够运用公式进行简单的三角函数式的求值、化简和证明．

3．掌握正弦型函数的图象，并能够通过简图理解性质，掌握用“五点法”画正弦型函数简图的方法．

4．掌握正弦定理和余弦定理，会应用其解三角形，会求解一些简单的应用问题．

5．体会把未知问题化归为已知问题的化归思想，提高运用公式进行恒等变形的能力．

三、学习中应注意的问题

1．在使用两角和与差公式时，要切实弄清函数的排列顺序及式中每一项的符号．

2．牢记公式并能熟练地将公式左右互化．

3．在本章中，我们大量地运用了化归思想，这是一种重要的数学思想，我

们用过的化归包括以下几个方面：

(1) 把未知化归为已知．例如，用二倍角公式时，用单角的三角函数值求二倍角的三角函数值．

(2) 等价化归．例如，进行三角函数式的化简、恒等变形和证明恒等式．

4．作出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图应先找出起关键作用的五个点：$(-\frac{\varphi}{\omega}, 0)$，$(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{4}, A)$，$(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{2}, 0)$，$(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{3T}{4}, -A)$，$(-\frac{\varphi}{\omega}+T, 0)$．其中 $T=\frac{2\pi}{\omega}$．这五个点是使函数取得最大值、最小值以及曲线与 x 轴相交的点．

5．在应用正弦、余弦定理解任意角三角形问题时，应注意对已知三角形两边和其中一边的对角类型题目，解的情况可能有一解，可能有两解，可能无解．要注意分析解的情况．

6. 在实际问题中，许多量之间有确定性的依赖关系．在研究它们的变化规律时，对变量的变化情况进行探讨，找出变量间的内在联系，建立这些变量之间的函数关系式，是一种有效的方法．

复习题

A　组

一、填空题

1. 不查表求值 $\sin 101^\circ \cos 71^\circ - \cos 101^\circ \sin 71^\circ =$__________.

2. $8\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8} =$________.

3. $\cos(\alpha + 30^\circ)\cos\alpha + \sin(\alpha + 30^\circ)\sin\alpha =$______.

4. $2\cos^2\dfrac{3\pi}{8} - 1 =$________.

5. 已知 $\tan\alpha = -3$，$\tan\beta = -5$，则 $\tan(\alpha+\beta) =$________.

6. 化简：$\dfrac{1}{2}\cos\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha =$________.

7. 函数 $y = 2\sin(4x - \dfrac{\pi}{8})$ 的周期是_______，最大值是________，最小值是_____.

8. 在△ABC 中，BC=8，A=30°，B=45°，则 AC=_____，C=_____，△ABC 的面积=_____(保留三位有效数字).

9. 在△ABC 中，AB=5，BC=8，B=60°，AC=______，A=_____(边长精确到 1，角度精确到 1°).

二、选择题

1. 已知 $\cos\alpha = a$，$\cos\beta = b$，且 $\alpha \in (0,\pi)$，$\beta \in (0,\dfrac{\pi}{2})$，那么 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值的个数是(　　).

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

2. $\dfrac{2\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ}$的值是(　　).

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

3. 函数 $y=3\sin(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{6})$ 的周期是(　　).

A. 3π　　B. $\dfrac{\pi}{3}$

C. $\dfrac{3\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$

三、解答题

1. 化简：

(1) $\sin(\pi+x)\sin(-x)-\cos(\pi-x)\cos(-x)$；

(2) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$；

(3) $\dfrac{\tan 72^\circ-\tan 12^\circ}{1+\tan 72^\circ\tan 12^\circ}$；

(4) $2\sin(\dfrac{\pi}{4}+x)\cos(\dfrac{\pi}{4}+x)$.

2. 已知$\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$，$\alpha\in(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi)$，求$\sin 2\alpha$和$\cos 2\alpha$的值.

3. 求证：$\dfrac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)=\cos(60^\circ-\alpha)$.

4. 用“五点法”作出下列函数在一个周期的区间上的简图：

(1) $y=4\sin x$；

(2) $y=\sin 4x$；

(3) $y=3\sin 2x$；

(4) $y=3\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$.

5. 求下列函数的最大值、最小值和最小正周期：

(1) $y=\sin(4x-\dfrac{\pi}{8})$；

(2) $y=1+2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$；

(3) $y=\sin x\cos x$；

(4) $y=1-2\sin^2 x$.

6．在$\triangle ABC$中，已知下列条件，解三角形，并求三角形的面积(角度精确到$1°$，边长精确到0.1，面积精确到1).

(1) $a=12$，$b=6$，$A=120°$；

(2) $a=7$，$b=23$，$C=135°$.

7．海中两艘轮船A、B，轮船B在A的正东10海里处，海中有一灯塔C，在轮船A上看灯塔在船北偏东$60°$，在轮船B上看灯塔在船北偏东$25°$，求灯塔到两船的距离分别是多少海里(精确到0.1海里)？

B　组

1. 如果$\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$且$\alpha\in(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2})$，那么$\sin\alpha-\cos\alpha$的值是__________.

2. 已知$\tan\alpha=3$，计算$\tan\dfrac{\alpha}{2}$的值.

3. 已知$\sin\alpha+\sin\beta=0$，$\cos\alpha+\cos\beta=1$，求$\cos(\alpha-\beta)$的值.

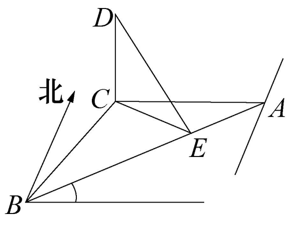
4. 求$\dfrac{\sin16°\cos16°\cos32°}{\cos26°}$的值.

5. 已知函数$y=2\sin x\cos x-(\cos^2 x-\sin^2 x)$，$x\in\mathbf{R}$，求：

(1) 函数的最小正周期；

(2) 函数的图象由函数$y=\sqrt{2}\sin2x$，$x\in\mathbf{R}$的图象经过怎样变换得到.

6．人(A)在塔(C)的正东方，沿南偏西$60°$的道路前进40m后到达B处，望见塔在东北方向上，若沿途测得塔的最大仰角为$30°$，求塔高.



第6题图

7．△ ABC 中，若已知三边为连续正整数，最大角为钝角．

(1) 求最大角；

(2) 求以此最大角为内角，夹此角两边之和为 4 的平行四边形的最大面积．